F 462

KA I

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

R

Institut. de Documentare Politică
BUCUREȘTI
OBMEN - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

Bibliotecă Mărcuș Könyvtár
TULAJDONA

1-2

ANUL VII

IANUARIE — IUNIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

1-2

ANUL VII

IANUARIE — IUNIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Academician S. STOILOV — redactor responsabil; Academician G. VRÎNCEANU — redactor adjunct; Academician MIRON NICOLESCU; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R.P.R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; T. GANEA; A. HALANAY

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul VII, nr. 1—2 Ianuarie—iunie 1956

SUMAR

	Pag.
ALEXANDRU FRODA, Despre reuniunile ordonate de mulţimi	7
CONSTANTIN P. POPOVICI, Teoria locală a numerelor ideale după Zolotarev în cazul întregilor lui Dirichlet	37
I. BARBĂLAT şi A. HALANAY, Un criteriu de existenţă a unui ciclu limită stabil pentru ecuaţia oscilaţiilor neliniare	81
IVAN SINGER, Proprietăţi ale suprafeţei sferei unitate şi aplicaţii la rezolvarea problemei unicităţii polinomului de cea mai bună aproximaţie în spaţii Banach oarecare	95
MARCEL N. ROŞCULEŢ, Algebre cu radical, asociative şi comutative, şi funcţii monogene	147
M. NECULCE, Studiul sintetic al transformării afine	179
MARIANA NEDELCU, Polinomul areolar de ordinul n în spaţiul cu 3 dimensiuni	197

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome VII, nos 1—2 Janvier-juin 1956

SOMMAIRE

Page

ALEXANDRU FRODA, Sur les réunions ordonnées d'ensembles 7

CONSTANTIN P. POPOVICI, La théorie locale des nombres idéaux d'après Zolotarev dans le cas des entiers de Dirichlet 37

I. BARBĂLAT et A. HALANAY, Un critère d'existence d'un cycle limite stable pour l'équation des oscillations non linéaires 81

IVAN SINGER, Propriétés de la surface de la sphère unitaire et applications à la résolution du problème de l'unicité du polynôme de meilleure approximation dans des espaces de Banach quelconques 95

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Algèbres à radical, associatives et commutatives, et fonctions monogènes 147

M. NECULCE, Etude synthétique de la transformation affine 179

MARIANA NEDELCU, Le polynôme aréolaire d'ordre n dans l'espace à trois dimension 197

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том VII, № 1—2 Январь—июнь 1956

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
А. ФРОДА, Об упорядоченных объединениях множеств	7
К. П. ПОПОВИЧ, Локальная теория идеальных чисел по Золотареву для кольца Дирихле	37
И. БАРБЭЛАТ и А. ХАЛАНАЙ, Критерий существования устойчивого предельного цикла для уравнения нелинейных колебаний	81
И. ЗИНГЕР, Некоторые свойства поверхности единичной сферы и применения к решению задачи единственности многочлена наибольшего приближения в любых пространствах Банаха	95
М. Н. РОШКУЛЕЦ, Ассоциативные и коммутативные алгебры с радикалом и моногенные функции	147
М. НЕКУЛЬЧЕ, Об аффинном преобразовании	179
М. НЕДЕЛКУ, Ареолярный многочлен n-го порядка в трехмерном пространстве	197

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 1—2, 1956

DESPRE REUNIUNILE ORDONATE DE MULŢIMI*)

DE

ALEXANDRU FRODA

După Cantor, definiţia reuniunii (ordonate) R de mulţimi ordonate A_i, aparţinînd unei familii $\mathfrak{F}$ disjuncte date, presupune dubla condiţie:

1) Ordinea în R a două elemente oarecare din aceeaşi mulţime A_i se păstrează în reuniunea lor.

2) Ordinea în R a două elemente a_i, a_j, aparţinînd respectiv unor mulţimi A_i, A_j, distincte, este independentă de alegerea lor în mulţimea respectivă.

Renunţîndu-se la condiţia 2) se obţine o familie de reuniuni R, pe care le numim *reuniuni ordonate.*

Prezenta lucrare, dedicată studiului reuniunilor ordonate, cuprinde o analiză a acestei noţiuni. Se obţin, între altele, condiţii necesare şi suficiente ca R să fie bineordonată.

Se consideră apoi unele proprietăţi ale reuniunii, ordonate în sensul lui Cantor. În special, în cazul cînd R este bineordonată se consideră permutările infinite ale ordinei mulţimilor ei componente A_i.

Se trece astfel la studiul valorilor sumelor transfinite de numere ordinale, în raport cu permutările precedent definite. Unele cazuri speciale, mai simple, au fost considerate recent de autorii citaţi în text [4], [5], [7].

Sîntem conduşi, între altele, la considerarea unei clase de numere ordinale, «supra-nedescomponibile» σ, avînd, prin definiţie, proprietatea de a absorbi orice factor la stînga, mai mic ca σ.

Pentru numerele σ se obţine formula generală

$$\sigma = \omega^{\omega^{\gamma}},\ \gamma \geqslant 0,$$

precum şi proprietatea remarcabilă următoare:

O sumă transfinită ρ de ζ numere ordinale β_α, $\alpha < \zeta$, unde fiecare termen al sumei este strict inferior unui număr fix $\lambda < \sigma$ şi nu toţi β_α sînt egali cu 1, satisface relaţia $\rho = \sigma$ sau $\zeta < \rho < \zeta + \sigma$, după cum ζ este sau nu un multiplu la dreapta al lui σ.

---

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 1 decembrie 1955.

§ 1. Definiții și generalități

1. Fie dată o familie $\mathfrak{F}$ de mulțimi ordonate[1]) A_i, $i \in \mathfrak{I}$, unde $\mathfrak{I}$ este o mulțime de indici, dată odată cu $\mathfrak{F}$.

Vom numi *reuniune ordonată* R a mulțimilor ordonate *componente* $A_i \in \mathfrak{F}$ mulțimea elementelor lor, ordonată cu păstrarea ordinei din fiecare A_i (cu alte cuvinte, astfel ca ordinea indusă [2]) din R în fiecare A_i să coincidă cu ordinea din A_i). Cînd această ultimă condiție este îndeplinită, scriem

$$R = \overset{o}{\bigcup_{i \in \mathfrak{I}}} A_i \cdot \tag{1}$$

Ca operația definită în (1) să aibă sens este necesar și suficient [3]) ca pentru oricare $i, j \in \mathfrak{I}$, ordinea elementelor intersecției $A_i \cap A_j$ să coincidă cu ordinea indusă din A_i și cu aceea indusă din A_j, [4]).

2. O clasă de reuniuni ordonate R, mai puțin generală decît cea de mai sus 1), a fost considerată de Cantor și se obține, impunînd condițiile suplimentare

$\alpha°$) Familia $\mathfrak{F}$ de A_i este disjunctă

$$i, j \in \mathfrak{I},\ i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing .$$

$\beta°$) Între două elemente oarecare din aceeași mulțime A_i nu se cuprinde în R nici un element din vreo altă mulțime $A_j \in \mathfrak{F}$, cînd $i \neq j$.

Cînd reuniunea ordonată R satisface condițiile $\alpha°$, $\beta°$, ea se va numi *reuniune cantoriană* și se va nota

$$R = \overset{c}{\bigcup} A_i . \tag{2}$$

Mulțimea $\mathfrak{I}$, care este în acest caz ordonată, va fi numită (*mulțimea*) *ordonatoare* a lui R și cu notații apropriate pentru ordinea din $\mathfrak{I}$ și din R [5]),

$$i, j \in \mathfrak{I}\ ,\ i < j \rightarrow A_i \in \mathfrak{F},\ A_j \in \mathfrak{F},\ A_i \prec A_j . \tag{3}$$

3. Fie A o submulțime nevidă a unei mulțimi ordonate R; $A \subset R$.

Vom spune că submulțimea nevidă P a lui A este o *porțiune întreagă din A în R*, [6]), dacă oricare ar fi elementul său p, mai aparțin lui P toate elementele $p_1 \in A$ — cînd ele există — pentru care este satisfăcută următoarea proprietate:

(P). Între p și p_1 nu se află nici un element din R, care să nu aparțină lui A [7]).

---

[1]) În prezenta lucrare, prin mulțime *ordonată* se înțelege o mulțime *total ordonată*, adică ordinea are loc între oricare două elemente ale mulțimii.

[2]) Fie mulțimile A, B, $A \subset B$. Spunem că A are ordinea *indusă* din B, cînd ordinea oricăror două elemente în A este aceeași cu ordinea lor în B.

[3]) Această condiție este, în particular, îndeplinită, cînd familia $\mathfrak{F}$ este disjunctă.

[4]) Observăm că, în general, formula (1) nu definește, fără preciziuni suplimentare, un singur R și nici măcar un singur tip de ordine pentru R. Totuși, cînd $\mathfrak{I}$ este numerabilă, iar tip $A_i = \eta$, oricare ar fi $i \in \mathfrak{I}$ (unde η este tipul de ordine al mulțimii numerelor raționale, în ordinea crescătoare), rezultă pentru R din (1), *tip* $R = \eta$. Vezi și A. Denjoy [2].

[5]) M fiind o mulțime (total) ordonată, $A \subset M$, $B \subset M$, iar a, b elementele lor generice, avem prin definiție, $A \prec B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \prec b$, $(a \in A,\ b \in B)$.

[6]) Noțiunea de porțiune întreagă din $A \subset R$ are un sens bine determinat numai relativ la un R dat. Porțiunile întregi din A sînt — în general — altele, cînd R se înlocuiește cu altă mulțime R', pentru care $A \subset R'$.

[7]) Un element x dintr-o mulțime ordonată R se află *între* două elemente a, b din R, cînd are loc, relativ la ordinea din R: odată cu $a < b$ și $a < x < b$, $(x \in R)$.

Proprietatea (P) fiind tranzitivă, definiția unei porțiuni întregi a lui A în R este necontradictorie.

Din definiția pusă rezultă că în mulțimea A nevidă se pot afla una sau mai multe porțiuni întregi ale lui A în R, fiecare porțiune întreagă a lui A în R putînd avea unul sau mai multe elemente. (Cînd în A se află o singură porțiune întreagă din R, porțiunea se confundă cu A și A se numește *interval din* R).

Din definiție rezultă că:

A este o reuniune cantoriană a porțiunilor sale întregi din R.

Într-adevăr, A este o reuniune ordonată de mulțimi P, căci fiecare element $p \in A$ aparține unei porțiuni întregi P a lui A în R, iar în fiecare P ordinea este cea indusă în ea din A.

Să arătăm că reuniunea este cantoriană. Într-adevăr, două porțiuni întregi P_1, P_2 ale lui A în R, neconfundate, nu au nici un element comun, iar ordinea lor în R este prin urmare aceeași ca și a oricăror două elemente ale lor, adică

$$a_1 \in P_1,\ a_2 \in P_2,\ a_1 \prec a_2 \rightleftarrows P_1 \prec P_2 . \qquad \text{q. e. d.}$$

Cînd fiecare porțiune întreagă a lui A în R este o mulțime bineordonată[1]), A se va numi submulțime *normală* din R. În particular, A este normală, cînd este bineordonată.

4. Fie $\mathfrak{F}$ o familie disjunctă de mulțimi ordonate A_i, $i \in \mathfrak{I}$, iar R o reuniune ordonată a lor

$$R = \overset{o}{\underset{i \in \mathfrak{I}}{\cup}} A_i . \tag{4}$$

Să notăm cu P_η o porțiune întreagă, în R, a uneia dintre mulțimile $A_i \in \mathfrak{F}$ și Y mulțimea (ordonată a) indicilor η. Să arătăm că

O reuniune ordonată R de componente A_i disjuncte se poate exprima ca o reuniune cantoriană a porțiunilor întregi P_η, din R, ale mulțimilor A_i,

$$R = \overset{o}{\underset{\eta \in Y}{\cup}} P_\eta , \tag{5}$$

mulțimea ordonatoare Y avînd ordinea indusă din R.

Vom spune că formula (5) dă *descompunerea cantoriană* a reuniunii ordonate R din (4) și totodată a fiecărei mulțimi ordonate A_i în R.

Avem într-adevăr, pentru i, η convenabile,

$$p \in R \to p \in A_i \to p \in P_\eta ,$$

și reciproc

$$p \in P_\eta \subset A_i \subset R \to p \in R ,$$

deci — abstracție făcînd de ordinea din R — putem scrie

$$R = \cup P_\eta . \tag{6}$$

Dar, fiecare două porțiuni întregi P_η, $P_{\eta'}$ din R, diferite, sînt și disjuncte, deoarece $\mathfrak{F}$ este o familie disjunctă și astfel fie că P_η, $P_{\eta'}$, sînt incluse în aceeași

[1]) O mulțime A este, precum se știe, *bineordonată*, cînd fiecare submulțime a ei are un prim element (a se vedea de exemplu [6], p. 162—173).

componentă A_i, cînd s-a văzut, din 3 că sînt disjuncte, fie că $P_\eta \subset A_i$, $P_{\eta'} \subset A_{i'}$ și $A_i \cap A_{i'} = \varnothing$.

Ținînd însă seama de ordinea din R, submulțimile sale P_η, $P_{\eta'}$, sînt și ele ordonate, iar ordinea lor în R este dată de

$$P_\eta \prec P_{\eta'} \rightleftarrows p < p', \text{ cînd } p \in P_\eta\, p' \in P_{\eta'}. \tag{7}$$

Ordonînd deci mulțimea de indici Y cu ordinea indusă din R, avem

$$\eta_i < \eta' \rightleftarrows P_\eta \prec P_{\eta'}.$$

Luînd deci pe $Y \subset R$ ca mulțime ordonatoare în (6) se obține reuniunea cantoriană (5) pentru reuniunea ordonată R, din (4), de componente disjuncte. q.e.d.

Introducem și următoarele definiții:

a) Fie dată o familie disjunctă $\mathfrak{R}^0$ de reuniuni ordonate R de componente A_i, aparținînd unei familii $\mathfrak{F}$ date. Vom spune că familia $\mathfrak{R}^0$ este *generată de porțiuni întregi* (din fiecare $R \in \mathfrak{R}^0$), cînd oricare componentă A_i dată posedă, în fiecare R, aceleași porțiuni întregi.

b) Cînd R este o reuniune ordonată, de componente A_i, aparținînd unei familii $\mathfrak{F}$ disjuncte, iar fiecare A_i este o submulțime normală din R (în sensul definiției din 3) vom spune că R este o *reuniune normală*. În particular, cînd mulțimile $A_i \in \mathfrak{F}$ sînt bineordonate, R este o reuniune normală.

5. Am numit altădată [3] un *extras* E dintr-o familie $\mathfrak{F}$ de mulțimi nevide A_i, $i \in \mathfrak{I}$, o mulțime de elemente $a_i \in A_i$, cîte unul din fiecare mulțime A_i din $\mathfrak{F}$. Extrasul E este *propriu*, cînd $i \neq j \rightarrow a_i \neq a_j$, $a_i \in E$, $a_j \in E$. Cînd familia $\mathfrak{F}$ este disjunctă, fiecare extras este propriu.

Două extrase E_1, E_2 dintr-o aceeași familie disjunctă $\mathfrak{F}$ de mulțimi A_i nevide ($i \in \mathfrak{I}$), componente ale unei reuniuni ordonate R, se vor numi *extrase echivalente din* R (relație de echivalență: reflexivă, simetrică și tranzitivă), cînd pentru fiecare $i \in \mathfrak{I}$. două elemente oarecari $a_{i_1} \in E_1$, $a_{i_2} \in E_2$, extrase din aceeași componentă A_i aparțin unei aceleiași porțiuni întregi P_η a lui A_i în R.

Două extrase echivalente, din R, au același tip de ordine, cînd se consideră ordonate, ca submulțimi din R, cu ordinea indusă din R.

6. Fie R o reuniune ordonată normală (vezi 4) de componente A_i, ($i \in \mathfrak{I}$), aparținînd unei familii $\mathfrak{F}$ disjuncte.

Vom numi *extras inițial* E' din $\mathfrak{F}$, un extras din $\mathfrak{F}$ în care, pentru fiecare $i \in \mathfrak{I}$, elementul extras din A_i este *elementul inițial* a'_η al porțiunii întregi P_η din A_i, în R (adică primul element din P_η, mulțime bineordonată, deoarece fiecare A_i este normală în R).

Fiecărui extras E din $\mathfrak{F}$ îi corespunde univoc un extras inițial E'; extrasele E, E' fiind echivalente în R, ele au același tip de ordine.

7. Fie A, B două submulțimi disjuncte[1]) ale unei mulțimi ordonate R

$$A \subset R, \quad B \subset R, \quad A \cap B = \varnothing.$$

Spunem că A, B sînt *submulțimi paralele din* R[2]), dacă porțiunile întregi P_i ale lui A în R pe de o parte și porțiunile întregi Q_j ale lui B în R, unde $i, j \in M$ (mulțime de indici pe de alta, sînt legate prin condițiile $\alpha°$, $\beta°$ de mai jos:

---

[1]) A, B fiind disjuncte, orice porțiuni întregi ale lor din R sînt de asemenea disjuncte.

[2]) Relația definită (de paralelism) este simetrică.

α°). Există o corespondență biunivocă Γ între familiile $\mathcal{G}$ de P_i și $\mathcal{H}$ de Q_j astfel încît P_i și Q_j se corespund, cînd $i = j$.

β°) În mulțimea ordonată R nu se află, între P_i și Q_i, $(i \in M)$, nici un element din R, aparținînd reuniunii $A \cup B$.

Cînd A, B sînt mulțimi paralele din R, familiile $\mathcal{G}$, respectiv $\mathcal{H}$, de porțiuni întregi din R ale lui A, respectiv B, sînt asemenea.

Punînd, pentru a fixa ideile, pentru un i dat,

$$P_i \prec Q_i , \tag{5*}$$

să arătăm că pentru oricare $j \in M$, avem fie

$$P_i \prec P_j \rightleftarrows Q_i \prec Q_j , \tag{6*}$$

fie

$$P_j \prec P_i \rightleftarrows Q_j \prec Q_i$$

și astfel enunțul va fi complet demonstrat.

Dovedim (6*) reducînd la absurd ipoteza contrarie că am putea avea, pentru o pereche dată de indici $i, j \in M$, simultan

$$P_i \prec P_j , \quad Q_j \prec Q_i . \tag{7*}$$

Într-adevăr, ținînd seama de (5*) și de prima inegalitate (7*), urmează

$$P_i \prec Q_i , \quad P_i \prec P_j .$$

Or, nu am putea avea $P_i \prec P_j \prec Q_i$, căci s-ar contrazice condiția β° și deci rămîne de examinat numai cazul $P_i \prec Q_i \prec P_j$. Dar cum, din (7*), știm că $Q_j \prec Q_i$, singurele cazuri de examinat vor fi următoarele:

$$P_i \prec Q_j \prec Q_i \prec P_j \quad \text{sau} \quad Q_j \prec P_i \prec Q_i \prec P_j .$$

Or, în fiecare din aceste cazuri, condiția β° nu este respectată. q.e.d.

Observație. Din această proprietate rezultă că descompunerile cantoriene (5) ale fiecăreia dintre mulțimile paralele disjuncte A, B, în porțiuni întregi din R, au mulțimile lor ordonatoare asemenea, în raport cu ordinea indusă în ele din R.

Folosind această observație, precum și alta anterioară, din 3, rezultă evident următoarea proprietate:

Cînd într-o reuniune ordonată normală R de mulțimi ale unei familii $\mathcal{F}$ una din aceste mulțimi este bineordonată, oricare altă mulțime paralelă cu ea este de asemenea bineordonată.

§. 2. Proprietăți de bună ordonare ale reuniunilor ordonate

Avem proprietatea:

1° *O reuniune ordonată R a mulțimilor A_i, $i \in \mathcal{I}$, ale unei familii $\mathcal{F}$ este bineordonată, în orice interval A din R, în care fiecare mulțime A_i este bineordonată și în care numai un număr finit din aceste mulțimi sînt nevide.*

Se dă

$$R = \overset{o}{\underset{i \in \mathcal{I}}{\cup}} A_i . \tag{8}$$

Punînd

$$R^* = A \cap R, \qquad A_i^* = A \cap A_i ,$$

fiecare A_i^* este bineordonată, iar dintre acestea numai un număr finit sînt nevide. Renumerotînd mulțimea de indici, putem deci scrie, în loc de (8),

$$R^* = \overset{o}{\underset{j \in M}{\cup}} A_j^* , \qquad M = \{1, 2, \ldots, m\} ,$$

unde fiecare A_j^* este bineordonată și nevidă.

Fie $S \subset R^*$ un șir oarecare descrescător de elemente din R^*. Definim subșirurile $S = S \cap A_j^*$, $j \in M$, care sînt finite, ca șiruri descrescătoare de elemente din A_j^* , care este bineordonată. Or, cu ordonarea din R,

$$S = \overset{o}{\underset{i \in M}{\cup}} S_i$$

și cum fiecare S_i este finit, rezultă că și S este finit și cum S este un șir descrescător, oarecare, din R^*, rezultă că R^* este bineordonată. q.e.d.

Cînd, în particular, intervalul A din R se confundă cu R, obținem

2° *O reuniune ordonată a unui număr finit de componente bineordonate este o mulțime bineordonată.*

Observație. Această proprietate poate să nu mai fie valabilă, cînd familia $\mathfrak{F}$ este infinită, deși componentele lui R sînt bineordonate. Fie, de exemplu, A_i mulțimea avînd ca unic element indicele $i \in \mathfrak{F}$, iar $\mathfrak{F}$ fie de tipul ω^*. Atunci, R dat de (8), este de tip ω^* și neavînd prim element nu este bineordonată [1]).

Vom extinde totuși proprietatea 2°, de mai sus, la cazurile mai generale, cînd nu se mai cere ca $\mathfrak{F}$ să fie finită; în schimb se impune ca R să fie normală (§ 1, 3).

3° *O reuniune ordonată normală R este o mulțime bineordonată atunci și numai atunci cînd mulțimea ordonatoare a descompunerii cantoriene a lui R este bineordonată.*

Într-adevăr, familia $\mathfrak{F}^*$ a porțiunilor întregi din fiecare componentă $A_i \subset R$ posedă un extras inițial E^*, deoarece reuniunea R este normală (§ 1, 6). Tipul de ordine al lui E^* este același cu al oricărui alt extras din familia $\mathfrak{F}^*$ și coincide cu tipul de ordine al mulțimii ordonatoare Y din descompunerea cantoriană (§ 1, (5)) a lui R, precum reiese din relațiile (7), § 1.

Așadar, dacă reuniunea R este normală și mulțimea R este bineordonată, Y este de asemenea bineordonată, ea fiind asemenea cu extrasul E^* din R. Dacă, reciproc, mulțimea ordonatoare Y este bineordonată, descompunerea cantoriană a lui R are loc în mulțimi B_η ($\eta \in Y$), care sînt bineordonate, deoarece R este normală.

Urmează deci, în virtutea unei proprietăți cunoscute [2]), că reuniunea cantoriană a lui R este de asemenea o mulțime bineordonată. q.e.d.

4° *Ca o reuniune ordonată normală R, de componente nevide ale unei familii $\mathfrak{F}$ disjuncte, să fie o mulțime bineordonată este necesar și suficient ca fiecare extras inițial din $\mathfrak{F}$ să fie o mulțime bineordonată.*

---

[1]) Tipul ω^* este definit ca inversul lui ω (primul număr ordinal infinit).

[2]) A se vedea, de pildă, [6], p. 173.

Condiția este necesară. Într-adevăr, reuniunea ordonată R a mulțimilor bineordonate componente A_i este normală (§ 1, 4) și există deci extrase inițiale E' din familia $\mathfrak{F}$ dată. Fiecare extras fiind o submulțime din R, care este bineordonată, rezultă că E' este bineordonată.

Condiția este suficientă. R fiind o reuniune ordonată normală este suficient, în baza propoziției precedente, 3°, să arătăm că mulțimea ordonatoare Y a descompunerii cantoriene a lui R este bineordonată. Dar extrasul inițial E^* al familiei $\mathfrak{F}^*$ a porțiunilor întregi, din fiecare A_i, în R, este asemenea cu Y. Rămîne deci să dovedim că E^* este o mulțime bineordonată, adică să arătăm că orice submulțime nevidă E° a lui E^* are un prim element.

Să considerăm intersecțiile

$$E_i^0 = E^0 \cap A_i , \quad i \in \mathfrak{I} . \tag{9}$$

Să notăm cu $\mathfrak{I}_1$, respectiv cu $\mathfrak{I}_2$, mulțimile de indici $i \in \mathfrak{I}$, pentru care E_i° este nevidă, respectiv vidă și cu $\mathfrak{F}_1$, respectiv $\mathfrak{F}_2$ familiile de mulțimi A_i, componente ale lui R, pentru care $i \in \mathfrak{I}_1$, respectiv $i \in \mathfrak{I}_2$.

Avem deci, $\mathfrak{F}$ fiind familia disjunctă de mulțimi A_i,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2 , \quad \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = \varnothing . \tag{10}$$

Obținem un extras inițial E_1' din $\mathfrak{F}_1$, definindu-l ca mulțimea primelor elemente din E_i^0, cînd $i \in \mathfrak{I}_1$.

Într-adevăr, ca submulțime din mulțimea bineordonată A_i, mulțimea E_i^0 este nevidă, deoarece $i \in \mathfrak{I}_1$ și posedă un prim element, pe care-l vom nota cu p_i'. Cum $p_i' \in E_i^0 \subset E^*$, este clar că p_i', unde $i \in \mathfrak{I}_1$, este un element inițial al unei porțiuni întregi a lui A_i, în R și deci E_1' este un extras inițial din $\mathfrak{F}_1$.

Fie E_2' un extras inițial din $\mathfrak{F}_2$, adică din familia mulțimilor bineordonate A_i, unde $i \in \mathfrak{I}_2$.

Din (10) rezultă atunci că avem în reuniunea

$$E' = E_1' \cap E_2' \tag{11}$$

un extras inițial E' din $\mathfrak{F}$, care — prin ipoteză — este bineordonat. Or, E_1' fiind inclusă în E', rezultă că și E_1' este bineordonată.

Mulțimea E_1' nu este vidă, căci $\mathfrak{F}_1$ nu este vidă. Într-adevăr, dacă $\mathfrak{F}_1$ ar fi vidă, am avea, în (10), $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$ și fiecare mulțime E_i^0, unde $i \in \mathfrak{I}$, ar fi vidă. Dar atunci, cum $E^0 \subset E^* \subset R$, avem

$$E^0 = R \cap E^0 = \overset{\sigma}{\underset{i \in \mathfrak{I}}{\cup}} (A_i \cap E^0) = \overset{\sigma}{\underset{i \in \mathfrak{I}}{\cup}} E_i^0 \tag{12}$$

și E^0 ar fi vidă, contrar definiției sale.

Cum E_1' este bineordonată și nevidă, ea posedă un prim element a'.

Ținînd însă seama de (9), precum și de faptul că fiecare E_i^0 este vidă, cînd $i \in \mathfrak{I}_2$, rezultă

$$E^0 = \overset{\sigma}{\underset{i \in \mathfrak{I}}{\cup}} E_i^0 = \overset{\sigma}{\underset{i \in \mathfrak{I}_1}{\cup}} E_i^0 . \tag{13}$$

Cum primul element a' din E_1' este înaintea primelor elemente, diferite de el însuşi, din fiecare E_i^0, cînd $i \in \mathfrak{I}_1$, rezultă că a' este înaintea fiecărui alt element din fiecare E_i^0, cînd $i \in \mathfrak{I}_1$.

Ţinînd seama de (13), se vede că a' este deci primul element din E^0. Astfel, orice submulţime, nevidă, E^0 a lui E^* are un prim element şi deci E^* este bineordonată, ceea ce, precum am văzut, 3°, este suficient ca mulţimea R să fie bineordonată. q.e.d.

§ 3. Reuniuni ordinale

1. Fie $\mathfrak{F}$ o familie disjunctă de mulţimi ordonate M_z şi R o reuniune ordonată cantoriană, avînd ca ordonatoare o mulţime ordonată Z

$$R = \overset{c}{\underset{z \in Z}{\cup}} M_z . \tag{14}$$

Cînd Z este bineordonată, reuniunea R se va numi *ordinală*.

Dacă tipul de ordine al lui Z este numărul ordinal ζ, reuniunea ordinală R se mai poate scrie, cu o notaţie apropriată,

$$R = \overset{c}{\underset{\alpha < \zeta}{\cup}} M_\alpha , \qquad \alpha = 1, 2, \ldots , \tag{15}$$

unde indicele α este un număr ordinal, care parcurge segmentul, asemenea cu Z, al numerelor ordinale mai mici ca ζ. Avem deci în R, prin definiţie,

$$\alpha < \alpha' < \zeta \rightarrow M_\alpha \prec M_{\alpha'} . \tag{16}$$

Cînd — într-un caz încă destul de general — mulţimile date M_α sînt şi ele bineordonate, reuniunea lor ordinală R este de asemenea o mulţime bineordonată [1]). În acest caz, notînd cu B_α mulţimile M_α date $(\alpha < \zeta)$ şi punînd

$$\beta_\alpha = tip\ B_\alpha , \ (\alpha < \zeta); \ tip\ R = \rho,$$

unde β_α, ρ sînt numere ordinale, vom putea folosi definiţia adunării ordonate transfinite a numerelor ordinale şi scrie

$$\rho = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\alpha + \ldots ; \ \alpha < \zeta. \tag{17}$$

Aceeaşi relaţie convenim să o notăm

$$\rho = \sum_{\alpha < \zeta} \beta_\alpha , \tag{18}$$

unde numărul ρ este o *sumă transfinită de tip ordinal* ζ, avînd ca termeni numerele ordinale date β_α, iar $\alpha < \zeta$.

2. Fiind dată o mulţime oarecare B, nevidă, de numere ordinale, ordonată în sensul crescător al lor, se ştie că B este bineordonată.

Se poate dovedi uşor existenţa a două numere ordinale definite ca *marginile stricte, inferioară* η, *respectiv superioară* σ, ale mulţimii B, prin condiţiile

$$\beta \in B \rightarrow \eta \leqslant \beta \leqslant \sigma \tag{19}$$

---

[1]) Acest rezultat clasic este cuprins şi în propoziţia 3° din § 2, deoarece mulţimile A sînt bineordonate şi deci normale, iar mulţimea ordonatoare este bineordonată, deci R este o mulţime bineordonată.

și totdeodată,

$$\eta' \leqslant \beta \leqslant \sigma',\ \eta' \neq \eta,\ \sigma' \neq \sigma \rightarrow \eta' < \eta,\ \sigma' > \sigma. \tag{20}$$

Putem dovedi existența numărului η, respectiv σ, observînd că (fiecare din ele) sînt egale cu cel mai mic dintre numerele ordinale λ satisfăcînd, în ce privește pe η, relația $\lambda \leqslant \beta$ pentru cel puțin un număr β din B, respectiv, în ce privește pe σ, relația $\lambda \geqslant \beta$ pentru oricare număr β din B.

Este clar că totdeauna η aparține lui B, fiind cel mai mic număr al acestei mulțimi bineordonate. În ce privește pe σ, el poate să aparțină lui B, fiind cel mai mare număr din B, cînd un asemenea număr există sau se poate să nu aparțină lui B, fiind — în acest din urmă caz — primul număr ordinal care urmează după toți β din B, [1]).

3. Fie dată o mulțime neordonată $\mathcal{J}$, de indici i.

Să considerăm [2]) următoarea ecuație, în numărul ordinal ξ,

$$\overline{\xi} = \overline{\overline{\mathcal{J}}}. \tag{21}$$

Notăm cu $X(\overline{\overline{\mathcal{J}}})$ clasa de numere ordinale ξ satisfăcînd acestei ecuații și fie $\varphi \in X(\overline{\overline{\mathcal{J}}})$ una din soluțiile ecuației (21). Din $\overline{\varphi} = \overline{\overline{\mathcal{J}}}$ rezultă direct existența unei familii $\mathfrak{M}_\varphi$ nevide de corespondențe biunivoce posibile, Γ_m ($m \in M_\varphi$), între mulțimea $\mathcal{J}$ de indici pe de o parte și mulțimea bineordonată W_φ, de tip φ, de numere ordinale $\alpha < \varphi$, pe de alta. Pentru o corespondență $\Gamma_m \in \mathfrak{M}_\varphi$, determinată, această aplicație ordonează mulțimea de indici $\mathcal{J}$, care devine o mulțime bineordonată $\mathcal{J}(\varphi, m)$ de tip φ, cînd se atribuie fiecărui element i, determinat, din $\mathcal{J}$, indicele $\alpha \in W_\varphi$, corespunzător — prin Γ_m — acestui i.

Procedînd în același mod cu fiecare soluție ζ a ecuației (21) obținem, pentru $m \in M_\zeta$, cîte o *permutare ordinală* $\mathcal{J}(\zeta, m)$ *a mulțimii* $\mathcal{J}$, *cu păstrarea puterii* $\overline{\overline{\mathcal{J}}}$ și notăm cu $\mathfrak{K}(\overline{\overline{\mathcal{J}}})$, clasa acestor permutări pe care o numim *clasa permutărilor ordinale de puterea* $\overline{\overline{\mathcal{J}}}$.

O subclasă $\mathfrak{K}(\zeta)$ a clasei $\mathfrak{K}(\overline{\overline{\mathcal{J}}})$, astfel definite, se obține cînd se consideră numai mulțimea permutărilor $\mathcal{J}(\zeta, m)$, pentru un ζ dat ca soluție a ecuației (21). Numim, pentru $m \in M_\xi$, fiecare element al subclasei $\mathfrak{K}(\zeta)$ *o permutare ordinală* $\mathcal{J}(\zeta, m)$ *a mulțimii* $\mathcal{J}$, *cu păstrarea tipului de ordine* ζ, *iar clasa* $\mathfrak{K}(\zeta)$ *clasa permutărilor ordinale de tip* ζ.

4. Fie dată o familie $\mathfrak{F}$ disjunctă, de mulțimi bineordonate B_i, pentru care *tip* $B_i = \beta_i$, număr ordinal dependent de indicele i, care parcurge o mulțime oarecare bineordonată $\mathcal{J}$ de *tip* $\mathcal{J} = \zeta$.

Să considerăm o clasă de permutări ordinale, de tip ζ. Fiecărei permutări ordinale (P) din clasa considerată îi va corespunde o reuniune ordinală, care se poate scrie, în baza definiției,

$$R = \overset{c}{\underset{\alpha < \zeta}{\cup}} B_{i_\alpha}, \tag{22}$$

unde i_α sînt numere ordinale date al căror șir ordinal transfinit este

$$(P): \qquad i_1, i_2, \ldots, i_\omega, \ldots, i_\alpha, \ldots, \quad \alpha < \zeta. \tag{23}$$

---

[2]) Se observă că η este *atinsă* în orice B, pe cînd σ este atinsă atunci și numai atunci cînd orice șir crescător de numere din B are limita în B.

[2]) Folosim notațiile lui Cantor pentru puterea $\overline{A}$ a unei mulțimi A și puterea $\bar{\alpha}$ a unui număr ordinal α, adică a unei mulțimi A de tip α.

Se ştie că R este o mulţime bineordonată; fie tipul ei de ordine numărul ordinal ρ. Avem, conform notaţiei admise anterior (18),

$$\rho = \sum_{\alpha<\zeta} \beta_{i_\alpha}, \tag{24}$$

unde şirul transfinit (P) este dat de (23).

Putem formula următoarea problemă generală [1]):

Să se studieze proprietăţile mulţimii $\mathfrak{R}$ a numerelor ordinale ρ, date de sumele considerate (24), cînd permutarea (P) aparţine unei clase date de permutări ordinale de tip de ordine dat, respectiv de putere dată.

Mulţimea $\mathfrak{R}$ de tipuri de ordine ρ corespunde unei familii $\mathfrak{R}^0$, generată de porţiuni întregi din $R \in \mathfrak{R}^0$ (§ 1, 4, *a*), dacă oricare reuniune ordonată R a lor este normală şi în descompunerea cantoriană a reuniunii (§ 1, 4, (5)) mulţimea ei ordonatoare este bineordonată (§ 2, 3°).

Nu este vorba să tratăm în prezenta lucrare problema precedentă în toată generalitatea ei, ci ne vom mărgini la cîteva probleme mai particulare, obţinînd indicaţii utile pentru studiul cazurilor generale.

5. Fie $\mathfrak{R}$ mulţimea de numere ordinale ρ, ataşată unei clase $\mathfrak{K}(\zeta)$ de permutări (P), în baza operaţiei de adunare ordonată transfinită (24), atunci cînd este dată mulţimea B de numere ordinale β_{i_α} unde $\alpha < \zeta$.

Să notăm cu η, σ, marginile mulţimii B

$$\eta \leqslant \beta_{i_\alpha} \leqslant \sigma, \qquad \alpha < \zeta. \tag{25}$$

Avem

5° *Cînd fiecare permutare ordinală (P) aparţine clasei permutărilor de tip ζ dat, numărul ordinal ρ, care însumează numerele ordinale ale şirului transfinit B de elemente*

$$B: \qquad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i_\alpha}, \ldots, \qquad \alpha < \zeta \tag{26}$$

satisface relaţia

$$\eta . \zeta \leqslant \rho \leqslant \sigma . \zeta, \tag{27}$$

unde η, respectiv σ sînt marginile, strict inferioară, respectiv strict superioară, ale mulţimii B.

Într-adevăr, rezultă din (25), sprijinit pe o proprietate aproape evidentă [2]), că

$$\eta \cdot \zeta \leqslant \rho \leqslant \sigma \cdot \zeta, \qquad \rho = \sum_{\alpha<\xi} \beta_{i_\alpha}.$$

Rezultatul general astfel obţinut este cel mai strict, căci se pot cita, de pildă, cazurile *a)*, *b)*, de mai jos, din care reiese că fiecare din marginile mulţimii $\mathfrak{R}$ pot fi atinse (şi independent una de cealaltă).

---

[1]) Este clar că se pot formula probleme asemănătoare, rezultînd din înlocuirea operaţiei de sumă de numere ordinale, cu acela de produs sau altele, dar prin aceasta s-ar depăşi cadrul prezentei lucrări, care se ocupă de operaţia de reuniune.

[2]) Iată formularea acestei proprietăţi: dacă într-o sumă ordinală transfinită (18) de termeni β_α $(\alpha < \gamma)$, egală în valoare cu ρ, înlocuim fiecare β_α cu un termen $\beta'_\alpha \geqslant \beta_\alpha$, valoarea sumei obţinute este $\rho' \geqslant \rho$.

Cazul a). Fie $\zeta = \omega$, iar pentru o permutare (P) dată, $\beta_{i_\alpha} = \alpha \leqslant p < \omega$, cînd $\alpha < \omega$ și $\beta_{i_\alpha} = \omega + \alpha$, cînd $p < \alpha < \omega$. Avem deci $\eta = 1$, $\sigma = \omega$, de unde (27) dă

$$\omega = 1 \cdot \omega \leqslant \rho \leqslant \omega \cdot \omega = \omega^2$$

și cum

$$\rho = \frac{p\,(p+1)}{2} + \omega + (p+1) + \omega + (p+2) + \ldots = \omega^2,$$

limita superioară din (27) este atinsă.

Cazul b). Fie $\zeta = \omega 2$, iar pentru o permutare (P) dată $\beta_{i_\alpha} = \alpha$, cînd $\alpha < \omega 2$.

Avem deci $\eta = 1$, $\sigma = \omega 2$, de unde (27) dă

$$\omega^2 = 1 \cdot \omega^2 \leqslant \rho \leqslant \omega \cdot \omega 2 = \omega^2 \cdot 2$$

și cum

$$\rho = (1 + 2 + \ldots) + (1 + 2 + \ldots) = \omega + \omega = \omega 2,$$

limita inferioară din (27) este atinsă.

6. Rămîne de studiat ordonarea mulțimii, de numere ordinale, $\mathfrak{R}$ (mulțime bineordonată), în raport cu mărimea numerelor ordinale $\rho \in \mathfrak{R}$, atașate diverselor permutări (P) de tip ζ, dat.

Această problemă prezintă dificultăți, care pot fi puse în evidență în cazurile cele mai simple, cum este acela cînd $\zeta = 2$ și cînd șirurile transfinite (26), iau prin permutare elementară unul din aspectele:

$$\beta_0, \beta_1 \quad \text{sau} \quad \beta_1, \beta_0$$

și deci totul se reduce la comparația mărimii numerelor cardinale

$$\rho_0 = \beta_0 + \beta_1\,, \qquad \rho_1 = \beta_1 + \beta_0. \tag{28}$$

Să notăm, pentru prescurtare, cazurile eventual posibile, cu

$$\text{I}^\circ\colon\ \rho_0 > \rho_1, \qquad \text{II}^\circ\colon\ \rho_0 = \rho_1, \qquad \text{III}^\circ\colon\ \rho_0 < \rho_1. \tag{29}$$

Vom vedea, în ceea ce urmează, dacă și cînd se realizează fiecare din aceste cazuri, după care vom examina sumar și unele aspecte ale cazurilor mai generale, de aceeași natură, care se pot ivi [1]).

7. Folosind proprietățile precedente, din **5°**, se pot găsi relațiile de mărime între diferitele sume S_p, obținute permutînd termenii unei sume de un număr finit de p numere ordinale date: $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{p-1}$ și care sînt în număr de p !.

Cînd numărul p al termenilor sumei este mai mare ca 2, nu este suficient, în general, să cunoaștem numai relațiile de mărime între sumele de 2 termeni, obținute prin transpoziții (sînt $\frac{1}{2}\,p\,(p-1)$ astfel de relații). Dar, nici nu este necesar să cunoaștem relațiile de mărime între toate sumele parțiale, pentru a le deduce între toate sumele S_p.

Să considerăm într-adevăr, de pildă, în cazul sumelor S_3, de termeni $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ nenuli, inegali, exemplul următor, pentru a pune în evidență depen-

[1]) Cazul unui număr finit de termeni a fost tratat de W. Neumer, cu rezultatele indicate în [4] și dintr-un punct de vedere diferit de A. Wakulicz [7].

denţa sau independenţa unora dintre relaţiile de mărime (inegalitate) de celelalte.

Convenim, pentru prescurtare, să notăm sumele, indicial, astfel: β_a cu (a), $\beta_a + \beta_b$ cu $(a\ b)$, $\beta_a + \beta_b + \beta_c$ cu $(a\ b\ c)$, unde a, b, c iau valorile 0, 1, 2.

Într-un caz dat [1]), fie obţinute direct inegalităţile

$$(0) > (1) > (2);\ (01) > (10);\ (21) > (12);\ (02) > (20); \tag{30}$$

$$[(01)\ 2] > [2\ (01)];\ [(10)\ 2] > (2\ (10)].$$

Din aceste relaţii deducem, în baza asociativităţii, următoarele:

$$(021) > (012) \geqslant (102) > (120);\ (021) > (201) > (210) \geqslant (120);$$

$$(012) > (201);\quad (102) > (210).$$

Cum sînt 15 relaţii S_3, cele menţionate mai sus se deduc din precedentele, pe baza tranzitivităţii inegalităţilor.

§ 4. Suma a două numere ordinale

1. Fie β_0 un număr ordinal dat, β_0^* cel mai mare număr ordinal nedescomponibil [2]), nesuperior lui β_0.

Prin împărţirea (la stînga) [3]) a lui β_0 cu β_0^* (cum $\beta_0^* > 0$, împărţirea aceasta este totdeauna posibilă) şi notînd cu λ şi cu δ_0, respectiv, cîtul şi restul ei, avem

$$\beta_0 = \beta_0^* \lambda + \delta_0,\quad 0 \leqslant \delta_0 < \beta_0^*. \tag{31}$$

Să arătăm că λ este un număr natural r, adică

$$\lambda = r,\quad 1 \leqslant r < \omega. \tag{32}$$

Se ştie că orice număr ordinal β_0 se descompune, în mod unic, într-o sumă necrescătoare de $(p+1)$ numere ordinale nedescomponibile [4]) $(0 \leqslant p < \omega)$, dintre care primul este β_0^*, definit mai sus şi avem

$$\beta_0 = \beta_0^* + \beta_1^* + \ldots + \beta_p^*, \tag{33}$$

$$\beta_0^* \geqslant \beta_1^* \geqslant \ldots \geqslant \beta_p^* > 0. \tag{34}$$

---

[1]) O realizare a acestui caz este dată, de exemplu, astfel: $\beta_0 = \omega^3 + \omega + 2$, $\beta_1 = \omega^2 + \omega$ $\beta_2 = \omega^2 + 2$.

[2]) Un număr ordinal α este, prin definiţie, *descomponibil*, cînd există $0 < \beta < \alpha$, $0 < \gamma < \alpha$, astfel ca $\alpha = \beta + \gamma$; contrar, α este nedescomponibil.

[3]) A se vedea [6], p. 191. *Împărţirea la stînga* (cu rest) a unui număr ordinal $\beta \geqslant 0$, cu un număr ordinal $\alpha > 0$, o definim prin relaţiile, totdeauna realizabile,

$$\beta = \alpha\xi + \rho,\quad \text{unde}\quad 0 \leqslant \rho < \alpha,$$

pentru numere ordinale ξ, ρ, unic determinate şi $\xi \leqslant \beta$ (definiţia dată în [6], p.190, nu corespunde cu precedenta, însă este admisă, implicit, în enunţul teoremei de la p. 194). Vom spune că $\alpha\xi$ este un *multiplu la dreapta* al lui α; ρ fiind totuşi restul împărţirii la stînga, a lui β prin α.

[4]) Se ştie că descompunerea (33), (34) este totdeauna posibilă, iar $p \geqslant 0$; fiecare β_i^* $(0 \leqslant i \leqslant p)$ este cel mai mare număr nedescomponibil, nesuperior sumei $\beta_i^* + \ldots + \beta_p^*$. A se vedea, de pildă [6], p. 183.

a cu r numărul natural nesuperior lui $p+1$, ceea ce satisface) condițiile

$$\beta_0^* = \beta_1^* = \ldots = \beta_{r-1}^*, \qquad 1 \leqslant r \leqslant p+1 \tag{35}$$

$+ 1$, în plus, condiția

$$0 < \beta_r^* < \beta_0^*. \tag{36}$$

ărul ordinal, dat-după caz — de

$$p+1 \to \delta_0 = \beta_r^* + \ldots + \beta_p^* \; ; r = p+1 \to \delta_0 = 0. \tag{37}$$

tații și definiții se poate scrie că

$$\beta_0 = \beta_0^* r + \delta_0, \qquad 0 \leqslant \delta_0 < \beta_0^*, \tag{38}$$

tatea împărțirii și comparînd (31) cu (38), rezultă (32).
I°, II°, III° relațiile următoare:

$$\beta_1 + \beta_0 < \beta_0 + \beta_1,$$
$$\beta_1 + \beta_0 = \beta_0 + \beta_1,$$
$$\beta_1 + \beta_0 > \beta_0 + \beta_1.$$

arele proprietăți:
erele ordinale β_0, β_1, *astfel ca*

$$\beta_0 > \beta_1 > 0, \tag{39}$$

rietăți, *unde* β_0^* *și* δ_0 *sînt numerele precedent definite*:

$$\beta_1 < \beta_0^*, \tag{40}$$

$$\beta_1 = \beta_0^*, \tag{41}$$

III°, *după cum* $\delta_0 = 0$ *sau* $\delta_0 > 0$.

$$\beta_1 > \beta_0^*, \tag{42}$$

sau III°, *după cum* $\delta_0 < \delta_1$ *sau* $\delta_0 = \delta_1$ *sau* $\delta_0 > \delta_1$,
ii (la stînga) a lui β_1 *prin* β_0^* ; *cîtul acestei împărțiri*
r, iar cînd $q = r$, *are neapărat loc* III°, *deoarece*

ccesiv, notînd cu δ un număr ordinal conve-

$$\to \beta_0 = \beta_0^* + \delta, \quad \delta \geqslant 0. \tag{43}$$

nale egale, în fiecare membru al ultimei

$$+ \delta, ^2) = \beta_0 < \beta_0 + \beta_1, \tag{44}$$

inegalitatea anunțată.

secință din (39), cînd β_0 este nedescomponibil

soarbe — precum se știe — în suma $\alpha + \beta$,
$= \beta$, ceea ce constituie « proprietatea de

b°. Din (37), (38) avem

$$\beta_0 = \beta_0^* r + \delta_0, \qquad \delta_0 < \beta_0^*,$$

unde, precum reiese din (37) avem şi

$$r < p + 1 \rightleftarrows \delta_0 > 0; \quad r = p + 1 \rightleftarrows \delta_0 = 0.$$

Calculăm, ţinînd seama de (41) şi (38),

$$\beta_1 + \beta_0 = \beta_0^* + \beta_0 = \beta_0^* + \beta_0^* r + \delta_0 = \beta_0^*(1 + r) +$$

deci, r fiind un număr natural,

$$\beta_1 + \beta_0 = \beta_0^*(r + 1) + \delta_0.$$

Folosind absorbţia lui δ_0 din $\delta_0 + \beta_0^*$, avem

$$\beta_0 + \beta_1 = \beta_0 + \beta_0^* = \beta_0^* r + \delta_0 + \beta_0^* = \beta_0^* r + \beta_0^* = \beta_0^*$$

Din (46), (47) rezultă, ţinînd seama şi de (37), confirmar

$$\delta_0 = 0 \rightarrow \text{II°}, \qquad \delta_0 > 0 \rightarrow \text{III°}.$$

c°. Împărţind pe β_1 cu β_0^* (la stînga), avem

$$\beta_1 = \beta_0^* q + \delta_1, \qquad 0 \leqslant \delta_1 < \beta_0^*,$$

unde q este un număr ordinal convenabil, nu neapărat

Ţinînd seama de (45), (48) şi substituind în (39),

$$\beta_0^* q + \delta_1 < \beta_0^* r + \delta_0,$$

deci există un număr ordinal ρ_1, astfel ca

$$\beta_0^* r + \delta_0 = \beta_0^* q + \delta_1 + \rho_1, \quad \text{unde } \rho_1$$

Din împărţirea (la stînga) a lui $\delta_1 + \rho_1$ cu β_0^*,

$$\delta_1 + \rho_1 = \beta_0^* \nu + \rho_0, \qquad 0 \leqslant \rho_0$$

unde ν este un număr ordinal convenabil.

Substituind în (49), se obţine

$$\beta_0^* r + \delta_0 = \beta_0^*(q + \nu) + \rho_0$$

şi din unicitatea împărţirii, obţinem, ţinînd sea şi (50)

$$r = q + \nu$$

astfel încît

$$q \leqslant$$

Or, r fiind un număr natural, rezu zero. Din (48), rezultă că dacă am av

$$\beta_1 = \delta$$

şi s-ar contrazice condiţia (42) din en

Rezultă deci

$$1 \leqslant$$

ceea ce confirmă inegalitatea enunţ

§ 5. Funcții ordinale continue și discontinue

1. Fie ξ o variabilă ordinală, care parcurge, în sens crescător, intervalul

$$0 < \xi < \beta_0. \tag{74}$$

Introducem funcțiile ordinale φ, ψ (de variabila ξ) luînd ca valori numere ordinale și date de

$$\varphi(\xi) = \xi + \beta_0, \qquad \psi(\xi) = \beta_0 + \xi. \tag{75}$$

Observăm că $\varphi(\xi)$ este o funcție nedescrescătoare de ξ, iar $\psi(\xi)$ o funcție crescătoare de ξ.

Notăm cu ξ_0 un număr «limită» (de a doua specie) din intervalul (1), astfel încît

$$\xi_0 = \lim_{\xi < \xi_0} \xi, \text{[1]}. \tag{76}$$

Ținem seamă de următorul limbaj[2]). O funcție $\theta(\xi)$ nedescrescătoare — sau crescătoare — cu valori numere ordinale, definită în intervalul (74) este *continuă* (la stînga) în ξ_0, respectiv *discontinuă* (la stînga) în ξ_0, după cum are sau nu loc relația

$$\theta(\xi_0) = \lim_{\xi < \xi_0} \theta(\xi). \tag{77}$$

2. Avem următoarele proprietăți:

8°. *Funcția ordinală* $\psi(\xi) = \beta_0 + \xi$, *de variabila ordinală* ξ, *este continuă pentru fiecare* ξ *din intervalul* $0 < \xi < \beta_0$. Numărul ξ_0 fiind, conform definiției (76), primul număr ordinal după toți $\xi < \xi_0$, fie η primul număr ordinal după toți $\beta_0 + \xi$. Avem

$$\xi < \xi_0 \to \beta_0 + \xi < \beta_0 + \xi_0 \to \eta \leqslant \beta_0 + \xi_0. \tag{78}$$

Dar

$$\beta_0 + \xi < \eta \to \eta = \beta_0 + \xi + \delta, \qquad \delta > 0. \tag{79}$$

Aceasta, cu o notație convenabilă, se poate scrie

$$\xi' = \xi + \delta \to \eta = \beta_0 + \xi'. \tag{80}$$

Presupunînd, prin absurd, că $\eta < \beta_0 + \xi$, rezultă că $\beta_0 + \xi' < \beta_0 + \xi_0$, de unde este clar că $\xi' < \xi_0$. De aici ar urma că ξ' este unul dintre numerele ξ și am avea deci, prin definiția lui η, relația

$$\beta_0 + \xi' < \eta, \tag{81}$$

care contrazice relația (80). Așadar din (78) rezultă $\eta = \beta_0 + \xi_0$, cu alte cuvinte avem

$$\lim_{\xi < \xi_0} (\beta_0 + \xi) = \beta_0 + \xi_0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

9°. *Funcția ordinală*

$$\varphi(\xi) = \xi + \beta_0$$

---

[1]) Folosim în cele ce urmează rezultatele de mai sus, 6°, unde notăm pe β_1 cu ξ_0.

[2]) Pentru denumiri și notații, a se vedea [6], p. 198—199.

de variabila reală ξ *este continuă pentru fiecare* ξ *din intervalul* $0 < \xi < \beta_0$, *exceptînd pentru* $\xi = \beta_0^*$, *unde* β_0^* *este cel mai mare număr ordinal nedescomponibil, nesuperior lui* β_0; *funcția* $\varphi(\xi)$ *este discontinuă (la stînga) pentru* $\xi = \beta_0^*$.

Într-adevăr, fie ξ_0 un număr ordinal limită (la stînga) de numere ξ din intervalul $0 < \xi < \beta_0$ și fie ξ_0 luat ca valoare a variabilei ξ.

Considerăm întîi cazul $\xi_0 < \beta_0^*$. Procedînd ca pentru demonstrația proprietății **6°**, $a°$ se vede că

$$\xi < \xi_0 \rightarrow \xi + \beta_0 = \beta_0,\ \xi_0 + \beta_0 = \beta_0, \tag{82}$$

deci

$$\lim_{\xi < \xi_0} (\xi + \beta_0) = \xi_0 + \beta_0$$

și $\varphi(\xi)$ este continuă în ξ_0 (la stînga).

Considerăm apoi cazul $\xi_0 > \beta_0^*$. Procedînd ca la demonstrația proprietății **6°**, c°, punem

$$\beta_0 = \beta_0^* r + \delta_0,\ 0 \leqslant \delta_0 < \beta_0^* \text{ și } \xi_0 = \beta_0^* q + \delta_1,\ 0 \leqslant \delta_1 < \beta_0^*, \tag{83}$$

iar $\xi < \beta_0 \rightarrow q \leqslant r$, unde $1 \leqslant r < \omega$ și $q \geqslant 1$ sau $q = 0$, iar în acest ultim caz $\delta_1 > 0$.

Cum ξ_0 este de specia doua, rezultă că δ_1 — ca rest al lui ξ_0 — este de asemenea de specia doua sau zero.

Fie $\delta_1 > 0$. Punînd $\xi_1 = \beta_0^* q$, rezultă din (83) că $\xi_1 < \xi_0$. Să considerăm acele numere ordinale ξ', care satisfac relația

$$\xi_1 < \xi' < \xi_0 \tag{84}$$

și fie M' mulțimea lor.

Se vede ușor că pentru $\xi' \in M'$ avem

$$\xi' = \beta_0^* q + \delta',\qquad 0 \leqslant \delta' < \delta_1. \tag{85}$$

Din (84), (85) deducem direct

$$\xi_1 + \beta_0 \leqslant \xi' + \beta_0 \leqslant \xi_0 + \beta_0. \tag{86}$$

Fie M mulțimea numerelor ordinale, care satisfac relația $\xi < \xi_0$; atunci ξ_0 este limită (la stînga) a numerelor $\xi \in M$.

Considerînd mulțimile M și M', ordonate în sensul crescător al numerelor ordinale care le aparțin ca elemente, este clar că M și $M' \subset M$ sînt *cofinale* [1]).

Numerele variabile $\xi + \beta_0$ și $\xi' + \beta_0$ tind, în sens crescător, către $\xi_0 + \beta_0$, ceea ce se poate pune în evidență, ținînd seama de (83), (85) și folosind proprietatea de absorbție ca în demonstrația proprietății **6°**,c°, astfel:

$$\xi' + \beta_0 = \beta_0^* (q + r) + \delta_0 = \xi_0 + \beta_0,$$

de unde rezultă

$$\lim_{\xi < \xi_0} (\xi + \beta_0) = \lim_{\xi' < \xi_0} (\xi' + \beta_0) = \xi_0 + \beta_0$$

și deci $\varphi(\xi)$ este continuă în ξ_0 la stînga.

---

[1]) Aceasta înseamnă că în M nu există nici un element ξ, număr ordinal, *după* toate elementele din M', adică mai mare ca fiecare număr ordinal ξ', ceea ce este evident în baza definițiilor lui M, M'. Pentru cofinalitate și proprietățile ei, se poate vedea și [1], p. 118.

Fie $\delta_1 = 0$, atunci, cum s-a văzut, $q \geqslant 1$. Punînd $\xi_1 = \beta_0^* (q-1)$ rezultă din (83) că $\xi_1 < \xi_0$. Să considerăm pe acei ξ', care satisfac (85). Se vede ușor că avem

$$\xi' = \beta_0^* (q-1) + \delta'', \quad 0 \leqslant \delta'' < \beta_0^* \tag{87}$$

și raționamentul precedent, unde (85) se înlocuiește cu (87), este valabil, ducînd la aceeași concluzie.

Considerăm, în sfîrșit, cazul $\xi_0 = \beta_0^*$. Avem

$$\beta_0 = \beta_0^* r + \delta_0, \qquad 0 \leqslant \delta_0 < \beta_0^*, \qquad 1 \leqslant r < \omega. \tag{88}$$

Procedînd ca la demonstrația proprietății **6°**,a°, avem, prin absorbție,

$$\xi < \xi_0 \to \xi < \beta_0 \to \xi + \beta_0 = \xi + \beta_0 r + \delta_0 = \beta_0^* r + \delta_0 = \beta_0. \tag{89}$$

Or, ținînd seama de egalitatea, verificată prin absorbție,

$$\delta_0 + \beta_0^* = \beta_0^*$$

rezultă

$$\xi_0 + \beta_0 = \beta_0^* + \beta_0^* r + \delta_0 = \beta_0^* (1 + r) + \delta_0 = \beta_0^* (r + 1) + \delta_0 = (\beta_0^* r + \delta_0) + \\ + (\beta_0^* + \delta_0) = \beta_0 + (\beta_0^* + \delta_0)$$

și prin urmare

$$\beta_0^* > 0 \to \beta_0^* + \delta_0 > 0 \to \beta_0 < \beta_0 + (\beta_0^* + \delta_0) = \xi_0 + \beta_0. \tag{90}$$

Așadar, din (89), urmează că

$$\lim_{\xi < \xi_0} (\xi + \beta_0) = \beta_0.$$

și împreună cu relația (90), se obține

$$\lim_{\xi < \xi_0} (\xi + \beta_0) < \xi_0 + \beta_0$$

și $\varphi(\xi)$ este discontinuă (la stînga) în ξ_0, ceea ce completează și confirmă rezultatele enunțate.

§ 6. Suma ordinală transfinită, ca funcție multiformă de numărul termenilor

1. Să considerăm suma ordinală transfinită

$$\rho(\zeta) = \sum_{\alpha < \zeta} \beta_{i_\alpha}, \qquad i_\alpha \in \mathfrak{T},$$

ca o funcție ordinală multiformă de ζ, funcție ale cărei valori pentru ζ dat vor depinde în general, de permutarea ordinală (P) a indicilor i_α dați [1]). Avem următoarea proprietate:

10°. *Cînd în suma ordinală transfinită*

$$\rho_n(\zeta) = \sum_{\alpha < \zeta} \beta_\alpha, \tag{91}$$

[1]) Pentru cazul $\zeta = \omega$, a se vedea și rezultatele obținute de W. Sierpinski [5].

termenii β_α *sînt numere naturale, nu toate egale cu 1 și satisfăcînd relația* [1])

$$\beta_\alpha < n < \omega, \tag{92}$$

pentru n dat, avem

$$\rho_n(\zeta) = \zeta \text{ sau } \zeta < \rho_n(\zeta) < \zeta + \omega, \tag{93}$$

după cum ζ *este un număr ordinal limită, respectiv un număr ordinal izolat.*

Să punem într-adevăr $\beta_\alpha = n_\alpha$, unde n_α sînt numere naturale, mai mici ca n dat, oricare ar fi $\alpha < \zeta$.

Examinăm mai întîi următoarele cazuri particulare simple:

1. Fie $\zeta = \omega$. Avem

$$\rho_n(\omega) = n_0 + n_1 + \ldots + n_p + \ldots = \omega. \tag{94}$$

2. Fie $\zeta = p < \omega$. Avem

$$\rho_n(p) = n_0 + n_1 + \ldots + n_\alpha + \ldots + n_{p-1}, \quad \alpha < p. \tag{95}$$

Punînd

$$n > \sup \{n_1, n_2, \ldots, n_\alpha, \ldots, n_{p-1},\}$$

avem

$$1 \leqslant n_\alpha < n < \omega.$$

Rezultă din (94), unde prin ipoteză s-a presupus implicit că există cel puțin un α, astfel ca să avem $n_\alpha > 1$,

$$p = 1 \cdot p < \rho_n(p) < np < \omega,$$

adică

$$p < \rho_n(p) < \omega. \tag{96}$$

Să trecem la cazurile generale.

Fie ζ un număr limită. Avem, din împărțirea sa (la stînga) cu ω,

$$\zeta = \omega\zeta_1, \qquad \zeta_1 \leqslant \zeta.$$

Vom folosi definiția produsului și sumei de numere ordinale. Fie

$$\rho_n(\zeta) = \sum_{\alpha < \omega\zeta_1} \beta_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots$$

Or, un număr ordinal α se poate pune în mod unic sub forma

$$\alpha = \omega_\upsilon + \lambda, \qquad 0 \leqslant \lambda < \omega, \ \nu \leqslant \alpha.$$

Punem, însumînd în raport cu λ,

$$\rho_\upsilon(\omega) = \sum_{\lambda < \omega} \beta_{\omega\nu + \lambda}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots$$

și avem, însumînd în raport cu ν,

$$\rho_n(\zeta) = \sum_{\nu < \zeta_1} \rho_\nu(\omega) \qquad \nu = 0, 1, \ldots \tag{97}$$

Dar cum $\beta_\alpha < \omega$, putem nota, pentru fiecare α

$$\beta_\alpha = n_\alpha,$$

unde n_α este un număr natural.

---

[1]) Se exclude cazul banal $\beta_\alpha = 1$, oricare ar fi α cînd $\rho_n(\xi) = \xi$

Obținem deci, ținînd seama de (94),

$$\rho_\nu(\omega) = \omega$$

și deci, în (97) termenii sumei fiind egali cu ω, avem

$$\rho_n(\zeta) = \omega\,\zeta_1 = \zeta, \tag{97*}$$

ceea ce verifică prima relație enunțată (93).

Fie ζ un număr izolat. Avem, din împărțirea sa (la stînga) cu ω,

$$\zeta = \omega\,\zeta_1 + p, \quad 0 < p < \omega, \quad \zeta_1 \leqslant \zeta. \tag{98}$$

Să punem

$$\rho_n(p) = \sum_\lambda \beta_{\omega\zeta_1+\lambda}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, p$$

și

$$\beta_\alpha = n_\alpha,$$

număr natural. Rezultă atunci, ca și în cazul 2), presupunînd că nu avem $n_\alpha = 1$, pentru fiecare α,

$$p < \rho_n(p) < \omega = p + \omega.$$

Procedînd, ca mai sus, obținem din (98), folosind rezultatul respectiv (97),

$$\rho_n(\zeta) = \omega\,\zeta_1 + \rho_n(p),$$

de unde, împreună cu dubla inegalitate precedentă rezultă

$$\omega\,\zeta_1 + p < \rho_n(\zeta) < (\omega\,\zeta_1 + p) + \omega,$$

adică

$$\zeta < \rho_n(\zeta) < \zeta + \omega. \qquad \text{q.e.d.}$$

Observații. a) Proprietățile precedente nu își pot menține, în general, valabilitatea cînd s-ar presupune $\beta_\alpha \leqslant \omega$. Notăm atunci

$$\rho^0_\omega(\zeta) = \sum_{\alpha<\zeta} \beta_\alpha, \quad \beta_\alpha \leqslant \omega,$$

Să dovedim aserțiunea noastră, pe rînd, după cum avem:

a_1) ζ este un număr limită;

a_2) ζ nu este un număr limită.

Luînd, de pildă, $\beta_\alpha = \omega$, oricare ar fi α, avem

$$\rho^0_\omega(\zeta) = \omega\zeta. \tag{99}$$

a_1) Fie $\zeta = \omega$ (număr limită); obținem

$$\rho^0_\omega(\zeta) = \omega^2 \neq \omega = \zeta,$$

ceea ce contrazice prima relație (93).

a_2) Fie $\zeta = p$, unde $1 \leqslant p < \omega$ (număr izolat, natural); obținem

$$\rho^0_\omega(\zeta) = \omega\,p \geqslant \omega = p + \omega = \zeta + \omega,$$

contrar celei de a doua relații (93).

b) Dacă în **10°**, s-ar admite $\beta_0 < \omega$, în loc de $\beta_\alpha < n < \omega$, rezultatele se mențin și obținem deci următoarea extindere a lor:

10°*. *Cînd în suma ordinală transfinită* (92) *termenii sînt numere naturale, prima respectiv a doua din relațiile* (93) *sînt valabile, după cum* ζ *este sau nu un număr limită* (adică un multiplu la dreapta al lui ω).

Condiția (92) din **10°**, fiind înlocuită cu

$$\beta_\alpha < \omega,$$

fiecare β_α este un număr natural și rezultatele (94) pentru $\zeta = \omega$, respectiv (96) pentru $\zeta = p$, se mențin în mod evident, deci restul raționamentului în **10°** fiind bazat exclusiv pe rezultatele respective, condițiile (93) se mențin.

c) Propoziția **10°** se va extinde la cazurile mult mai generale **11°**, pe cînd **10°*** nu se poate extinde, cum se arată în observațiile, atașate propoziției **11°** de mai jos, ceea ce justifică prezentarea separată a propozițiilor **10°** și **10°***.

2. Să numim *supra-nedescomponibil* orice număr ordinal $\sigma \geqslant \omega$, care absoarbe un factor oarecare la stînga, mai mic ca el, adică

$$\lambda < \sigma \rightarrow \lambda\sigma = \sigma. \tag{99*}$$

Proprietăți. a) Să arătăm întîi că: *Orice număr supra-nedescomponibil* σ *este nedescomponibil.*

Într-adevăr, din

$$\sigma \geqslant \omega \rightarrow \sigma = \omega + \delta,\ \delta \geqslant 0 \rightarrow 1 + \sigma = 1 + \omega + \delta = \omega + \delta = \sigma.$$

Fie un λ oarecare, satisfăcînd inegalitatea $\lambda < \sigma$. Avem, ținînd seamă de (99*),

$$\lambda < \sigma \rightarrow \lambda + \sigma = \lambda + \lambda\sigma = \lambda(1 + \sigma) = \lambda\sigma = \sigma.$$

Dar relația $\lambda + \sigma = \sigma$, oricare ar fi $\lambda < \sigma$, arată că σ este nedescomponibil și deci se poate scrie sub forma

$$\sigma = \omega^\mu. \tag{100}$$

Să dăm lui $\lambda < \sigma$ în (99*) valorile ω^ν, unde ν este un număr ordinal oarecare mai mic ca μ. Avem, din (99*),

$$\lambda\sigma = \omega^\nu \cdot \omega^\mu = \omega^{\nu+\mu} = \sigma = \omega^\mu,$$

deci în virtutea unicității exponentului, rezultă

$$\nu + \mu = \mu \tag{101}$$

și cum $\nu < \mu$ este oarecare rezultă că μ este nedescomponibil și se poate scrie deci

$$\sigma = \omega^{\omega^\gamma}, \tag{102}$$

condiție necesară ca σ să fie supra-nedescomponibil.

b) Să dovedim reciproc, că:

Orice număr σ, *de forma* ω^{ω^γ} *este supra-nedescomponibil*, adică, satisface egalitatea $\lambda\sigma = \sigma$, oricare ar fi $\lambda < \sigma$ (99*).

Într-adevăr, fie λ nedescomponibil și $\lambda < \sigma$; el se poate scrie în acest caz sub forma

$$\lambda = \omega^\delta, \qquad \delta < \omega^\gamma$$

și deci cum ω^γ este nedescomponibil, $\delta + \omega^\gamma = \omega^\gamma$, astfel încît rezultă

$$\lambda\sigma = \omega^\delta \cdot \omega^{\omega^\gamma} = \omega^{(\delta+\omega^\gamma)} = \omega^{\omega^\gamma} = \sigma. \tag{103}$$

Or, un număr ordinal λ poate fi scris totdeauna ca sumă ordinală necrescătoare de un număr finit p de numere nedescomponibile ($p < \omega$),

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p,$$

unde

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_p,$$

astfel încît avem

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p \leqslant \lambda_1 p. \tag{104}$$

Cînd λ este nedescomponibil $p = 1$, adică $\lambda = \lambda_1$.

Aşadar deoarece $p \leqslant \omega \leqslant \sigma$, avem

$$p\,\sigma \leqslant \omega\,\sigma = \omega.\,\omega^{\omega^\gamma} = \omega^{(1+\omega^\gamma)} = \omega^{\omega^\gamma} = \sigma$$

şi cum ω, λ_1 sînt nedescomponibile, din rezultatul precedent (103) rezultă că $\omega\,\sigma = \sigma$, $\lambda_1\,\sigma = \sigma$, astfel încît

$$\sigma \leqslant \lambda\,\sigma \leqslant \lambda_1.\,p\,.\,\sigma \leqslant \lambda_1.\,\omega.\,\sigma = \lambda_1\,\sigma = \sigma,$$

de unde se obţine iar

$$\lambda\ \sigma = \sigma,$$

şi în cazul cînd λ este descomponibil.

3. Procedăm la extinderea rezultatelor precedente.

11°. *Cînd termenii β_α ai sumei ordinale transfinite*

$$\rho_\lambda(\zeta) = \sum_{\alpha < \zeta} \beta_\alpha, \tag{105}$$

satisfac inegalităţile $\beta_\alpha < \lambda < \sigma$,[1]*), unde λ este dat, iar σ este un număr supranedescomponibil, avem — după cum $\zeta > 0$ este sau nu un multiplu (la dreapta) de σ,*

$$\rho_\lambda(\zeta) = \zeta \text{ sau } \zeta < \rho_\lambda(\zeta) < \zeta + \sigma. \tag{106}$$

Examinăm mai întîi următoarele cazuri particulare simple

a) Fie $\zeta = \sigma$, atunci

$$\rho_\lambda(\sigma) = \sum_{\alpha < \sigma} \beta_\alpha \to \sigma \leqslant \rho_\lambda(\sigma) \leqslant \lambda\,\sigma = \sigma$$

şi deci

$$\rho_\lambda(\sigma) = \sigma. \tag{107}$$

b) Fie $\zeta < \sigma$; să arătăm că în acest caz, avem

$$\rho_\lambda(\zeta) = \sum_{\alpha < \zeta} \beta_\alpha \to \zeta < \rho_\lambda(\zeta) \leqslant \lambda\,\zeta < \sigma, \tag{108}$$

primul semn de inegalitate fiind strict, numai deoarece se presupune implicit[2]) că nu avem $\beta_\alpha = 1$, oricare ar fi α.

Să dovedim, într-adevăr, în prealabil că avînd $\lambda < \sigma$, $\zeta < \sigma$, rezultă $\lambda\,\zeta < \sigma$.

Se ştie că $\sigma = \omega^{\omega^\gamma}$, (102), pentru un γ convenabil. Vom aplica formula generală (104), care dă pentru λ oarecare

---

[1]) Se exclude implicit cazul banal $\beta^\alpha = 1$, oricare ar fi α, cînd $\rho_\lambda(\zeta) = \zeta$.

[2]) Vezi a doua notă din josul paginii 26.

$$\lambda \leqslant \lambda_1 p, \qquad \lambda_1 \leqslant \lambda, \qquad p < \omega,$$

unde λ_1 este nedescomponibil.

Fie $\lambda < \sigma$, deci $\lambda_1 < \sigma$. Ca număr nedescomponibil, λ_1 satisface așadar o relație de forma $\lambda_1 = \omega^\delta$, unde din $\lambda_1 < \sigma$, rezultă $\delta < \omega^\gamma$ și deci

$$\lambda \leqslant \omega^\delta p, \qquad \delta < \omega^\gamma, \qquad p < \omega.$$

Cum $\zeta < \sigma$, rezultă în mod asemănător și cu notații apropriate

$$\zeta \leqslant \omega^\varepsilon q, \qquad \varepsilon < \omega^\gamma, \qquad q < \omega.$$

În baza inegalităților precedente și deoarece $p, q < \omega$, găsim — ținînd seama că înmulțirea numerelor ordinale este asociativă —

$$\lambda\,\zeta \leqslant \omega^\delta \cdot p \cdot \omega^\varepsilon \cdot q \leqslant \omega^{\delta+1} \cdot \omega^{\varepsilon+1} = \omega^{(\delta+1)+(\varepsilon+1)} \tag{109}$$

Dar ω^γ fiind un număr limită, avem

$$(\delta + 1) + (\varepsilon + 1) < \delta + \omega^\gamma = \omega^\gamma. \tag{110}$$

Într-adevăr, $\delta < \omega^\gamma$, iar ω^γ este nedescomponibil și absoarbe la adunare pe δ de la stînga sa. Mai mult, inegalitatea (110) este strictă, căci ω^γ este nedescomponibil, iar $\delta, 1 + \varepsilon + 1$ sînt strict inferioare lui ω^γ. Obținem deci

$$(\delta + 1) + (\varepsilon + 1) < \omega^\gamma,$$

ceea ce împreună cu (109) dă

$$\lambda\,\zeta < \sigma, \tag{111}$$

adică ce era de dovedit. Prin urmare inegalitatea în restul ei evidentă (108) devine

$$\zeta < \rho_\lambda(\zeta) < \sigma,$$

precum s-a enunțat.

Din cele două cazuri considerate, deducem relațiile generale (106), astfel: Din împărțirea (la stînga) a lui ζ cu σ obținem

$$\zeta = \sigma\,\zeta_1 + \zeta_2, \qquad 0 \leqslant \zeta_2 < \sigma.$$

Deci, cînd $\zeta_2 = 0$, avem — ținînd seama de (105) și (107)

$$\rho_\lambda(\zeta) = \rho_\lambda(\sigma) \cdot \zeta_1 = \sigma \cdot \zeta_1 = \zeta, \tag{112}$$

iar cînd $\zeta_2 > 0$, avem — ținînd seama de (105, (111) —

$$\rho_\lambda(\zeta) = \rho_\lambda(\sigma) \cdot \zeta_1 + \rho_\lambda(\zeta_2) = \sigma \cdot \zeta_1 + \rho_\lambda(\zeta_2)$$

și deci ținînd seama de (108), cum $\zeta_2 < \sigma$ și σ fiind nedescomponibil, $\zeta_2 + \sigma = \sigma$, iar $\rho_\lambda(\zeta_2) > \zeta_2$, de unde

$$\zeta = \sigma\,\zeta_1 + \zeta_2 < \rho_\lambda(\zeta) < \sigma\,\zeta_1 + \sigma = \sigma\,\zeta_1 + \zeta_2 + \sigma = \zeta + \sigma.$$

Rezultă așadar

$$\zeta < \rho_\lambda(\zeta) < \zeta + \sigma. \qquad \text{q.e.d.} \tag{113}$$

Observații. a) Proprietățile precedente nu își mențin, în general, valabilitatea, oricare ar fi $\sigma > \omega$, cînd se presupune

$$\beta_\alpha \geqslant \sigma,$$

cazul $\sigma = \omega$ fiind deja verificat.

Punem, în acest caz,

$$\rho_\sigma^0(\zeta) = \sum_{\alpha<\zeta} \beta_\alpha, \qquad \beta_\alpha \leqslant \sigma.$$

Să dovedim deci pe rînd această afirmație, după cum:
a_1) ζ este un multiplu (la dreapta) nenul al lui σ;
a_2) ζ nu este un multiplu (la dreapta) al lui σ.
Luînd, de pildă, $\beta_\alpha = \sigma$, oricare ar fi α, avem

$$\rho_\sigma^0(\zeta) = \sigma\zeta. \tag{114}$$

a_1) Fie $\zeta = \sigma$; obținem din (114)

$$\rho_\sigma^0(\zeta) = \sigma^2 \neq \sigma = \zeta,$$

inegalitatea rezultînd imediat din expresia lui $\sigma = \omega^{\omega^\gamma}$, $\gamma > 0$, prin substituire și din faptul că ω^ξ este o funcție crescătoare de ξ,[1]).

Astfel, nu se mai verifică, prima relație (106).

a_2) Fie $\zeta < \sigma$, atunci ζ nu este multiplu de σ și nu putem avea

$$\rho_\sigma^0(\zeta) = \sigma\zeta < \zeta + \sigma = \sigma,$$

(σ fiind nedescomponibil) cum ar cere (106), deoarece avem, dimpotrivă, pentru $\zeta > 0$,

$$\sigma\zeta \geqslant \sigma.$$

b) S-a văzut în **10°*** că, pentru verificarea relațiilor (106), dacă $\sigma = \omega$, este suficientă condiția $\beta_\alpha < \sigma$, în loc de $\beta_\alpha < \lambda < \sigma$, pentru λ fix (relațiile (106) confundîndu-se atunci cu relațiile (93), în mod corespunzător).

Ne propunem să arătăm aici, că dacă $\sigma > \omega$, nu se poate înlocui, în general, condiția $\beta_\alpha < \lambda < \sigma$, cu cealaltă (mai largă) $\beta_\alpha < \sigma$.

Notăm

$$\rho_\sigma^0(\zeta) = \sum_{\alpha<\zeta} \beta_\alpha, \qquad \beta_\alpha < \sigma. \tag{115}$$

Într-adevăr, să presupunem că în (105) se admite numai $\beta_\alpha < \sigma$ și să dovedim afirmația precedentă, pe rînd, după cum:
b_1) ζ este un multiplu (la dreapta) nenul al lui σ;
b_2) ζ nu este multiplu (la dreapta) al lui σ.
b_1) Luăm, de pildă, $\zeta = \sigma$ și $\beta_\alpha = \omega^\alpha$, unde $\alpha < \zeta = \sigma$. Avem[1]) relația, valabilă deoarece σ ca număr nedescomponibil este de specia doua:

$$\omega^\sigma = \sum_{\alpha<\sigma} \omega^\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots$$

și deci (115) ne dă

$$\rho_\sigma^0(\zeta) = \omega^\sigma,$$

în timp ce (106) ar cere ca $\rho_\sigma^0(\zeta) = \zeta$, deoarece $\zeta = \sigma$ este un multiplu, la dreapta, al lui σ. Or nu putem avea

$$\omega^\sigma = \sigma,$$

ceea ce confirmă aserțiunea.

---

[1]) A se vedea, de exemplu [6], p. 199–200.

b_2) Luăm, de pildă, $\zeta = \delta$, unde $\delta = \omega^\gamma$ şi $\sigma = \omega^\delta$. Or δ este de specia doua, căci $\gamma > 0$ (pentru $\gamma = 0$, $\delta = 1$ şi $\sigma = \omega$, caz deja examinat) şi prin urmare, avem

$$\omega^\delta = \sum_{\alpha < \delta} \omega^\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots \tag{116}$$

Fie acum $\beta_\alpha = \omega^\alpha$. În acest caz avem

$$\rho_\sigma^0(\zeta) = \omega^\delta, \tag{117}$$

precum rezultă din (116).

Deci $\zeta = \delta < \sigma$, căci $\delta = \omega^\gamma < \omega^{\omega^\gamma}$, $(\gamma > 0)$ şi deci relaţia (106) ar cere

$$\rho_\sigma^0(\zeta) < \zeta + \sigma = \delta + \sigma = \sigma, \tag{118}$$

căci σ ca nedescomponibil absoarbe pe $\delta < \sigma$, adunat la stînga lui σ. Or, (118) este absurd, cînd se ţine seama de (117), deoarece $\sigma = \omega^\delta$ şi nu putem avea $\sigma < \sigma$.

ОБ УПОРЯДОЧЕННЫХ ОБЪЕДИНЕНИЯХ МНОЖЕСТВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

1°. Пусть $\mathfrak{F}$ семейство упорядоченных множеств A_i, где $i \in \mathfrak{J}$. Если в $R = \bigcup A_i$ порядок в каждом слагаемом A_i индуцируется собственным порядком A_i, то говорят, что R упорядоченное объединение A_i, обозначаемое $R = \overset{o}{\bigcup} A_i$ (1). Если кроме того, $\mathfrak{F}$ состоит из непересекающихся множеств и если в R между $x \in A_i$ и $x' \in A_i$ не существует $y \in A_j$, когда $j \neq i$, то R канторово объединение A_i, обозначаемое $R = \overset{c}{\bigcup} A_i$(2), а $\mathfrak{J}$ — упорядочивающее множество R.

2°. Пусть R данное множество, $P \in A \subset R$, $p \in P$, $p_1 \in P$, $x \in R$. Если все x, заключенные между p и p_1 в R, принадлежат A, то говорят, что P (целый) A участок в R; если все P вполне упорядочены, то A нормально. Отмечается, что: A является канторовым объединением своих участков в R. Всякое упорядоченное объединение R (1) множеств $A_i \in \mathfrak{F}$ есть канторово объединение участков A_i в R.

3°. Пусть R определена в (1), $\mathfrak{F}$ состоит из непересекающихся множеств, всякое A_i не пусто и нормально в R; тогда говорят, что R нормально. В таком случае, если во всяком A_i из $\mathfrak{F}$ выбрать первый элемент a_i одного из участков A_i, то множество всех a_i есть инициальная выборка из $\mathfrak{F}$. Тогда: если R (1) нормально, то, для того чтобы оно было вполне упорядоченным необходимо и достаточно, чтобы каждая инициальная выборка из $\mathfrak{F}$ была вполне упорядоченной (условие, удовлетворяющееся в особенности в отношении всех конечных $\mathfrak{J}$).

4°. Пусть $\mathfrak{J}$ вполне упорядочено, тогда R «порядковое объединение» вполне упорядоченных B_α, когда $R = \overset{c}{\bigcup_{\alpha < \gamma}} B_\alpha$, где $\gamma = \overline{\mathfrak{J}}$ (порядковый тип $\mathfrak{J}$) и $\alpha = 1, 2, \ldots$, что составляет последовательность (3) возрастающих $\alpha < \gamma$.

Положим $\rho = \overline{R}$; и тогда $\rho = \sum_{\alpha < \gamma} \beta_\alpha$ (4) — сумма порядковых чисел β_α для трансфинитной последовательности (3) индексов α.

Рассматривая класс φ порядковых перестановок (P) последовательности (3), определяем общую задачу изучения множества ρ из (4), когда для φ сохраняется порядковый тип из (3). Приводим некоторые результаты.

5°. Считая порядковое число α неразложимым, когда $\alpha = \beta + \gamma$, $0 < \beta < \alpha$, $0 < \gamma < \alpha$ невозможно, формулируем:

Пусть β_0, β_1, такие порядковые числа, что $\beta_0 > \beta_1 > 0$ и β_0^* наибольшее порядковое число $\leqslant \beta_0$; δ_0, δ_1 остатки β_0 соответственно β_1 в соотношениях $\beta_0 = \beta_0^* \lambda_0 + \delta_0$, $(0 \leqslant \beta_0 < \delta_0^*)$ соответственно $\beta_1 = \beta_0^* \lambda_1 + \delta_1$, $(0 \leqslant \delta_1 < \beta_0^*)$

(5.1). Свойство: если $\beta_1 < \beta_0^* \rightarrow$ (I): $\beta_1 + \beta_0 < \beta_0 + \beta_1$; если $\beta_1 = \beta_0^* \rightarrow$ (II): $\beta_1 + \beta_0 = \beta_0 + \beta_1$; соответственно (III) $\beta_1 + \beta_0 > \beta_0 + \beta_1$ в зависимости от того, будет ли $\delta_0 = 0$, или $\delta_0 > 0$; если $\delta_1 > \beta_0^*$, то имеем (I) соответственно (II) соответственно (III), в зависимости от того, будет ли $\delta_0 < \delta_1$ или $\delta_0 = \delta_1$, или $\delta_0 > \delta_1$, причем в последнем случае λ_1 натуральное число $q \leqslant r$ и, кроме того, $\delta_0 > \delta_1$, $q = r \rightarrow$ (III).

(5.2). Свойство: для того чтобы иметь (II), необходимо и достаточно, чтобы существовало порядковое число $\beta_t > 0$ и такие натуральные числа $p_0 > p_1$, чтобы $\beta_0 = \beta_t p_0$, $\beta_1 = \beta_t p_1$.

6°. Имеют место также и следующие свойства (6.1, 6.2), когда, по меньшей мере, одно $\beta_\alpha > 1$, то

(6.1). Пусть $\rho_n(\zeta) = \sum_{\alpha<\zeta} \beta_\alpha$. Если $\beta_\alpha < n < \omega$, где n фиксировано, то $\rho_n(\zeta) = \zeta$, соответственно $\zeta < \rho_n(\zeta) < \rho + \omega$, в зависимости от того, является ли ζ предельным или изолированным порядковым числом.

Порядковое число $\sigma > 0$ называем вполне неразложимым, если для всякого $\lambda > 0$, $\lambda < \sigma$ имеем $\lambda\sigma = \sigma$. Всякое σ неразложимо и равно ω^{ω^γ} для некоторого подходящего $\gamma \geqslant 0$.

(6.2). Пусть $\rho_\lambda(\zeta) = \sum_{\alpha<\zeta} \beta_\alpha$. Если $\beta_\alpha < \lambda < \sigma$, где λ фиксировано, то имеем $\rho_\lambda(\zeta) = \zeta$ соответственно $\zeta < \rho_\lambda(\zeta) < \zeta + \sigma$, в зависимости от того, будет или не будет $\zeta > 0$ кратным справа для σ, то есть $\zeta = \sigma\zeta_1$, где ζ_1 подходящее порядковое число.

SUR LES RÉUNIONS ORDONNÉES D'ENSEMBLES

(RÉSUMÉ)

1° Soit $\mathfrak{F}$ une famille d'ensembles ordonnés A_i, où $i \in \mathcal{J}$. Si en $R = \cup A_i$, l'ordre de tout *composant* A_i est induit de l'ordre des A_i, on dit que R est *une réunion ordonnée des* A_i, notée par $R = \overset{o}{\cup} A_i$ (1). Si de plus, $\mathfrak{F}$ est disjointe et si, en R, il n'y a entre $x \in A_i$, $x' \in A_i$, aucun $y \in A_j$, lorsque $j \neq i$, R est *une réunion cantorienne* des A_i, notée par $R = \overset{c}{\cup} A_i$ (2) et $\mathcal{J}$ est *l'ensemble ordonnateur* de R.

2° Soient R un ensemble donné, $P \subset A \subset R$, $p \in P$, $p_1 \in P$, $x \in R$. Si tout x, compris entre p et p_1 en R appartient à A, on dira que P est *une portion (entière) de* A *en* R; si tout P est bien ordonné, A est *normal*. On note que: *A est une réunion cantorienne de ses portions en R. Toute réunion ordonnée R (1) des $A_i \in \mathfrak{F}$ est une réunion cantorienne des portions des A_i en R.*

3° Soient R défini en (1), $\mathfrak{F}$ disjointe, tout A_i non vide et normal en R, on dira alors que R est *normal*. Dans ce cas, si en tout A_i de $\mathfrak{F}$, on choisit le premier élément a_i de l'une des portions de A_i, l'ensemble des a_i est un *extrait initial* de $\mathfrak{F}$. Il y a: *Lorsque R (1) est normal, il est bien ordonné, à la condition, nécessaire et suffisante, que chaque extrait initial de $\mathfrak{F}$ soit bien ordonné*, (condition remplie, en particulier, par tout $\mathcal{J}$ fini).

4° Soit $\mathcal{J}$ bien ordonné, R est une «*réunion ordinale*» des B_α bien ordonnés, lorsque $R = \overset{c}{\bigcup\limits_{\alpha<\gamma}} B_\alpha$, où $\gamma = \overline{\mathcal{J}}$ (type d'ordre de $\mathcal{J}$) et $\alpha = 1, 2, \ldots$ — ce qui constitue la suite (3) des $\alpha < \gamma$ croissants.

Posons $\rho = \overline{R}$, il y a $\rho = \sum\limits_{\alpha<\gamma} \beta_\alpha$ (4), somme des nombres β_α ordinaux, pour la suite transfinie (3) des indices α.

En considérant la classe φ des permutations *ordinales* (P) de la suite (3), on définit le problème général de l'étude de l'ensemble des ρ, en (4) lorsque l'on conserve en φ le type ordinal de (3). En voici quelques résultats:

5° Un (nombre) ordinal α étant *indécomposable*, lorsque $\alpha = \beta + \gamma, 0 < \beta < \alpha$, $0 < \gamma < \alpha$ est absurde, on énonce:

Soient β_0, β_1 des ordinaux tels que $\beta_0 > \beta_1 > 0$ et β_0^* le plus grand ordinal $\leqslant \beta_0$; δ_0, δ_1 les restes de β_0, resp. β_1, dans les relations $\beta_0 = \beta_0^* \lambda_0 + \delta_0$, $(0 \leqslant \delta_0 < \beta_0^*)$, resp. $\beta_1 = \beta_0^* \lambda_1 + \delta_1$, $(0 \leqslant \delta_1 < \beta_0^*)$.

(5°, 1). *Propriété*: Si $\beta_1 < \beta_0^* \rightarrow$ (I): $\beta_1 + \beta_0 < \beta_0 + \beta_1$; si $\beta_1 = \beta_0^* \rightarrow$ (II): $\beta_1 + \beta_0 = \beta_0 + \beta_1$, resp. (III): $\beta_1 + \beta_0 > \beta_0 + \beta_1$ selon que $\delta_0 = 0$, resp. $\delta_0 > 0$; si $\beta_1 > \beta_0^*$, il y a (I), resp. (II), resp. (III), selon que $\delta_0 < \delta_1$, resp. $\delta_0 = \delta_1$ resp. $\delta_0 > \delta_1$ et, dans ce dernier cas, λ_1 est un nombre naturel $q \leqslant r$, de plus $\delta_0 > \delta_1$, $q = r \rightarrow$ (III).

(5°, 2) *Propriété*: Pour avoir (II), il faut et il suffit qu'il existe un ordinal $\beta_t > 0$ et des nombres naturels $p_0 > p_1$, tels que $\beta_0 = \beta_t p_0$, $\beta_1 = \beta_t p_1$.

6° Il y a aussi les propriétés suivantes (6°, 1, 6°, 2), lorsque au moins un $\beta_\alpha > 1$:

(6°, 1) Soit $\rho_n(\zeta) = \sum\limits_{\alpha<\zeta} \beta_\alpha$. Si $\beta_\alpha < n < \omega$, où n est fixe, il y a $\rho_n(\zeta) = \zeta$, resp. $\zeta < \rho_n(\zeta) < \rho + \omega$, selon que ζ est un ordinal limite, resp. isolé.

Appelons l'ordinal $\sigma > 0$ *bien-indécomposable*, si pour tout $\lambda > 0$, $\lambda < \sigma$, il y a $\lambda\sigma = \sigma$. Tout σ est indécomposable et égal, pour un certain $\gamma \geqslant 0$, convenable, à ω^{ω^γ}.

(6°, 2) Soit $\rho_\lambda(\zeta) = \sum\limits_{\alpha<\zeta} \beta_\alpha$. Si $\beta_\alpha < \lambda < \sigma$, où λ est fixe, il y a $\rho_\lambda(\zeta) = \zeta$, resp. $\zeta < \rho_\lambda(\zeta) < \zeta + \sigma$, selon que $\zeta > 0$ est, resp. n'est pas, un multiple à droite de σ, c.—à.—d. de la forme $\zeta = \sigma\zeta_1$, où ζ_1 est un ordinal convenable.

BIBLIOGRAFIE

1. Alexandrov P. S., *Vvedenie v obșciu teoriu mnojestvo i funcții*. Moscova, 1948.
2. Denjoy A., *L'insertion de nouveaux éléments dans un ensemble ordonné*. Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences, 1952, t. 4, p. 31—50.

3. Froda A., *Despre mulțimile extrase din familiile de mulțimi.* Bul. științ. Acad. R.P.R., secțiunea de științe matematice și fizice t. IV, nr. 4, octombrie-decembrie 1952, p. 701.
4. Neumer Walter, Archiv der Mathematik, 1954, t. 5, p. 244—248, citat după rezumatul din Mathematical Reviews, 16, p. 19, 1955.
5. Sierpinski W., *Sur les séries infinies de nombres ordinaux.* Fundamenta Mathematicae, 1949, t. 36, p. 248—253.
6. — *Leçons sur les nombres transfinis.* Paris, 1928.
7. Wakulicz A., *Sur la somme d'un nombre fini de nombres ordinaux,* Fundamenta Mathematicae, 1949, t. 36, p. 254—266.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 1–2, 1956

TEORIA LOCALĂ A NUMERELOR IDEALE DUPĂ ZOLOTAREV ÎN CAZUL ÎNTREGILOR LUI DIRICHLET *)

DE

CONSTANTIN P. POPOVICI

1. În această lucrare studiem proprietăţile întregilor lui Dirichlet utilizînd metoda dată de Zolotarev [8], dezvoltată de Cebotarev [1]. Expunerea ce urmează urmăreşte îndeaproape expunerea, din lucrarea acad. Gr. C. Moisil [5], a aceleiaşi teorii în cazul întregilor pătratici.

Vom reaminti, acum, pe scurt, noţiunile pe care le vom folosi în cele ce urmează.

Mulţimea numerelor de forma

$$\Omega = \alpha + \beta \sqrt{\delta},$$

în care δ este un întreg al lui Gauss ($\delta = x + iy$, iar x şi y, sînt întregi raţionali), fără factori pătrate perfecte, iar α şi β sînt numere complexe cu partea reală şi imaginară numere raţionale, verifică axiomele corpului şi este denumită corpul relativ pătratic $\Re\,(i, \sqrt{\delta})$.

Conjugatul relativ al lui Ω este numărul Ω^*:

$$\Omega^* = \alpha - \beta \sqrt{\delta}.$$

Avem următoarele proprietăţi

$$(\Omega_1 + \Omega_2)^* = \Omega_1^* + \Omega_2^*,$$

$$(\Omega_1\, \Omega_2)^* = \Omega_1^*\, \Omega_2^*.$$

Norma relativă a lui Ω este numărul complex $N_r(\Omega)$ cu partea reală şi imaginară numere raţionale:

$$N_r(\Omega) = \alpha^2 - \delta\beta^2 = \Omega\, \Omega^*,$$

care are următoarele proprietăţi:

$$N_r(\Omega_1)\, N_r(\Omega_2) = N_r(\Omega_1\, \Omega_2),$$

$$N_r(\Omega^*) = N_r(\Omega).$$

Se observă că Ω verifică ecuaţia de gradul al II-lea

$$t^2 - 2\alpha t + \alpha^2 - \beta^2\delta = 0.$$

---

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 1 decembrie 1955.

Atunci cînd coeficienții 2α și $\alpha^2 - \beta^2\delta$ sînt întregi ai lui Gauss, mulțimea numerelor $\Omega = \alpha + \beta\sqrt{\delta}$ constituie un inel numit inelul întregilor lui Dirichlet, care se notează prin $\mathfrak{J}[i, \theta]$, deoarece este posibil, în acest caz, ca numerele din acest inel să fie puse sub forma

$$\Omega = \sigma + \tau\theta$$

cu σ și τ întregi ai lui Gauss, iar θ întreg al lui Dirichlet care depinde numai de δ. Perechea de numere $(1, \theta)$ formată din coeficienții lui σ și τ se numește baza întregilor lui Dirichlet. Vom utiliza următoarea bază, determinată de noi, într-o lucrare precedentă [6], printr-o metodă diferită de metodele din [5] și [2]:

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{\delta}}{2} \quad \text{dacă} \quad \delta \equiv 1 \pmod 4$$

$$\theta = \frac{i + \sqrt{\delta}}{2} \quad \text{dacă} \quad \delta \equiv 3 \pmod 4$$

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{\delta}}{1 + i} \quad \text{dacă} \begin{cases} \delta \equiv 1 + 2i \pmod 4 \\ \text{sau} \\ \delta \equiv 3 + 2i \pmod 4 \end{cases}$$

$\theta = \sqrt{\delta}$ în toate celelalte cazuri.

Această bază prezintă o deosebire neesențială față de baza din [6], deoarece în această din urmă pentru $\delta \equiv 3 \pmod 4$, am luat $\theta = \dfrac{1 + i\sqrt{\delta}}{2}$.

Divizibilitatea pentru întregii lui Dirichlet se definește astfel: întregul lui Dirichlet μ este divizibil prin întregul lui Dirichlet ν dacă există un întreg al lui Dirichlet ρ astfel ca să existe relația $\mu = \nu\rho$.

Unitățile din inelul întregilor lui Dirichlet sînt întregii lui Dirichlet η care verifică, ecuațiile $N_r(\eta) = \pm 1, \pm i$.

Doi întregi ai lui Dirichlet μ și ν sînt asociați dacă este satisfăcută relația $\mu = \nu\eta$, η fiind o unitate; doi întregi ai lui Dirichlet asociați se divid unul pe celălalt.

Inelul întregilor lui Gauss este o submulțime a inelului întregilor lui Dirichlet.

Întregii lui Dirichlet, în raport cu un întreg dat Ω al lui Dirichlet pot fi grupați în clase de întregi, o clasă fiind formată din toți întregii lui Dirichlet care au proprietatea că diferența a doi dintre ei, luați la întîmplare, se divide prin Ω. Numărul claselor este egal cu $N_r(\Omega)$. $\overline{N_r(\Omega)}$, $\overline{N_r(\Omega)}$ fiind conjugatul numărului complex $N_r(\Omega)$. Mulțimea formată din reprezentanții fiecărei clase, reprezentantul unei clase fiind un element arbitrar din acea clasă, constituie un sistem complet de resturi modulo Ω.

2. Fie corpul $\mathfrak{R}(i, \sqrt{\delta})$, iar μ și ν doi întregi ai lui Dirichlet; atunci $\dfrac{\mu}{\nu} \in \mathfrak{R}(i, \sqrt{\delta})$ dacă $\nu \neq 0$; dar $\dfrac{\mu}{\nu} = \dfrac{\mu\nu^*}{\nu\nu^*} = \dfrac{\mu\nu^*}{N_r(\nu)}$ cu $N_r(\nu) \in \mathfrak{J}[i]$. Se observă,

deci, posibilitatea existenței unui întreg z al lui Gauss astfel încît $\frac{z\mu}{\nu}$ să fie un întreg al lui Dirichlet.

Fie π un întreg prim al lui Gauss. În legătură cu considerațiile de mai sus vom introduce *divizibilitatea în raport cu* π cu ajutorul următoarei definiții.

Întregul lui Dirichlet $\mu \in \Re(i, \sqrt{\delta})$ *este divizibil în raport cu* π *prin întregul lui Dirichlet* $\nu \in \Re(i, \sqrt{\delta})$ *dacă există un întreg al lui Gauss* z, *prim cu* π, *astfel încît* $z\mu$ *să fie divizibil prin* ν, *adică astfel încît* $\frac{z\mu}{\nu}$ *să fie un întreg al lui Dirichlet.*

Proprietățile divizibilității în raport cu π sînt asemănătoare cu cele ale divizibilității obișnuite:

1°. Dacă μ este divizibil prin ν, atunci μ este divizibil prin ν în raport cu orice număr prim π al lui Gauss.

Demonstrația constă în aceea că se poate lua, în definiția de mai sus, $z = 1$.

2°. Orice întreg al lui Dirichlet este divizibil în raport cu orice π prin el însuși.

Această proprietate este un caz particular al proprietății 1°.

3°. Dacă μ este divizibil în raport cu π prin ν, iar ν prin ρ, atunci μ este divizibil în raport cu π prin ρ.

Într-adevăr, din $z'\mu = \chi'\nu$, $z''\nu = \chi''\rho$, z' și z'' fiind primi cu π, deducem că $z'z''$ este prim cu π și obținem $z'z''\mu = \chi'z''\nu = \chi'\chi''\rho$, deci μ este divizibil în raport cu π prin ρ.

4°. Dacă μ și ν sînt divizibili în raport cu π prin γ atunci, oricare ar fi întregii lui Dirichlet σ și τ, $\sigma\mu + \tau\nu$ este divizibil în raport cu π prin γ.

Într-adevăr, din $z'\mu = \chi'\gamma$, $z''\nu = \chi''\gamma$, z' și z'' fiind primi cu π, deducem că $z'z''$ este prim cu π și obținem $z'(\sigma\mu) = (\chi'\sigma)\gamma$, $z''(\tau\nu) = (\chi''\tau)\gamma$, deci $z'z''[\sigma\mu + \tau\nu] = (z''\chi'\sigma + z'\chi''\tau)\gamma$. Prin urmare, $\sigma\mu + \tau\nu$ este divizibil în raport cu π prin γ oricare ar fi întregii lui Dirichlet σ și τ.

Așadar, avem următoarea

Teoremă 2.1. *Întregii lui Dirichlet, divizibili în raport cu* π *printr-un întreg al lui Dirichlet dat, formează un ideal.*

5°. Dacă μ este divizibil în raport cu π prin ν, atunci $N_r(\mu)$ este divizibilă în raport cu π prin $N_r(\nu)$, deoarece din $z\mu = \chi\nu$ se deduce $(z\mu)^* = \chi^*\nu^*$, deci $z\mu^* = \chi^*\nu^*$, prin urmare $z^2\mu\mu^* = \chi\chi^*\nu\nu^*$ sau $z^2 N_r(\mu) = N_r(\chi)\, N_r(\nu)$; z^2 este prim cu π, deoarece z este prim cu π.

6°. Dacă μ este divizibil în raport cu π prin ν, atunci

$$\mu \equiv 0 \ (\nu, \pi^g)$$

oricare ar fi întregul natural g.

Într-adevăr, dacă μ este divizibil în raport cu π prin ν, există z prim cu π astfel încît $z\mu = \chi\nu$; z fiind prim cu π există întregii lui Gauss h_g și k_g astfel încît $zh_g + k_g\pi^g = 1$, deci $\mu = z\mu\, h_g + k_g\mu\pi^g$ sau $\mu = (h_g\chi)\nu + (k_g\mu)\pi^g \in (\nu, \pi^g)$.

Teorema 2.2. *Dacă întregul lui Dirichlet* μ *este divizibil în raport cu* π *prin* π^e, *atunci* μ *este divizibil prin* π^e.

Demonstrația rezultă direct din 6° luînd $\nu = \pi^e$ și $g = e$.

Teorema 2.3. *Dacă* μ *este divizibil prin* ν *în raport cu toți divizorii primi ai normei relative a lui* ν *atunci* μ *este divizibil prin* ν.

Demonstrația poate fi dată în două moduri. Într-adevăr, fie $N_r(\nu)=\pi_1^{e_1}\ldots\pi_s^{e_s}$. Primul mod de a da demonstrația este acela de a considera existența întregului lui Gauss z_i prim cu π_i astfel încît să avem $\frac{z_i\,\mu}{\nu}=\chi_i\in\mathfrak{J}[i,\theta]$, deoarece, prin ipoteză, μ este divizibil prin ν în raport cu π_i, acesta fiind unul dintre divizorii primi ai normei relative $N_r(\nu)$. Fie z cel mai mare divizor comun al lui $z_1,\ldots,z_s$, atunci $z=h_1z_1+\ldots+h_sz_s$, iar din $h_i\frac{z_i\,\mu}{\nu}=h_i\,\chi_i\in\mathfrak{J}[i,\theta]$ deducem $\frac{z\,\mu}{\nu}=h_1\chi_1+\ldots+h_s\chi_s\in\mathfrak{J}[i,\theta]$. Dar z este prim cu oricare dintre $\pi_1,\ldots,\pi_s$ deoarece z divide pe z_i care este prim cu π_i, deci z este prim cu produsul $\pi_1^{e_1},\ldots\pi_s^{e_s}=N_r(\nu)$; atunci există întregii lui Gauss h și k astfel încît

$$hz+kN_r(\nu)=1,\quad\text{deci}\quad\frac{\mu}{\nu}=\frac{hz+kN_r(\nu)}{\nu}\mu=h\frac{z\,\mu}{\nu}+k\,\nu^*\mu\,\mathfrak{J}[i,\theta],$$

prin urmare μ este divizibil prin ν.

Al doilea mod de a da demonstrația este acela de a preciza, în legătură cu teorema 2.2, întregul lui Gauss z_i prim cu π_i pentru care are loc relația $\frac{z_i\,\mu}{\nu}\in\mathfrak{J}[i,\theta]$. În acest scop să considerăm

$$\frac{z_i\,\mu\nu^*}{\nu\nu^*}=\frac{z_i\,\mu\,\nu^*}{N_r(\nu)}\in\mathfrak{J}[i,\theta],$$

deci

$$\pi_1^{e_1}\ldots\pi_{i-1}^{e_{i-1}}\pi_{i+1}^{e_{i+1}}\ldots\pi_s^{e_s}\frac{z_i\,\mu\,\nu^*}{N_r(\nu)}=\frac{z_i\,\mu\,\nu^*}{\pi_i^{e_i}}\in\mathfrak{J}[i,\theta].$$

Prin urmare, $\mu\nu^*$ este divizibil prin $\pi_i^{e_i}$ în raport cu π_i, deci $\mu\nu^*$ este divizibil prin $\pi_i^{e_i}$; scriem atunci

$$\mu\nu^*=\pi_i^{e_i}\chi_i,\quad\text{iar}\quad\frac{z_i\,\mu\nu^*}{\nu\nu^*}=\frac{z_i\,\pi_i^{e_i}\chi_i}{\nu\nu^*}=\frac{z_i\,\chi_i}{\pi_1^{e_1}\ldots\pi_{i-1}^{e_{i-1}}\pi_{i+1}^{e_{i+1}}\ldots\pi_s^{e_s}}\in\mathfrak{J}[i,\theta].$$

Este, deci, suficient de a considera $z_i=\pi_1^{e_1}\ldots\pi_{i-1}^{e_{i-1}}\pi_{i+1}^{e_{i+1}}\ldots\pi_s^{e_s}$, care este prim cu π_i, pentru a avea $\frac{z_i\mu}{\nu}\varepsilon\,\mathfrak{J}[i,\theta]$. Dar întregii lui Gauss $z_1,\ z_2,\ldots,z_s$ sînt primi între ei, deci există întregii lui Gauss $h_1h_2,\ldots,h_s$ astfel încît $h_1z_1+h_2z_2+\ldots+h_sz_s=1$; atunci $h_i\frac{z_i\,\mu}{\nu}\in\mathfrak{J}[i,\theta]$, deci $(h_1z_1+h_2z_2+\ldots h_sz_s)\frac{\mu}{\nu}=\frac{\mu}{\nu}\in\mathfrak{J}[i,\theta]$, deci μ este divizibil prin ν.

Teorema 2.4. *Condiția necesară și suficientă ca μ să fie divizibil prin ν este ca, pentru orice număr prim π al lui Gauss, μ să fie divizibil în raport cu π prin ν.*

Condiția este necesară, deoarece dacă μ este divizibil prin ν, atunci μ este divizibil în raport cu π prin ν oricare ar fi numărul prim π al lui Gauss, după cum rezultă din proprietatea 1°. Condiția este suficientă, deoarece dacă, oricare ar fi întregul prim π al lui Gauss, μ este divizibil în raport cu π prin ν, atunci aceasta se întîmplă cu atît mai mult pentru divizorii primi ai lui $N_r(\nu)$ și deci, conform teoremei 2.3, μ este divizibil prin ν.

3. Unitățile în raport cu π le vom defini astfel:

Definiția 1. *O unitate în raport cu π este* orice întreg al lui Dirichlet care divide pe 1 în raport cu π.

Teorema 3.1. *Dacă υ este o unitate în raport cu π, atunci există doi întregi ai lui Dirichlet λ și ξ astfel încît*

$$\lambda\upsilon + \xi\pi = 1$$

și reciproc.

Într-adevăr, dacă υ este o unitate în raport cu π, putem scrie relația $z.1 = \chi\upsilon$, z fiind un întreg al lui Gauss prim cu π, deci există h, $k \in \mathfrak{d}[i]$ pentru care $hz + k\pi = 1$. Prin urmare cu $\lambda = h\chi$ și $\xi = k$ avem $\lambda\upsilon + \xi\pi = 1$. Reciproc, dacă $\lambda\upsilon + \xi\pi = 1$ atunci $\lambda^*\upsilon^* + \xi^*\pi = 1$, deci $N_r(\lambda).N_r(\upsilon) + (\lambda\upsilon\xi^* + \lambda^*\upsilon^*\xi + \xi\xi^*\pi)\pi = 1$.

Deoarece

$$\xi\xi^* \in \mathfrak{J}[i],\ \lambda\upsilon\xi^* + \lambda^*\upsilon^*\xi = (\lambda\upsilon\xi^*) + (\lambda\upsilon\xi^*)^* \in \mathfrak{J}[i]$$

rezultă că $N_r(\upsilon)$ este primă cu π; din $N_r(\upsilon).1 = \upsilon\upsilon^*$ deducem că 1 este divizibil în raport cu π prin υ, deci υ este o unitate în raport cu π.

Putem enunța teorema 3.1. și sub forma:

Teorema 3.2. *Condiția necesară și suficientă ca υ să fie o unitate în raport cu π este ca congruența*

$$\upsilon\lambda \equiv 1 \pmod{\pi}$$

să aibă soluții.

Teorema 3.3. *Condiția necesară și suficientă ca υ să fie o unitate în raport cu π este ca întregul lui Gauss $N_r(\upsilon)$ să fie prim cu π.*

Condiția este necesară, deoarece dacă υ este o unitate în raport cu π, atunci se poate scrie relația $z.1 = \chi\upsilon$, z fiind un întreg al lui Gauss prim cu π, deci $z^2 = N_r(\chi)N_r(\upsilon)$ de unde rezultă că $N_r(\upsilon)$ este primă cu π. Condiția este suficientă, deoarece dacă $N_r(\upsilon)$ este primă cu π, atunci $N_r(\upsilon).1 = \upsilon\upsilon^*$, deci υ este o unitate în raport cu π.

Vom da o altă definiție pentru unitățile în raport cu π.

Definiția 2. μ este o unitate în raport cu π dacă din $\omega\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$ deducem $\omega \equiv 0 \pmod{\pi}$. Vom dezvolta, mai întîi, proprietățile ce decurg din această definiție, iar apoi, vom arăta că aceste definiții sînt echivalente.

Teorema 3.4. *Dacă μ este o unitate în raport cu π după definiția 2, atunci există α astfel ca $\mu\alpha \equiv 1$ (mod. π).*

Într-adevăr, fie $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N^2(\pi)-1}$ un sistem complet de resturi modulo π. Unul din ei trebuie să fie zero; fie acesta α_0. Atunci, din sistemul de mai sus, eliminînd pe α_0 obținem sistemul complet de resturi nenule modulo π; $\mu\alpha_1, \mu\alpha_2, \ldots, \mu\alpha_{N^2(\pi)-1}$ nu sînt două cîte două congruente modulo π, deoarece dacă am avea $\mu\alpha_i \equiv \mu\alpha_j \pmod{\pi}$, atunci $\mu(\alpha_i - \alpha_j) \equiv 0 \pmod{\pi}$, iar μ fiind o unitate în raport cu π după definiția 2 atrage imediat $\alpha_i - \alpha_j \equiv 0 \pmod{\pi}$ contrar ipotezei făcute asupra sistemului α. De asemenea, nu putem avea $\mu\alpha_i \equiv 0$

(mod. π), deoarece atunci $\alpha_i \equiv 0 \pmod{\pi}$, μ fiind o unitate în raport cu π, ceea ce este contrar ipotezei că sistemul α este un sistem complet de resturi nenule modulo π. Deci $\mu\alpha_1$, $\mu\alpha_2, \ldots, \mu\alpha_{N^2(\pi)-1}$ formează un sistem complet de resturi nenule modulo π, deci conține și un element congruent cu 1.

Teorema 3.5. *Dacă există* $\alpha \in \mathfrak{J}[i, 0]$ *astfel ca* $\mu\alpha \equiv 1 \pmod{\pi}$, *atunci* μ *este o unitate în raport cu* π *după definiția 2*, deoarece, din $\mu\alpha \equiv 1 \pmod{\pi}$ și $\omega\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$ se deduce $\omega \equiv (\omega\mu)\,\alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Teorema 3.6. *Dacă* μ *este o unitate în raport cu* π, *după definiția 2 atunci* $N_r(\mu)$ *nu se divide prin* π, deoarece presupunînd contrariul avem $N_r(\mu) \equiv 0 \pmod{\pi}$ ceea ce înseamnă că $\mu^*\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$. Această congruență este înlăturată de ipoteza că μ este o unitate în raport cu π, deoarece, în acest caz, din $\mu^*\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$ rezultă că $\mu^* \equiv 0 \pmod{\pi}$ ceea ce atrage $\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$ sau $1 \cdot \mu \equiv 0 \pmod{\pi}$ care, datorită lui $1 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, contrazice faptul că μ este o unitate în raport cu π.

Teorema 3.7. *Dacă* $N_r(\mu)$ *nu se divide prin* π *atunci* μ *este o unitate în raport cu* π *după definiția 2*, deoarece dacă există un $\omega \in \mathfrak{J}[i, 0]$ astfel încît $\omega\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$, adică $\omega\mu = \gamma\pi$, atunci rezultă că $\omega \equiv 0 \pmod{\pi}$. Într-adevăr, $\frac{\omega}{\pi} = \frac{\gamma}{\mu}$ verifică ecuația

$$N_r(\mu)\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 - u'\left(\frac{\omega}{\pi}\right) + N_r(\gamma) = 0$$

cu $u' = \gamma\mu^* + \gamma^*\mu = (\gamma\mu^*) + (\gamma\mu^*)^* \in \mathfrak{J}[i]$, așadar această ecuație are coeficienții în $\mathfrak{J}[i]$. Deoarece ω este un întreg al lui Dirichlet, el verifică o ecuație de forma

$$\omega^2 - u''\omega + N_r(\omega) = 0$$

care se poate scrie $\pi^2\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 - u''\pi\left(\frac{\omega}{\pi}\right) + N_r(\omega) = 0$. Acum, deoarece $N_r(\mu)$ nu este divizibilă prin π, care este un întreg prim al lui Gauss, rezultă că $N_r(\mu)$ este primă cu π, deci și cu π^2, deci există întregii lui Gauss h și k astfel încît $hN_r(\mu) + k\pi^2 = 1$; prin urmare $\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2$ verifică ecuația

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 - (hu' + ku''\pi)\left(\frac{\omega}{\pi}\right) + (hN_r(\gamma) + kN_r(\omega)) = 0,$$

deci $\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$ este întreg al lui Dirichlet, prin urmare $\omega \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Deoarece condiția necesară și suficientă ca υ să fie o unitate în raport cu π este ca $N_r(\upsilon)$ să fie primă cu π, sau deoarece condiția necesară și suficientă ca υ să fie o unitate în raport cu π este ca să existe un întreg λ al lui Dirichlet cu $\upsilon\lambda \equiv 1 \pmod{\pi}$ au fost demonstrate și pentru definiția 1 și pentru definiția 2 înseamnă că cele două definiții sînt echivalente.

Teorema 3.8. *υ și υ^* sînt în același timp unități în raport cu π.*

Aceasta se obține din $N_r(\upsilon) = N_r(\upsilon^*)$ de unde rezultă că $N_r(\upsilon)$ și $N_r(\upsilon^*)$ sînt în același timp prime cu π.

Teorema 3.9. *O unitate în raport cu π divide în raport cu π orice întreg al lui Dirichlet*, pentru că dacă $z.1 = \chi\upsilon$, z fiind prim cu π, atunci $z\alpha = (\chi\alpha)\,\upsilon$, deci υ divide pe α în raport cu π.

Teorema 3.10. *Dacă* υ *este o unitate în raport cu* π, *atunci* $\upsilon\alpha$ *divide pe* α *în raport cu* π, deoarece din $z = \chi\upsilon$, z fiind prim cu π, deducem $z\alpha = \chi(\alpha\upsilon)$, deci $\upsilon\alpha$ divide pe α în raport cu π.

Teorema 3.11. *Condiția necesară și suficientă ca* η *să fie o unitate în* $\mathfrak{J}[i, \theta]$ *este ca* η *să fie o unitate în raport cu orice număr prim al lui Gauss.*

Într-adevăr, dacă η este o unitate în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, atunci $N_r(\eta) = \pm 1, \pm i$, deci $N_r(\eta)$ este primă cu orice număr prim al lui Gauss, deci η este o unitate în raport cu orice număr prim al lui Gauss. Reciproc, dacă η este o unitate în raport cu orice număr prim al lui Gauss, $N_r(\eta)$ este primă cu orice număr prim al lui Gauss, deci $N_r(\eta) = \pm 1, + i$, deci η este o unitate în $\mathfrak{J}[i, \theta]$.

4. Vom spune că întregii lui Dirichlet α și β sînt *asociați în raport cu* π, dacă ei se divid unul pe altul în raport cu π.

Teorema 4.1. *Dacă* υ *este o unitate în raport cu* π, *atunci* α *și* $\upsilon\alpha$ *sînt asociați în raport cu* π.

Într-adevăr, $\upsilon\alpha$ divide pe α în raport cu π datorită teoremei 3.10. Apoi α divide pe $\upsilon\alpha$ în raport cu π conform proprietății 1° de la punctul 2.

Teorema 4.2. *Dacă* α *și* β *sînt asociați în raport cu* π, *atunci* α^* *și* β^* *sînt de asemenea asociați în raport cu* π. Demonstrația rezultă din însăși definiția divizibilității în raport cu π și luînd, apoi, conjugatul relativ în ambii membri ai celor două egalități care definesc relația dintre α și β în raport cu π.

Teorema 4.3. *Dacă* α *și* β *sînt asociați în raport cu* π, *atunci există întregii lui Gauss* z' *și* z'' *primi cu* π *astfel ca* $z'\alpha = \upsilon'\beta$ *și* $z''\beta = \upsilon''\alpha$, υ' *și* υ'' *fiind unități în raport cu* π *și reciproc.*

Într-adevăr, dacă α și β sînt asociați în raport cu π, atunci există întregii lui Gauss z' și z'', primi cu π, astfel încît $z'\alpha = \upsilon'\beta$, $z''\beta = \upsilon''\alpha$, deci $z'z''\alpha = \upsilon'z''\beta = \upsilon'\upsilon''\alpha$ sau $z'z'' = \upsilon'\upsilon''$, deci $N_r(\upsilon'\upsilon'') = z'^2 z''^2$ este primă cu π. Însă $N_r(\upsilon'\upsilon'') = N_r(\upsilon')\, N_r(\upsilon'')$, deci $N_r(\upsilon')$ și $N_r(\upsilon'')$ sînt prime cu π, deci υ' și υ'' sînt unități în raport cu π. Reciproc, dacă există relațiile $z'\alpha = \upsilon'\beta$ și $z''\beta = \upsilon''\alpha$, υ' și υ'' fiind unități în raport cu π, atunci $N_r(\upsilon'')\,\alpha = (z''\upsilon''^*)\,\beta$ și $N_r(\upsilon')\,\beta = (z'\upsilon'^*)\,\alpha$ cu $N_r(\upsilon')$ și $N_r(\upsilon'')$ întregi ai lui Gauss primi cu π, deci α și β sînt asociați în raport cu π.

Teorema 4.4. *Dacă* α *este divizibil prin* β *în raport cu* π, *iar în relația* $z\alpha = \upsilon\beta$, z *fiind un întreg al lui Gauss prim cu* π, ν *este o unitate în raport cu* π, *atunci* α *și* β *sînt asociați în raport cu* π.

Într-adevăr, în acestc az, odată cu $z\alpha = \upsilon\beta$ este verificată și relația $N_r(\upsilon)\,\beta = (z\upsilon^*)\,\alpha$ cu $N_r(\upsilon)$ primă cu π, deci α și β sînt asociați în raport cu π.

Teorema 4.5. *Condiția necesară și suficientă ca* μ *și* ν *să fie asociați în* $\mathfrak{J}[i, \theta]$ *este ca ei să fie asociați în raport cu orice număr prim al lui Gauss.*

Într-adevăr, dacă μ și ν sînt asociați, atunci μ este divizibil prin ν și ν prin μ, deci μ este divizibil în raport cu π prin ν și ν prin μ, oricare ar fi numărul prim π al lui Gauss, deci μ și ν sînt asociați în raport cu π oricare ar fi numărul prim π al lui Gauss. Reciproc, dacă μ și ν sînt asociați în raport cu π, oricare ar fi numărul prim π al lui Gauss, atunci μ este divizibil în raport cu π prin ν și ν prin μ, oricare ar fi numărul prim π al lui Gauss, deci μ este divizibil prin ν și ν prin μ, conform teoremei 2.4.

5. Fie π un întreg prim al lui Gauss, iar μ și ν doi întregi ai lui Dirichlet. Cu scopul de a transforma divizibilitatea în raport cu π într-o divizibilitate obișnuită, adică într-o divizibilitate între întregii constituiți într-un inel, vom defini întregii corpului $\mathfrak{R}(i, \sqrt{\delta})$ față de inelul $\mathfrak{J}[i]/\pi$ [7] așa cum se obișnuiește:

Vom spune că $\omega \in \Re(i, \sqrt{\delta})$ *este un întreg față de inelul* $\Im[i]/\pi$ *dacă verifică o ecuație de gradul II.*

$$\omega^2 - u\omega + n = 0$$

cu coeficienții în $\Im[i]/\pi$, *adică* $u \in \Im[i]/\pi$, $n \in \Im[i]/\pi$.

Acești întregi $\omega \in \Im(i, \sqrt{\delta})$ formează o mulțime pe care o vom nota $\Im[i, \theta]/\pi$.

Teorema 5.1. *Condiția necesară și suficientă ca* $\omega \in \Im[i, \theta]/\pi$ *este ca să existe un întreg* z *al lui Gauss prim cu* π *astfel ca* $z\omega \in \Im[i, \theta]$.

Condiția este necesară, deoarece dacă $\omega \in \Im[i, \theta]/\pi$ atunci ω verifică ecuația

$$\omega^2 - u\omega + n = 0$$

cu coeficienții $u \in \Im[i]/\pi$, $n \in \Im[i]/\pi$, deci $u = \frac{u''}{z'}$, $n = \frac{n''}{z''}$, u'', n'', z', z'' fiind întregi ai lui Gauss, iar z' și z'' fiind primi cu π; așadar putem scrie

$$u = \frac{u' z''}{z' z''}, \quad n = \frac{n'' z'^2 z''}{z'^2 z''^2}$$

numitorii fiind primi cu π, deci $u = \frac{u'}{z}$, $n = \frac{n'}{z^2}$ cu $u' = u'' z''$, $n' = n'' z'^2 z''$, $z = z' z''$, ultimele trei expresii fiind întregi ai lui Gauss. Prin urmare, se deduce că

$$(z\omega)^2 - u'(z\omega) + n' = 0$$

deci, cu z definit mai sus, avem $z\omega \in \Im[i, \theta]$. Condiția este suficientă, deoarece dacă $z\omega \in \Im[i, \theta]$, atunci $z\omega$ verifică ecuația de gradul II

$$t^2 - zut + z^2 n = 0$$

cu $zu \in \Im[i]$, $z^2 n \in \Im[i]$ în care $u = \omega + \omega^*$, $n = N_r(\omega)$, deci $u \in \Im[i]/\pi$, $n \in \Im[i]/\pi$, z și z^2 fiind întregi ai lui Gauss primi cu π. Prin urmare

$$(z\omega)^2 - zu'(z\omega) + z^2 n = 0$$

sau

$$\omega^2 - u\omega + n = 0$$

deci $\omega \in \Im[i, \theta]/\pi$.

Vom arăta că $\Im[i, \theta]/\pi$ *este un inel* observînd că dacă $\sigma \in \Im[i, \theta]/\pi$ și $\tau \in \Im[i, \theta]/\pi$, atunci $z'\sigma \in \Im[i\theta]$, $z''\tau \in \Im[i, \theta]$, z' și z'' fiind primi cu π, deci $z'z''(\sigma + \tau) \in \Im[i, \theta]$, $z'z''(\sigma\tau) \in \Im[i, \theta]$; întregul lui Gauss $z'z''$ fiind prim cu π rezultă că $\sigma + \tau \in \Im[i, \theta]/\pi$ și $\sigma\tau \in \Im[i, \theta]/\pi$.

Deoarece pentru orice întreg ω a lui Dirichlet putem lua $z = 1$ ca să avem $\omega \in \Im[i, \theta]$, înseamnă că pentru orice întreg ω al lui Dirichlet avem $\omega \in \Im[i, \theta]/\pi$, deci

$$\Im[i, \theta] \subset \Im[i, \theta]/\pi.$$

Divizibilitatea în inelul $\Im[i, \theta]/\pi$ se definește astfel: $\sigma \in \Im[i, \theta]/\pi$ este divizibil prin $\tau \in \Im[i, \theta]/\pi$ dacă există un $\chi \in \Im[i, \theta]/\pi$ cu $\sigma = \chi\tau$.

Echivalența între divizibilitatea în raport cu π a doi întregi μ și ν ai lui Dirichlet și divizibilitatea celor doi întregi μ și ν în inelul $\Im[i, \theta]/\pi$ se stabilește cu ajutorul următoarei teoreme:

Teorema 5.2. *Condiția necesară și suficientă pentru ca întregul lui Dirichlet* μ *să fie divizibil în raport cu* π *prin întregul lui Dirichlet* ν *este ca* μ *să fie divizibil prin* ν *în* $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$.

Condiția este necesară, deoarece dacă μ este divizibil în raport cu π prin ν, atunci există $z \varepsilon \mathfrak{J}[i]$, z fiind prim cu π, astfel ca $\frac{z\mu}{\nu} = \xi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, deci $\mu = \frac{\xi}{z}\nu$, dar $\frac{\xi}{z} \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ deoarece $z\frac{\xi}{z} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, z fiind prim cu π, deci μ este divizibil prin ν în $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$. Condiția este suficientă, deoarece dacă μ este divizibil prin ν în $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ atunci $\frac{\mu}{\nu} = \chi \varepsilon \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$, deci există z prim cu π, $z \in \mathfrak{J}[i]$, astfel ca $z\chi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, deci $\frac{z\mu}{\nu} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$.

Iraționala relativ pătratică $\frac{\mu}{\nu} \in \mathfrak{R}(i, \sqrt{\delta})$, μ și ν fiind întregi ai lui Dirichlet, verifică următoarea ecuație de gradul II cu coeficienții iraționale pătratice ale corpului $\mathfrak{R}(i)$:

$$t^2 - ut + n = 0$$

deoarece $u = \frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu^*}{\nu^*}$, $n = N_r\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \frac{\mu}{\nu}\frac{\mu^*}{\nu^*}$ aparțin lui $\mathfrak{R}(i)$.

Teorema 5.3. *Condiția necesară și suficientă ca* μ *să fie divizibil în raport cu* π *prin* ν *este ca ecuația precedentă să aibă coeficienții în inelul* $\mathfrak{J}[i]/\pi$.

Condiția este necesară, deoarece dacă μ este divizibil în raport cu π prin ν, atunci, datorită teoremei precedente, $\frac{\mu}{\nu} \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ deci $u, n \varepsilon \mathfrak{J}[i]/\pi$. Condiția este suficientă, deoarece dacă $u, n \in \mathfrak{J}[i]/\pi$ atunci $\frac{\mu}{\nu} \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ și deci, datorită, de asemenea teoremei precedente μ este divizibil în raport cu π prin ν.

Prin definiție, *unitățile în* $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ *sînt elementele* $\upsilon \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ *astfel încît* $\frac{1}{\upsilon} \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$.

Teorema 5.4. *Condiția necesară și suficientă ca întregul lui Dirichlet* υ *să fie o unitate în raport cu* π *este ca* υ *să fie o unitate în* $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$.

Condiția este necesară, deoarece dacă υ este o unitate în raport cu π, atunci $N_r(\upsilon)$ este primă cu π, însă întrucît $N_r(\upsilon) = \upsilon\upsilon^*$ rezultă că $N_r(\upsilon)\cdot\frac{1}{\upsilon} = \upsilon^* \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, deci $\frac{1}{\upsilon} \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$. Condiția este suficientă, deoarece dacă $\frac{1}{\upsilon} \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$, atunci există z prim cu π astfel încît $z.\frac{1}{\upsilon} = \upsilon' \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, deci $z = \upsilon'\upsilon$ sau $z.1 = \upsilon'\upsilon$ ceea ce ne arată că υ este o unitate în raport cu π.

Vom spune că $\sigma \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ *este asociat în* $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ cu $\tau \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$, dacă σ divide şi este divizibil prin τ în $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$. Se deduce că $\frac{\sigma}{\tau} = \upsilon \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ şi $\frac{\tau}{\sigma} = \frac{1}{\upsilon} \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$, deci υ este o unitate în $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$.

Prin urmare:

Teorema 5.5 *Condiţia necesară şi suficientă ca întregii lui Dirichlet* μ *şi* ν *să fie asociaţi în* $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ *este să existe o unitate* υ *în* $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ *astfel ca* $\mu = \upsilon \nu$.

Teorema 5.6. *Condiţia necesară şi suficientă ca întregii lui Dirichlet* μ *şi* ν *să fie asociaţi în raport cu* π *este ca ei să fie asociaţi în* $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$.

Condiţia este necesară, deoarece dacă μ şi ν sînt asociaţi în raport cu π, atunci, conform teoremei 5.2 $\frac{\mu}{\nu} \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ şi $\frac{\nu}{\mu} \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$, deci μ şi ν sînt asociaţi în $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$. Condiţia este suficientă, deoarece dacă μ şi ν sînt asociaţi în $\mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ atunci $\frac{\mu}{\nu} \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ şi $\frac{\nu}{\mu} \in \mathfrak{J}[i, \theta]/\pi$ şi, conform teoremei 5.2, μ şi ν se divid unul pe altul în raport cu π, deci μ şi ν sînt asociaţi în raport cu π.

6. Dacă μ nu se divide prin ν în raport cu π şi de asemenea nici ν nu se divide prin μ în raport cu π este natural de a pune problema existenţei celui mai mare divizor comun în raport cu π al întregilor lui Dirichlet μ şi ν, adică de a pune problema existenţei unui întreg al lui Dirichlet δ care să verifice următoarele două proprietăţi:

a) μ *şi* ν *sînt divizibili prin* δ *în raport cu* π;

b) *dacă* Ω *este un divizor comun în raport cu* π *al lui* μ *şi* ν, *atunci* Ω *divide în raport cu* π *pe* δ.

Construirea celui mai mare divizor comun în raport cu π pentru doi întregi μ şi ν ai lui Dirichlet se va face, cu ajutorul noţiunii pe care o vom denumi *ordinul unui întreg al lui Dirichlet în raport cu* π. Înainte de a stabili această noţiune vom face cîteva consideraţii preliminare.

Fie $\Omega = \alpha + \beta\theta$ un întreg al lui Dirichlet în care:

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{\delta}}{2} \quad \text{dacă} \quad \delta \equiv 1 \pmod 4,$$

$$\theta = \frac{i + \sqrt{\delta}}{2} \quad \text{dacă} \quad \delta \equiv 3 \pmod 4,$$

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{\delta}}{1 + i} \quad \text{dacă} \begin{cases} \delta \equiv 1 + 2i \pmod 4, \\ \delta \equiv 3 + 2i \pmod 4, \end{cases}$$

$\theta = \sqrt{\delta}$ dacă δ este diferit de valorile de mai sus.

Dacă $\xi = x + y\theta$ este un întreg arbitrar al lui Dirichlet, atunci $\Omega + \pi\xi$ constituie clasa de resturi modulo π reprezentată de întregul Ω al lui Dirichlet. Avem

$$N_r(\Omega + \pi\xi) = (\Omega + \pi\xi), (\Omega^* + \pi\xi^*) = \Omega\Omega^* + \pi(\Omega\xi^* + \Omega^*\xi) + \pi^2\xi\xi^*,$$

deci

$$N_r(\Omega + \pi\xi) = N_r(\Omega) + \pi L(\Omega, \xi) + \pi^2 N_r(\xi)$$

în care

$$L(\Omega, \xi) = \Omega \xi^* + \Omega^* \xi.$$

Se deduce că

$$N_r(\Omega + \pi\xi) \equiv N_r(\Omega) \pmod{\pi},$$

deci,

Teorema 6.1. *Dacă unul dintre întregii lui Dirichlet ai unei clase de resturi modulo π are norma relativă divizibilă prin π, atunci toți întregii lui Dirichlet ai acestei clase au norma relativă divizibilă prin π.*

Să dovedim

Teorema 6.2. *Condiția necesară și suficientă ca orice întreg al lui Dirichlet al unei clase de resturi modulo π să aibă norma relativă divizibilă prin π^2 este ca toți întregii acestei clase să fie divizibili prin π.* Bineînțeles, pentru aceasta, este suficient ca unul dintre întregii acestei clase de resturi modulo π să fie divizibil prin π.

Condițiile necesare și suficiente ca toți întregii clasei de resturi $\Omega + \pi\xi$, ξ fiind arbitrar în $\Im[i, \theta]$, să aibă norma relativă divizibilă prin π^2 sînt

$$N_r(\Omega) \equiv 0 \pmod{\pi^2},$$
$$L(\Omega, \xi) \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Aceste condiții se scriu $\Omega\Omega^* \equiv 0 \pmod{\pi^2}$ și $\Omega\xi^* + \Omega^*\xi \equiv 0 \pmod{\pi}$, ξ fiind arbitrar în $\Im[i, \theta]$; ultima congruență trebuie să fie verificată și pentru $\xi = 1$, deci trebuie ca $\Omega + \Omega^* \equiv 0 \pmod{\pi}$ sau $\Omega^* \equiv -\Omega \pmod{\pi}$ și atunci $L(\Omega, \xi) \equiv 0 \pmod{\pi}$ devine $\Omega(\xi^* - \xi) \equiv 0 \pmod{\pi}$; deoarece $\xi^* - \xi = x + y\theta^* - (x + y\theta) = y(\theta^* - \theta)$, ξ fiind arbitrar în $\Im[i, \theta]$, trebuie ca $\Omega(\xi^* - \xi) \equiv 0 \pmod{\pi}$ să fie adevărată și pentru $y = 1$, deci trebuie ca $\Omega(\theta^* - \theta) \equiv 0 \pmod{\pi}$. Însă

$$\theta^* - \theta = -\sqrt{\delta} \text{ dacă } \begin{cases} \delta \equiv 1 \pmod 4 \\ \delta \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\theta^* - \theta = -(1 - i)\sqrt{\delta} \text{ dacă } \begin{cases} \delta \equiv 1 + 2i \pmod 4 \\ \delta \equiv 3 + 2i \pmod 4 \end{cases}$$

$\theta^* - \theta = -2\sqrt{\delta}$ dacă δ este diferit de valorile de mai sus.

Congruența $\Omega(\theta^* - \theta) \equiv 0 \pmod{\pi}$ devine $-\Omega\sqrt{\delta} \equiv 0 \pmod{\pi}$ dacă $\delta \equiv 1 \pmod 4$ sau $\delta \equiv 3 \pmod 4$, devine $-(1-i)\Omega\sqrt{\delta} \equiv 0 \pmod{\pi}$ dacă $\delta \equiv 1 + 2i \pmod 4$ sau $\delta \equiv 3 + 2i \pmod 4$ și $-2\Omega\sqrt{\delta} \equiv 0 \pmod{\pi}$ în toate celelalte cazuri. Deci, dacă $\pi \neq 1 + i$ rezultă că $\Omega \equiv 0 \pmod{\pi}$; dacă $\pi = 1 + i$, atunci, din cele de mai sus, se deduce că $\Omega \equiv 0 \pmod{1 + i}$ dacă $\delta \equiv 1 \pmod 4$ sau $\delta \equiv 3 \pmod 4$. Dacă $\pi = 1 + i$, iar $\delta \not\equiv 1 \pmod 4$ și $\delta \not\equiv 3 \pmod 4$, atunci $\Omega\xi^* + \Omega^*\xi \equiv 0 \pmod{1 + i}$ este verificată identic, după cum rezultă din cele de mai sus, ceea ce se mai poate arăta cu ajutorul consecinței sale $\Omega + \Omega^* \equiv 0 \pmod{1 + i}$, scrisă sub forma $\Omega^* \equiv \Omega \pmod{1 + i}$, deci $\Omega(\xi^* + \xi) \equiv 0 \pmod{1+i}$, iar $\xi^* + \xi = (x + y\theta^*) + (x + y\theta) = 2x + y(\theta + \theta^*) = 2x + (1 - i)y \equiv 0 \pmod{1 + i}$ dacă $\delta \equiv 1 + 2i \pmod 4$ sau $\delta \equiv 3 + 2i \pmod 4$ și $\xi^* + \xi = (x - y\sqrt{\delta}) + (x + y\sqrt{\delta}) = 2x \equiv 0 \pmod{1+i}$ în toate celelalte cazuri. Rămîne, deci, de examinat, pentru $\pi = 1 + i$

și $\delta \not\equiv 1, \not\equiv 3 \pmod 4$, congruența $\Omega\Omega^* \equiv 0 \pmod{(1+i)^2}$, care este echivalentă cu

$$\alpha^2 + (1-i)\alpha\beta + i\frac{\delta-1}{2}\beta^2 \equiv 0 \pmod 2, \text{ dacă } \begin{cases} \delta \equiv 1+2i \pmod 4 \\ \delta \equiv 3+2i \pmod 4 \end{cases}$$

și cu $\alpha^2 - \beta^2\,\delta \equiv 0 \pmod 2$ dacă $\delta \not\equiv 1, \not\equiv 3, \not\equiv 1+2i, \not\equiv 3+2i \pmod 4$. Dacă $\delta \equiv 1+2i \pmod 4$, atunci $\frac{\delta-1}{2} \equiv i \pmod 2$, deci obținem $\alpha^2 + (1-i)\alpha\beta - \beta^2 \equiv 0 \pmod 2$. Acum sau $\beta \equiv 0 \pmod{1+i}$ și atunci și $\alpha \equiv 0 \pmod{1+i}$ sau $\beta \equiv 1 \pmod{1+i}$, deci $\beta = 1 + \xi_1(1+i)$ sau $\beta^2 = 1 + 2\xi_1(1+i) + \xi^2(1+i)^2$ sau $\beta^2 \equiv 1 \pmod 2$ și atunci sau $\alpha \equiv 0 \pmod{1+i}$ ceea ce este imposibil pentru că $-1 \not\equiv 0 \pmod 2$ sau $\alpha \equiv 1 \pmod{1+i}$ ceea ce, iarăși, este imposibil pentru că $(1-i)\alpha\beta \not\equiv 0 \pmod 2$ atunci cînd $\alpha \equiv 1 \pmod{1+i}$ și $\beta \equiv 1 \pmod{1+i}$. Dacă $\delta \equiv 3+2i \pmod 4$, atunci $\frac{\delta-1}{2} \equiv 1+i \pmod 2$, deci $\alpha^2 + (1-i)\alpha\beta + i(1+i)\beta^2 \equiv 0 \pmod 2$, deci $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{1+i}$, deci $\alpha \equiv 0 \pmod{1+i}$. În acest caz $i(1+i)\beta^2 \equiv 0 \pmod 2$, deci $\beta^2 \equiv 0 \pmod{1+i}$ și se deduce $\beta \equiv 0 \pmod{1+i}$. Fie acum $\alpha^2 - \beta^2\delta \equiv 0 \pmod 2$. Acum sau $\beta \equiv 0 \pmod{1+i}$ și atunci și $\alpha \equiv 0 \pmod{1+i}$ sau $\beta \equiv 1 \pmod{1+i}$, deci $\beta^2 \equiv 1 \pmod 2$ și se obține $\alpha^2 - \delta \equiv 0 \pmod 2$. Nu putem avea $\alpha \equiv 0 \pmod{1+i}$ pentru că $\delta \not\equiv 0 \pmod 2$, altfel δ s-ar divide cu un pătrat $(1+i)^2$. Rămîne posibilitatea $\alpha \equiv 1 \pmod{1+i}$, deci $\alpha^2 \equiv 1 \pmod 2$ ceea ce revine la $\delta \equiv 1 \pmod 2$ și care nu poate fi admisă, pentru că altfel din $\delta \equiv 1 \pmod 2$ am deduce $\delta \equiv 1, 3, 1+2i, 3+2i \pmod 4$. Deci teorema este demonstrată în toate cazurile posibile.

Să considerăm toți întregii lui Dirichlet de forma $\Omega + \pi^2\xi$ cu notațiile utilizate mai sus. Norma relativă a unui astfel de întreg este

$$N_r(\Omega + \pi^2\xi) = N_r(\Omega) + \pi^2 L(\Omega, \xi) + \pi^4 N_r(\xi).$$

Deci, condițiile necesare și suficiente ca toți întregii clasei de resturi $\Omega + \pi^2\xi$, ξ fiind arbitrar în $\mathfrak{J}[i, \theta]$ să aibă norma relativă divizibilă prin π^4 sînt

$$N_r(\Omega) \equiv 0 \pmod{\pi^4}$$
$$L(\Omega, \xi) \equiv 0 \pmod{\pi^2}.$$

Atunci avem și

$$N_r(\Omega) \equiv 0 \pmod{\pi^2},$$
$$L(\Omega, \xi) \equiv 0 \pmod{\pi},$$

ceea ce atrage și

$$N_r(\Omega + \pi\xi) \equiv 0 \pmod{\pi^2},$$

deci

$$\Omega = \pi\,\Omega_1.$$

Așadar

$$\Omega + \pi^2\xi = \pi(\Omega_1 + \pi\xi),$$

deci

$$N_r(\Omega + \pi^2\xi) = N_r(\pi\Omega_1 + \pi^2\xi) = \pi^2 N_r(\Omega_1 + \pi\xi).$$

Prin urmare, condiția ca $N_r(\Omega + \pi^2\xi) \equiv 0 \pmod{\pi^4}$ este ca $N_r(\Omega_1 + \pi\xi) \equiv \equiv 0 \pmod{\pi^2}$, deci $\Omega_1 = \pi\,\Omega_2$, ceea ce înseamnă că $\Omega \equiv 0 \pmod{\pi^2}$.

Repetînd raționamentul se vede că

Teorema 6.3. *Condiția necesară și suficientă ca întregii* $\Omega + \pi^e\,\xi$ *să aibă, pentru orice întreg al lui Dirichlet* ξ, *norma relativă divizibilă prin* π^{2e} *este ca* Ω *să fie divizibil prin* π^e.

Acest fapt ne permite să dovedim

Teorema 6.4. *Dacă toți întregii unei clase de resturi modulo* π^e *au norma relativă divizibilă prin* π^ν, *atunci* $\nu \leqslant 2e$.

Într-adevăr, dacă am avea $\nu \geqslant 2e + 1$ atunci normele relative fiind divizibile prin π^{2e+1} sînt divizibile și prin π^{2e}, deci toți întregii clasei sînt divizibili prin π^e, deci $\Omega = \pi^e\,\Omega_0$. În această situație, pentru orice ξ din $\mathfrak{J}[i, \theta]$, am avea $N_r(\Omega + \pi^e\,\xi) \equiv 0 \pmod{\pi^{2e+1}}$, deci: $N_r(\pi^e\,\Omega_0 + \pi^e\xi) \equiv 0 \pmod{\pi^{2e+1}}$ și deoarece $N_r(\pi^e - \Omega_0 + \pi^e\,\xi) = \pi^{2e}\,N_r(\Omega_0 + \xi)$, avem, pentru orice ξ: $N_r(\Omega_0 + \xi) \equiv 0 \pmod{\pi}$, ceea ce este absurd, pentru că ξ este un întreg oarecare al lui Dirichlet, deci cu $\xi = 1 - \Omega_0$ am avea congruența $N_r(1) = 0 \pmod{\pi}$, care este imposibilă.

Numim *ordinul lui* Ω *în raport cu* π cel mai mare exponent ν astfel ca $N_r(\Omega) \equiv 0 \pmod{\pi^\nu}$. Pentru o clasă de resturi modulo π^e numim *ordinul clasei în raport cu* π cel mai mare exponent ν astfel ca normele relative ale tuturor întregilor clasei să fie divizibile prin π^ν, adică dacă ν este ordinul clasei în raport cu π, atunci toți întregii clasei au norma relativă divizibilă prin π^ν, dar există cel puțin un întreg al clasei care nu are norma relativă divizibilă și prin $\pi^{\nu+1}$. Dacă nici unul dintre întregii clasei nu are norma relativă divizibilă prin π, atunci $\nu = 0$. Dacă toți întregii clasei sînt divizibili prin π^e, atunci $\nu = 2e$. În toate celelalte cazuri $0 < \nu < 2e$.

Un rezultat remarcabil în legătură cu noțiunea introdusă mai sus îl constituie

Teorema lui Zolotarev. *Dacă ordinul lui* Ω *în raport cu* π *este egal cu ordinul în raport cu* π *al clasei de resturi modulo* π^e *căreia îi aparține, atunci* π^e *este divizibil în raport cu* π *prin* Ω.

Într-adevăr, să presupunem că ordinul în raport cu π al clasei de resturi $\Omega + \pi^e\,\xi$, ξ fiind arbitrar în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, este egal cu ν și să admitem că Ω este întregul a cărui normă relativă nu este divizibilă și prin $\nu+1$. Deci $N_r(\Omega) = = \pi^\nu\,z$ în care z este un întreg al lui Gauss prim cu π. Deoarece întregul lui Dirichlet Ω verifică ecuația: $\Omega^2 - u\,\Omega + N_r(\Omega) = 0$ cu $u = \Omega + \Omega^*$ înseamnă că $\tau = \dfrac{z\pi^e}{\Omega}$ verifică ecuația $\pi^\nu\,\tau^2 - u\,\pi^e\,\tau + z\pi^{2e} = 0$ sau $\tau^2 - u\pi^{e-\nu}\,\tau + + z\,\pi^{2e-\nu} = 0$. Pe de altă parte, $N_r(\Omega + \pi^e\,\xi) = N_r(\Omega) + \pi^e\,L(\Omega, \xi) + \pi^{2e}\,N_r(\xi)$. Ținînd seama că ν este ordinul clasei de resturi Ω modulo π^e în raport cu π și că $\nu \leqslant 2e$, obținem $\pi^e\,L(\Omega, \xi) \equiv 0 \pmod{\pi^\nu}$, oricare ar fi $\xi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, deci și $\pi^e\,L(\Omega, 1) \equiv 0 \pmod{\pi^\nu}$ sau $\pi^e\,u \equiv 0 \pmod{\pi^\nu}$, deoarece $L(\Omega, 1) = \Omega + + \Omega^* = u$. Din congruența $\pi^e\,u \equiv 0 \pmod{\pi^\nu}$ obținem: $\pi^e\,u = \pi^\nu\,u_1$ cu $u_1 \in \mathfrak{J}[i]$, deci $\tau = \dfrac{z\pi^e}{\Omega}$ verifică ecuația: $\tau^2 - u_1\,\tau + z\,\pi^{2e-\nu} = 0$ cu coeficienții în $\mathfrak{J}[i]$, deci $\dfrac{z\,\pi^e}{\Omega} = \tau \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ de unde rezultă că π^e este divizibil în raport cu π prin Ω.

În scopul de a obține o extindere a teoremei lui Zolotarev, în sensul că rezultatul obținut rămîne valabil cu toate că mulțimea valorilor lui ξ se reduce de la $\mathfrak{J}[i, \theta]$ la o submulțime a lui $\mathfrak{J}[i, \theta]$, vom stabili și următoarele teoreme.

Teorema 6.5. *Condiția necesară și suficientă ca întregii lui Dirichlet de forma* $\Omega + z\pi\xi$, *z fiind un întreg dat al lui Gauss prim cu* π, *iar* ξ *un întreg arbitrar în* $\mathfrak{J}[i, \theta]$, *să aibă norma relativă divizibilă prin* π, *este ca unul dintre ei să aibă norma relativă divizibilă prin* π.

Acest fapt rezultă din egalitatea

$$N_r(\Omega + z\pi\xi) = N_r(\Omega) + z\pi L(\Omega, \xi) + z^2\pi^2 N_r(\xi)$$

deci $N_r(\Omega + z\pi\xi) \equiv N_r(\Omega) \pmod{\pi}$. Se observă că în demonstrația dată nu intră presupunerea că z este prim cu π, dar care este esențială în cele ce urmează, deoarece z nu este arbitrar în $\mathfrak{J}[i]$.

Teorema 6.6. *Condiția necesară și suficientă ca orice întreg al lui Dirichlet de forma* $\Omega + z\pi\xi$, *z fiind un întreg dat al lui Gauss, prim cu* π, *iar* ξ *fiind un întreg arbitrar în* $\mathfrak{J}[i, \theta]$, *să aibă norma relativă divizibilă prin* π^2 *este ca acești întregi să fie divizibili prin* π.

Într-adevăr, să considerăm egalitatea

$$N_r(\Omega + z\pi\xi) = N_r(\Omega) + z\pi L(\Omega\,\xi) + z^2\pi^2 N_r(\xi).$$

Deoarece $N_r(\Omega + z\pi\xi) \equiv 0 \pmod{\pi^2}$ pentru orice $\xi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, atunci pentru $\xi = 0$ obținem $N_r(\Omega) \equiv 0 \pmod{\pi^2}$, aceasta fiind una dintre condițiile necesare; apoi, din egalitatea de mai sus, rezultă că $z\pi L(\Omega, \xi) \equiv 0 \pmod{\pi^2}$ și, ținînd seama de faptul că z este prim cu π, deducem a doua condiție necesară $L(\Omega, \xi) \equiv 0 \pmod{\pi}$. Din egalitatea de mai sus se vede că relațiile $N_r(\Omega) \equiv 0 \equiv (\mathrm{mod.}\ \pi^2)$, $L(\Omega, \xi) \equiv 0 \pmod{\pi}$ sînt suficiente. De aici încolo demonstrația se face exact ca pentru teorema 6.2.

Teorema 6.7. *Condiția necesară și suficientă ca întregii lui Dirichlet de forma* $\Omega + z\pi^e\xi$, *z fiind un întreg dat al lui Gauss, prim cu* π, *iar* ξ *fiind un întreg arbitrar în* $\mathfrak{J}[i, \theta]$, *să aibă norma relativă divizibilă prin* π^{2e} *este ca* Ω *să fie divizibil prin* π^e.

Demonstrația acestei teoreme se face la fel ca pentru teorema analogă 6.3.

Cu cele stabilite pînă acum, vom demonstra

Teorema 6.8. *Dacă toți întregii lui Dirichlet de forma* $\Omega + z\pi^e\xi$, *z fiind un întreg dat al lui Gauss, prim cu* π, *iar* ξ *fiind un întreg arbitrar în* $\mathfrak{J}[i, \theta]$, *au norma relativă divizibilă prin* π^ν *atunci* $\nu \leqslant 2e$.

Într-adevăr, presupunînd că $\nu \geqslant 2e + 1$ atunci normele relative fiind divizibile prin π^{2e+1} sînt divizibile și prin π^{2e}, deci toți întregii lui Dirichlet de forma $\Omega + z\pi^e\xi$ sînt divizibili prin π^e, deci $\Omega = \pi^e\Omega_0$. Atunci pentru orice ξ din $\mathfrak{J}[i, \theta]$ obținem $N_r(\pi^e\Omega_0 + z\pi^e\xi) = \pi^{2e} N_r(\Omega_0 + z\xi) \equiv 0 \pmod{\pi^{2e+1}}$ sau $N_r(\Omega_0 + z\xi) \equiv 0 \pmod{\pi}$; ξ fiind arbitrar în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, luînd $\xi = 0$ trebuie să avem $N_r(\Omega_0) \equiv 0 \pmod{\pi}$. Dar $N_r(\Omega_0 + z\xi) = N_r(\Omega_0) + zL(\Omega_0, \xi) + z^2 N_r(\xi)$, deci $z(\Omega_0\xi^* + \Omega_0^*\xi) + z^2\xi\xi^* \equiv 0 \pmod{\pi}$. Luînd $\xi = 1$ și apoi $\xi = 2$ rezultă că $z(\Omega_0 + \Omega_0^*) + z^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$ și $2z(\Omega_0 + \Omega_0) + 4z^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$. Înmulțind prima congruență cu 2 și scăzînd-o din a doua obținem $2z^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, ceea ce este imposibil dacă $\pi \neq 1 + i$, z fiind prim cu π. Dacă $\pi = 1 + i$, atunci, z fiind prim cu $\pi = 1 + i$, $z \equiv 1 \pmod{1 + i}$, deci $z = 1 + (1 + i)z_1$, iar $N_r(\Omega_0 + z\xi) \equiv 0 \pmod{1 + i}$ devine $N_r(\Omega_0 + \xi + z_1\xi(1 + i)) = N_r(\Omega_0 + \xi) + z_1(1 + i) \cdot L(\Omega_0 + \xi, \xi) + z_1^2(1 + i)^2 N_r(\xi) \equiv 0 \pmod{1 + i}$, deci $N_r(\Omega_0 + \xi) \equiv 0 \pmod{1 + i}$, ceea ce este absurd, pentru

că luînd $\xi = 1 - \Omega_0$ obținem congruența $N_r(1) = 0 \pmod{1+i}$, care este absurdă.

Obținem astfel o extindere a teoremei lui Zolotarev și anume:

Teorema 6.9. *Dacă ordinul lui Ω în raport cu π este egal cu cel mai mic ordin în raport cu π al întregilor lui Dirichlet de forma $\Omega + z\pi^e\xi$, z fiind un întreg dat al lui Gauss, iar ξ fiind arbitrar în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, atunci π^e este divizibil în raport cu π prin Ω.*

Datorită teoremei 6.8, demonstrația este aproape identică cu aceea dată pentru teorema lui Zolotarev. Aceste două teoreme sînt lipsite de însemnătate în cazul cînd, ν fiind ordinul lui Ω în raport cu π, avem relația $\nu \leqslant e$, deoarece în acest caz $N_r(\Omega) = \pi^\nu z$, z fiind un întreg al lui Gauss, prim cu π și deci $\frac{z\pi^\nu}{\Omega} = \Omega^* \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ ne dă $\frac{z\pi^e}{\Omega} = \Omega^* \pi^{e-\nu} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$. Importanța acestor două teoreme iese în evidență doar atunci cînd $e < \nu \leqslant 2e$, deoarece din $\frac{z\pi^\nu}{\Omega} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ nu mai putem deduce, nemijlocit, existența unui $z_1 \in \mathfrak{J}[i]$, prim cu π astfel încît $\frac{z_1\pi^e}{\Omega} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$. Dimpotrivă, avînd demonstrate cele două teoreme, din $\frac{z_1\pi^e}{\Omega} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ și din $N_r(\Omega) = \pi^\nu z$ deducem că $\frac{zz_1\pi^\nu}{\Omega} = z_1\Omega^*$ deci $\frac{z_1\Omega^*}{\pi^{\nu-e}} = z\frac{z_1\pi^e}{\Omega} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, prin urmare $\Omega^* \equiv 0 \pmod{\pi^{\nu-e}}$ conform teoremei 2.2 deci $\Omega \equiv 0 \pmod{\pi^{\nu-e}}$.

7. Acum vom trece la definirea celui mai mare divizor comun în raport cu π pentru doi întregi μ și ν ai lui Dirichlet. Definim, mai întîi, întregii lui Dirichlet de forma $\delta' = \mu + \nu\xi'$, ξ' fiind un întreg arbitrar al lui Dirichlet. Atunci cînd ξ' variază în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, ordinul lui δ' în raport cu π variază în mulțimea întregilor raționali, pozitivi, care este mărginită inferior, deci există cel puțin un întreg $\xi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ astfel încît $\delta = \mu + \nu\xi$ să aibă cel mai mic ordin în raport cu π dintre toți întregii lui Dirichlet de forma $\delta' = \mu + \nu\xi'$ cu ξ' arbitrar în $\mathfrak{J}[i, \theta]$. Fie ε ordinul lui ν în raport cu π, aceasta înseamnă că $N_r(\nu) = \nu\nu^* = z\pi^\varepsilon$, z fiind un întreg al lui Gauss, prim cu π. Putem scrie $\nu^*\delta' = \mu\nu^* + z\pi^\varepsilon\xi'$, $\nu^*\delta = \mu\nu^* + z\pi^\varepsilon\xi$. Ordinul lui δ în raport cu π fiind cel mai mic dintre ordinele în raport cu π ale întregilor δ', atunci ordinul lui $\nu^*\delta$ în raport cu π va fi cel mai mic dintre ordinele în raport cu π ale întregilor $\nu^*\delta'$. Însă $\nu^*\delta' = \nu^*\delta + z\pi^\varepsilon(\xi' - \xi)$, deci ordinul lui $\nu^*\delta$ în raport cu π este cel mai mic dintre ordinele în raport cu π ale întregilor de forma $\nu^*\delta + z\pi^\varepsilon\eta$, $\eta = \xi' - \xi$ fiind arbitrar în $\mathfrak{J}[i, \theta]$. Prin urmare, conform extinderii teoremei lui Zolotarev, rezultă că π^ε este divizibil în raport cu π, prin $\nu^*\delta$, deci există un întreg z' al lui Gauss, prim cu π, astfel încît $\frac{z'\pi^\varepsilon}{\nu^*\delta} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, deci $\frac{z'\pi^\varepsilon}{\nu^*\delta} = \frac{z'\pi^\varepsilon\nu}{\nu\nu^*\delta} = \frac{z'\pi^\varepsilon\nu}{z\pi^\varepsilon\delta} = \frac{z'\nu}{z\delta} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, deci și $\frac{z'\nu}{\delta} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, ceea ce înseamnă că ν este divizibil în raport cu π prin δ. Apoi $\mu = \delta - \nu\xi$, deci, cu același z', avem $z'\mu = z'\delta - z'\nu\xi$ sau $\frac{z'\mu}{\delta} = z' - \frac{z'\nu\xi}{\delta}$, $\frac{z'\mu}{\delta} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, deci și μ este divizibil în raport

cu π prin δ. Să presupunem, acum, că Ω este un întreg al lui Dirichlet astfel încît μ și ν să fie divizibili în raport cu π prin Ω; atunci $\delta = \mu + \nu\xi$ va fi divizibil și el în raport cu π prin Ω.

Astfel întregul lui Dirichlet δ, caracterizat prin aceea că are, dintre toți întregii lui Dirichlet de forma $\mu + \nu\xi'$, ξ' fiind arbitrar în $\Im[i, \theta]$, cel mai mic ordin în raport cu π verifică proprietățile a) și b) de la punctul 6. Întregul δ va fi numit *cel mai mare divizor comun în raport cu π al întregilor μ și ν*; avem $\delta = \mu + \nu\xi$.

8. Un interes deosebit îl prezintă întregii lui Dirichlet μ și ν pentru care cel mai mare divizor comun în raport cu π este o unitate în raport cu π.

Definiția 1. Întregii lui Dirichlet μ *și* ν *nu au divizori comuni cu* π sau μ *și* ν *sînt primi între ei față de* π, sau μ *este prim cu* ν *față de* π (deci ν este prim cu μ față de π) dacă cel mai mare divizor comun în raport cu π al întregilor μ și ν este o unitate în raport cu π.

O altă definiție pentru doi întregi ai lui Dirichlet primi între ei față de π este

Definiția 2. Întregii lui Dirichlet μ *și* ν *sînt primi între ei față de* π dacă pentru orice întreg a lui Dirichlet ω, pentru care $\omega\mu \equiv \omega\nu \equiv 0 \pmod{\pi}$, deducem $\omega \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Echivalența dintre aceste două definiții este stabilită datorită următoarelor teoreme:

Teorema 8.1. *Dacă cel mai mare divizor comun în raport cu π al întregilor lui Dirichlet μ și ν este o unitate în raport cu π, atunci μ și ν nu au divizori comuni cu π după definiția* 2.

Într-adevăr, fie $\delta = \mu + \nu\xi$ cel mai mare divizor comun în raport cu π al lui μ și ν și fie ω un întreg al lui Dirichlet astfel încît $\omega\mu \equiv \omega\nu \equiv 0 \pmod{\pi}$, atunci $\omega\delta \equiv \omega\mu + (\omega\nu)\xi \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $\omega\delta \equiv 0 \pmod{\pi}$ de unde $\omega \equiv 0 \pmod{\pi}$, δ fiind o unitate în raport cu π.

Teorema 8.2. *Dacă μ și ν nu au divizori comuni cu π după definiția* 2, *atunci cel mai mare divizor comun în raport cu π al întregilor lui Dirichlet μ și ν este o unitate în raport cu π.*

Într-adevăr, fie δ cel mai mare divizor comun în raport cu π al lui μ și ν; atunci există întregii lui Gauss z' și z'' primi cu π astfel încît $\frac{z'\mu}{\delta} = \chi' \in \Im[i, \theta]$, $\frac{z''\nu}{\delta} = \chi'' \in \Im[i, \theta]$, deci $z'\mu = \chi''\delta$ și $z'\nu = \chi''\delta$. Fie, acum, $\omega \equiv$ un întreg al lui Dirichlet astfel încît $\omega\delta \equiv 0 \pmod{\pi}$, atunci $z'(\omega\mu) = \chi'(\omega\delta) \equiv 0 \pmod{\pi}$. și $z''(\omega\nu) = \chi''(\omega\delta) \equiv 0 \pmod{\pi}$. Conform teoremei 2.2 putem simplifica cu z' și z'' în cele două congruențe și obținem $\omega\mu \equiv \omega\nu \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $\omega \equiv 0 \pmod{\pi}$ și prin urmare δ este o unitate în raport cu π.

Din definițiile date decurg următoarele proprietăți

Teorema 8.3. *Dacă α și β sînt primi cu γ față de π, atunci $\alpha\beta$ este prim cu γ față de π.*

Într-adevăr, dacă γ și $\alpha\beta$ ar avea divizori comuni cu π, atunci ar exista un $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega\gamma \equiv \omega\alpha\beta \equiv 0 \pmod{\pi}$ sau cu $(\omega\beta)\gamma \equiv (\omega\beta)\alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$. Notînd $\theta = \omega\beta$, atunci sau $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ ceea ce împreună cu $\theta\gamma \equiv \theta\alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$ contrazice faptul că γ și α nu au divizori comuni cu π,

sau $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$, adică $\omega\gamma \equiv \omega\beta \equiv 0 \pmod{\pi}$, ceea ce împreună cu $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ contrazice faptul că γ și β nu au divizori comuni cu π.

Teorema 8.4. *Dacă $\alpha\beta$ este divizibil în raport cu π prin γ și dacă β este prim cu γ față de π, atunci α este divizibil în raport cu π prin γ*, deoarece β fiind prim cu γ față de π, cel mai mare divizor comun în raport cu π al lui β și γ, anume $\delta = \beta + \gamma\xi$, este o unitate în raport cu π, deci $z = N_r(\delta)$ este prim cu π; atunci $z\alpha = \delta\delta^*\alpha = \delta^*\alpha(\beta + \gamma\xi) = \delta^*\alpha\beta + \delta^*\alpha\xi\gamma$; $\alpha\beta$ fiind divizibil în raport cu π prin γ există $z' \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π astfel încît $\frac{z'\alpha\beta}{\gamma} = \chi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, deci $z'z\alpha = \delta^*z'\alpha\beta + \delta^*z'\alpha\xi\gamma = (\delta^*\chi + \delta^*z'\alpha\xi)\gamma$; $z'z$ fiind prim cu π urmează că α este divizibil prin γ în raport cu π.

Teorema 8.5. *Condiția necesară și suficientă ca μ și π să nu aibă divizori comuni cu π este ca μ să fie o unitate în raport cu π.*

Într-adevăr, dacă μ și π nu au divizori comuni cu π, din $\omega\mu \equiv \omega\pi \equiv 0 \equiv (\text{mod. } \pi)$, adică din $\omega\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$ deducem $\omega \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci μ este o unitate în raport cu π. Reciproc, dacă μ este o unitate în raport cu π, atunci din $\omega\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$, adică din $\omega\mu \equiv \omega\pi \equiv 0 \pmod{\pi}$ se deduce $\omega \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci μ și π nu au divizori comuni cu π.

Este de observat că unitățile în raport cu π ocupă un loc special în teoria dezvoltată, deoarece fiind dat un întreg Ω al lui Dirichlet, o unitate în raport cu π este primă cu Ω față de π și în același timp divide pe Ω în raport cu π.

9. În cazul cînd întregii lui Dirichlet μ și ν nu au divizori comuni cu π, existența unui întreg al lui Dirichlet ξ astfel încît $\delta = \mu + \nu\xi$ să fie o unitate în raport cu π se poate obține și pe altă cale. Într-adevăr, dacă μ este o unitate în raport cu π, atunci existența lui ξ este demonstrată cu $\xi = 0$. Să presupunem că μ nu este o unitate în raport cu π. Vom alcătui, atunci, întregul lui Dirichlet

$$\zeta_1 = \mu + \nu .$$

Dacă ζ_1 este o unitate în raport cu π, atunci existența lui ξ este demonstrată cu $\xi = 1$. Dacă ζ_1 nu este o unitate în raport cu π, atunci avem următoarele proprietăți:

1_1°. Întregii lui Dirichlet μ și ζ_1 nu au divizori comuni cu π, deoarece altfel ar exista $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega\mu \equiv \omega\zeta_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $\omega\mu \equiv \omega\nu \equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, contrar ipotezei.

2_1°. Întregii lui Dirichlet ν și ζ_1 nu au divizori comuni cu π; demonstrația este analogă ca pentru 1_1°.

3_1°. Întregul lui Dirichlet ζ_1 nu este divizibil prin π, deoarece dacă ζ_1 ar fi divizibil prin π, atunci am avea $\mu + \nu \equiv 0 \pmod{\pi}$, dar, μ nefiind o unitate în raport cu π, există $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $\omega\mu \equiv \omega\nu \equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, contrar ipotezei

4_1°. $\nu\zeta_1$ nu este divizibil prin π, deoarece dacă $\nu\zeta_1$ ar fi divizibil prin π, atunci am avea $\mu\nu + \nu\nu \equiv 0 \pmod{\pi}$ dar, μ nefiind o unitate în raport cu π, există $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $(\omega\nu)\mu \equiv (\omega\nu)\nu \equiv 0 \pmod{\pi}$; μ și ν neavînd divizori comuni cu π rezultă că $\omega\nu \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $\omega\mu \equiv \omega\nu \equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, contrar ipotezei.

Fie

$$\zeta_2 = \mu + \nu\zeta_1$$

Dacă ζ_2 este o unitate în raport cu π, atunci existența lui ξ este demonstrată cu $\xi = \zeta_1$. Dacă ζ_2 nu este o unitate în raport cu π atunci avem următoarele proprietăți:

1_2°. Întregii lui Dirichlet μ și ζ_2 nu au divizori comuni cu π, deoarece altfel ar exista $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega\mu \equiv \omega\zeta_2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $\omega\nu\zeta_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$ ceea ce ne dă $(\omega\zeta_1)\ \mu \equiv (\omega\zeta_1)\ \nu \equiv 0 \pmod{\pi}$, de unde rezultă că $\omega\zeta_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$, deoarece μ și ν nu au divizori comuni cu π. Atunci $\omega\mu \equiv \omega\zeta_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ contrazice proprietatea 1_1°.

2_2°. Întregii lui Dirichlet ν și ζ_2 nu au divizori comuni cu π, deoarece altfel ar exista $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega\nu \equiv \omega\zeta_2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $\omega\mu \equiv \omega\nu \equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, contrar ipotezei.

3_2°. Întregul lui Dirichlet ζ_2 nu este divizibil prin π, deoarece dacă ζ_2 ar fi divizibil prin π, am avea $\mu + \nu\zeta_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$; μ nefiind o unitate în raport cu π, există $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $\omega\nu\zeta_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$, dar atunci $(\omega\zeta_1)\ \mu \equiv (\omega\zeta_1)\ \nu \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $\omega\zeta_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$. Rezultă că $\omega\mu \equiv \omega\zeta_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, contrar proprietății 1_1°.

4_2°. $\nu\zeta_2 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, deoarece dacă $\nu\zeta_2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, atunci $\mu\nu + \nu\nu\zeta_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$, dar, μ nefiind o unitate în raport cu π, există $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $(\omega\nu\zeta_1)\ \mu \equiv (\omega\nu\zeta_1)\ \nu \equiv 0 \pmod{\pi}$, de unde $\omega\nu\zeta_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$. Prin urmare, $(\omega\zeta_1)\ \mu \equiv (\omega\zeta_1)\ \nu \equiv 0 \pmod{\pi}$, de unde $\omega\zeta_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$ care, împreună cu $\omega\ \mu \equiv 0 \pmod{\pi}$ și $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, contrazice proprietatea 1_1°.

Acum, vom proceda prin recurență. Vom defini pe

$$\zeta_r = \mu + \nu\,\zeta_{r-1}.$$

Dacă ζ_r este o unitate în raport cu π, atunci teorema este demonstrată cu $\xi = \zeta_{r-1}$. Dacă ζ_r nu este o unitate în raport cu π, atunci sînt adevărate următoarele proprietăți:

1°. Întregii lui Dirichlet μ și ζ_r nu au divizori comuni cu π, deoarece altfel ar exista $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega\mu \equiv \omega\zeta_r \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $\omega\nu\zeta_{r-1} \equiv 0 \pmod{\pi}$, ceea ce ne dă $(\omega\zeta_{r-1})\ \mu \equiv (\omega\zeta_{r-1})\ \nu \equiv 0 \pmod{\pi}$, de unde rezultă că $\omega\zeta_{r-1} \equiv 0 \equiv \pmod{\pi}$, întrucît μ și ν nu au divizori comuni cu π. Deci μ și ζ_{r-1} ar avea divizori comuni cu π; repetînd raționamentul s-ar deduce că μ și ζ_1 ar avea divizori comuni cu π, contrar proprietății 1_1°.

2°. Întregii lui Dirichlet ν și ζ_r nu au divizori comuni cu π, deoarece altfel ar exista $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega\nu \equiv \omega\zeta_r \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $\omega\mu \equiv \omega\nu \equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, contrar ipotezei.

3°. $\zeta_r \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ rezultă imediat din $\nu\zeta_r \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ ceea ce se va demonstra în proprietatea care urmează.

4°. $\nu\zeta_r \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, deoarece dacă $\nu\zeta_r = 0 \pmod{\pi}$, atunci $\mu\nu + \nu\nu\zeta_{r-1} \equiv 0 \pmod{\pi}$; μ nefiind o unitate în raport cu π, există $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega\mu \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci $(\omega\nu\zeta_{r-1})\ \mu \equiv (\omega\nu\zeta_{r-1})\ \nu \equiv 0 \pmod{\pi}$, de unde $\omega\nu\zeta_{r-1} \equiv 0 \equiv \pmod{\pi}$. Prin urmare $(\omega\zeta_{r-1})\ \mu \equiv (\omega\zeta_{r-1})\ \nu \equiv 0 \pmod{\pi}$, de unde $\omega\zeta_{r-1} \equiv 0 \pmod{\pi}$. Deci μ și ζ_{r-1} ar avea divizori comuni cu π; repetînd raționamentul din proprietatea 1° s-ar deduce că μ și ζ_1 ar avea divizori comuni cu π, contrar proprietății 1_1°. Vom observa, acum, următorul fapt:

$$\zeta_{r+s} = \mu + \nu\zeta_{r+s-1} = \mu + \nu\,[\mu + \nu\zeta_{r+s-2}] = \mu\,(1 + \nu) +$$
$$+ \nu^2\zeta_{r+s-2} = \mu\,(1 + \nu + \nu^2 + \ldots + \nu^{s-1}) + \nu^s\,\zeta_r\,.$$

Tot astfel se deduce că

$$\zeta_s = \mu\,(1 + \nu + \nu^2 + \ldots + \nu^{s-1}) + \nu^s$$

deci

$$\zeta_{r+s} - \zeta_s = \nu^s (\zeta_r - 1).$$

Să considerăm acum, primii $N^2(\pi) - 1$ termeni din șirul

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots$$

Atunci sau $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{N^2(\pi)-1}$ constituie un sistem complet de resturi nenule modulo π și deci $\zeta_{N^2(\pi)}$ este congruent modulo π cu unul dintre termeni $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{N^2(\pi)-1}$ sau $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{N^2(\pi)-1}$ nu constituie un sistem complet de resturi nenule modulo π și atunci doi dintre termenii $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{N^2(\pi)-1}$ trebuie să fie congruenți între ei modulo π, deci putem alege $r = t$ astfel încît $\zeta_{t+s} - \zeta_s \equiv 0 \equiv (\text{mod. } \pi)$; rezultă că $\nu^s \cdot (\zeta_t - 1) \equiv 0 \pmod{\pi}$. Acum, putem presupune că ζ_t nu este o unitate în raport cu π; atunci există un $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ astfel încît $\omega\zeta_t \equiv 0 \pmod{\pi}$ și deci $\omega\nu^s \equiv 0 \pmod{\pi}$. Aceste două congruențe se mai pot scrie $(\omega\nu^{s-1})\,\nu \equiv (\omega\nu^{s-1})\,\zeta_t \equiv 0 \pmod{\pi}$ și, deoarece ν și ζ_t nu au divizori comuni cu π, deducem $\omega\nu^{s-1} \equiv 0 \pmod{\pi}$. Deci, din $\omega\nu^s \equiv 0 \pmod{\pi}$ am dedus, cu ajutorul lui $\omega\zeta_t \equiv 0 \pmod{\pi}$, că $\omega\nu^{s-1} \equiv 0 \pmod{\pi}$; urmînd aceeași cale se ajunge la concluzia că $\omega\nu \equiv \omega\zeta_t \equiv 0 \pmod{\pi}$ cu $\omega \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, ceea ce contrazice faptul că ν și ζ_t nu au divizori comuni cu π, deci trebuie să admitem că ζ_t este o unitate în raport cu π. În acest fel teorema este demonstrată cu $\delta = \zeta_t$ și $\xi_t = \zeta_{t-1}$. Importanța acestei demonstrații constă în aceea că utilizează metoda inducției complete. Vom formula teorema demonstrată astfel:

Teorema 9.1. *Dacă μ și ν sînt doi întregi ai lui Dirichlet primi între ei față de π, atunci există întregul ξ al lui Dirichlet astfel ca $\delta = \mu + \nu\xi$ să fie o unitate în raport cu π.*

Teorema 9.2. *Condiția necesară și suficientă ca întregii lui Dirichlet μ și ν să nu aibă divizori comuni cu π este ca să existe în $\mathfrak{J}[i, \theta]$ doi întregi σ și τ astfel ca*

$$\sigma\mu + \tau\nu = 1 \pmod{\pi}.$$

Necesitatea acestei relații rezultă din faptul că cel mai mare divizor comun $\delta = \mu + \nu\xi$ în raport cu π al întregilor lui Dirichlet μ și ν primi între ei față de π este o unitate în raport cu π, deci există $\zeta \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ astfel încît $\zeta\delta \equiv 1 \pmod{\pi}$ și atunci $\zeta\delta = \zeta\mu + (\zeta\xi)\,\nu \equiv 1 \pmod{\pi}$ cu $\sigma = \zeta$, $\tau = \zeta\xi$. Condiția este suficientă, deoarece dacă $1 \equiv \sigma\mu + \tau\nu \pmod{\pi}$, atunci pentru orice $\omega \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ pentru care avem $\omega\mu \equiv \omega\nu \equiv 0 \pmod{\pi}$ obținem $\omega \equiv \sigma(\omega\mu) + \tau(\omega\nu) \equiv 0 \pmod{\pi}$, deci μ și ν nu au divizori comuni cu π.

10. *Vom numi divizori improprii în raport cu π* ai întregului μ al lui Dirichlet unitățile în raport cu π și numerele asociate cu μ în raport cu π; bineînțeles că printre numerele asociate cu μ în raport cu π figurează și μ. Ceilalți divizori în raport cu π ai lui μ vor fi numiți *divizori proprii în raport cu π* ai lui μ.

Vom defini întregii lui Dirichlet *primi față de π* printr-una din proprietățile de mai jos, despre care vom demonstra că sînt echivalente.

1°. *Ω nu are divizori proprii în raport cu π, însă nu este o unitate în raport cu π.*

2°. *Orice întreg al lui Dirichlet sau este divizibil prin* Ω *în raport cu* π *sau este prim cu* Ω *față de* π.

3°. *Un produs de întregi ai lui Dirichlet este divizibil prin* Ω *în raport cu* π *numai dacă unul din factori este divizibil prin* Ω *în raport cu* π, Ω *nefiind o unitate în raport cu* π.

Pentru a arăta echivalența dintre aceste trei definiții este suficient de a arăta că 1° atrage 2°, 2° atrage 3° și 3° atrage 1°.

Să presupunem că $\Omega \in \mathfrak{J}\,[i, \theta]$ nu are divizori proprii în raport cu π și fie α un întreg al lui Dirichlet. Cel mai mare divizor comun în raport cu π al întregilor α și Ω fiind δ înseamnă că există un întreg ξ al lui Dirichlet astfel încît $\delta = \alpha + \Omega\xi$; δ divide atît pe Ω, cît și pe α în raport cu π; δ este, însă, un divizor impropriu al lui Ω în raport cu π, prin ipoteză. Dacă δ este asociat cu Ω în raport cu π înseamnă că Ω divide pe α în raport cu π; dacă δ este o unitate în raport cu π, atunci α este prim cu Ω față de π. În această demonstrație faptul că Ω nu este o unitate în raport cu π este esențial, deoarece, după cum s-a arătat în observația de la teorema 8.5, o unitate în raport cu π divide în raport cu π și este, în același timp, primă față de π cu un întreg dat al lui Dirichlet. Deci definiția 1° atrage definiția 2°.

Să presupunem că $\lambda\mu$ este un produs de doi întregi λ și μ ai lui Dirichlet divizibil prin întregul $\Omega \in \mathfrak{J}\,[i, \theta]$ care are proprietatea 2°. Să admitem că λ nu este divizibil prin Ω în raport cu π, atunci, însă, λ este prim cu Ω față de π. În aceste condiții, rezultă, imediat, că μ este divizibil prin Ω în raport cu π conform teoremei 8.4 deci definiția 2° atrage definiția 3°. Faptul că Ω verifică proprietatea 2° ne arată că Ω nu este o unitate în raport cu π.

Fie Ω un întreg al lui Dirichlet care are proprietatea 3° și fie ν unul dintre divizorii lui Ω în raport cu π, atunci există un întreg al lui Gauss z prim cu π astfel încît $\frac{z\,\Omega}{\nu} = \chi$ să fie un întreg al lui Dirichlet; avem $\frac{1 \cdot \nu\chi}{\Omega} = z \in \mathfrak{J}\,[i, \theta]$, deci Ω divide produsul $\nu\chi$ în raport cu π, deci Ω divide neapărat unul dintre factorii ν și χ în raport cu π. Dacă ν este divizibil prin Ω în raport cu π înseamnă că ν este asociat cu Ω în raport cu π, deci ν este divizor impropriu al lui Ω în raport cu π. Dacă ν nu se divide prin Ω în raport cu π, atunci, deoarece Ω divide produsul $\nu\chi$ în raport cu π, înseamnă că Ω divide în raport cu π pe χ. Dar, din $\frac{z\,\Omega}{\nu} = \chi$ se obține că $\frac{z\,\Omega}{\chi} = \nu \in \mathfrak{J}\,[i, \theta]$, deci χ este asociat cu Ω în raport cu π. Acum, datorită relației $z\,\Omega = \nu\chi$ și conform teoremei 4.3, ν este o unitate în raport cu π, deci este un divizor impropriu al lui Ω. Prin urmare definiția 3° atrage definiția 1°.

T e o r e m a 10.1. *Ω și Ω^* sînt în același timp primi față de* π.

Într-adevăr, dacă ν este un divizor al lui Ω în raport cu π, atunci există $z \in \mathfrak{J}\,[i]$ prim cu π astfel încît $\frac{z\,\Omega}{\nu} = \chi \in \mathfrak{J}\,[i, \theta]$, deci $z\,\Omega = \nu\chi$ și $z\,\Omega^* = \nu^*\chi^*$. După cum se vede, divizorii lui Ω^* în raport cu π se deduc din divizorii lui Ω în raport cu π; Ω fiind prim față de π toți divizorii săi în raport cu π sînt divizori improprii în raport cu π. Fie ν unul dintre divizorii lui Ω în raport cu π. Dacă ν este o unitate în raport cu π, atunci și ν^* este o unitate în raport cu π conform teoremei 3.8; dacă ν este asociat cu Ω în raport cu π, atunci ν^* este asociat cu Ω^* în raport cu π conform teoremei 4.2, deci odată cu Ω și Ω^* este prim față de π.

Teorema 10.2. *Dacă* Ω *este prim față de* π, *atunci* $N_r(\Omega)$ *este divizibilă cu* π, deoarece dacă $N_r(\Omega)$ nu se divide cu π, atunci Ω este o unitate în raport cu π, ceea ce contrazice definiția dată pentru numărul prim față de π.

Teorema 10.3. *Dacă* Ω *este prim față de* π *și dacă întregul lui Gauss* z *este prim cu* π, *atunci din* $z\Omega = \lambda\mu$ *se deduce că sau* $N_r(\lambda)$ *sau* $N_r(\mu)$ *este primă cu* π.

Într-adevăr, datorită relației $z\Omega = \lambda\mu$, $z \in \mathfrak{J}[i]$ fiind prim cu π, și a faptului că Ω este prim față de π rezultă că Ω este asociat în raport cu π cu unul dintre factori, de exemplu cu λ și atunci μ, conform teoremei 4.3, este o unitate în raport cu π, deci $N_r(\mu)$ este primă cu π. În acest caz $N_r(\lambda)$ se divide cu π, datorită relației $z^2 N_r(\Omega) = N_r(\lambda)\, N_r(\mu)$ și a teoremei precedente.

Teorema 10.4. *Doi întregi ai lui Dirichlet* Ω_1 *și* Ω_2 *primi față de* π *sînt sau asociați în raport cu* π, *sau nu au divizori comuni cu* π.

Într-adevăr, Ω_1 fiind prim față de π, atunci Ω_2 este sau divizibil prin Ω_1 în raport cu π sau este prim cu Ω_1 față de π. În cazul cînd Ω_2 este divizibil prin Ω_1 în raport cu π, și cum Ω_2 este și el prim față de π, rezultă că Ω_2 este asociat cu Ω_1 în raport cu π.

Teorema 10.5. *Dacă* Ω *este prim față de* π *și nu divide pe* μ *în raport cu* π, *atunci există întregii* σ *și* τ *ai lui Dirichlet astfel încît*

$$\sigma\Omega + \tau\mu \equiv 1 \pmod{\pi}.$$

Într-adevăr, dacă Ω nu divide pe μ în raport cu π, atunci Ω, fiind prim față de π, este prim cu μ față de π. Se utilizează, acum, teorema 9.2 și se obține congruența din enunț.

11. Existența întregilor lui Dirichlet primi față de π, precum și modul de a-i obține efectiv va reieși din cele ce urmează. Să considerăm toate clasele de resturi modulo π; ele sînt de trei categorii:

Cele ale căror elemente au toate normele relative prime cu π; aceste clase conțin numai unități în raport cu π.

Cele ale căror elemente au toate normele relative divizibile cu π^2; aceste clase au toate elementele divizibile prin π.

Celelalte clase. Acestea conțin fiecare cel puțin un întreg cu norma relativă divizibilă prin π; atunci toți întregii din această clasă au normele relative divizibile cu π, dar nu toate normele relative ale întregilor din aceeași clasă sînt divizibile și prin π^2. Dat fiind întregul prim π al lui Gauss, în $\mathfrak{J}[i, \theta]$ pot să existe sau nu astfel de clase de resturi. Cu alte cuvinte, pot să existe sau nu elemente cu norma relativă divizibilă prin π, dar nu și prin π^2.

Prin definiție, întregul prim π al lui Gauss este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, dacă nu există întregi ai lui Dirichlet cu norma relativă divizibilă prin π, putînd, totuși, să existe întregi ai lui Dirichlet cu norma relativă divizibilă prin π la o putere oarecare.

Teorema 11.1. *Dacă* π *este prim în* $\mathfrak{J}[i, \theta]$, *atunci* π *este prim față de* π, deoarece dacă π este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$ și ν este un divizor al lui π în raport cu π, atunci există z întreg al lui Gauss prim cu π astfel încît $z\pi = \nu\chi$ cu $\chi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$. Din $z^2\pi^2 = N_r(\nu)\, N_r(\chi)$ și cum π este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$ rezultă că sau $N_r(\nu)$ sau $N_r(\chi)$ este primă cu π. Dacă $N_r(\nu)$ este primă cu π, atunci ν este o unitate în raport cu π. Dacă $N_r(\nu)$ nu este primă cu π, atunci $N_r(\chi)$ este primă cu π, deci χ este o unitate în raport cu π. Însă, în acest caz, conform teoremei 4.4 rezultă că ν este asociat cu π în raport cu π. Deci π, neavînd decît divizori improprii în raport cu π, este prim față de π.

Teorema 11.2. *Dacă π este prim față de π, atunci π este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$*, deoarece dacă π nu este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, atunci există un întreg $\mu \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ cu $N_r(\mu) \equiv 0 \pmod{\pi}$ și $N_r(\mu) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$; deci $N_r(\mu) = z\pi$, z fiind prim cu π, deci $z\pi = \mu\mu^*$. Prin urmare π este divizibil prin μ și μ^* în raport cu π. Dar μ și μ^* nu sînt unități în raport cu π, deoarece $N_r(\mu)$ și $N_r(\mu^*)$ nu sînt prime cu π. De asemenea μ, deci și μ^*, nu poate fi asociat cu π în raport cu π, deoarece atunci μ^*, respectiv μ, ar fi asociat cu π în raport cu π și, în același timp, ar fi o unitate în raport cu π, conform teoremei 4.2 și teoremei4.3 ceea ce ar însemna că π este o unitate în raport cu π; aceasta este însă imposibil. Deci π are divizori proprii în raport cu π ceea ce contrazice presupunerea că π este prim față de π.

Teorema 11.3. *Dacă π este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$ și nu divide pe μ atunci există întregii σ și τ ai lui Dirichlet astfel încît*

$$\sigma\pi + \tau\mu = 1.$$

Într-adevăr, $\pi \in \mathfrak{J}[i]$ nedivizîndu-l pe $\mu \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ nu-l va divide nici în raport cu π, deoarece dacă l-ar divide pe μ în raport cu π, atunci μ ar fi divizibil cu π conform teoremei 2.2. Prin urmare, π fiind prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, este prim și față de π, iar, deoarece nu divide pe μ în raport cu π, urmează că π este prim cu μ față de π, deci conform teoremei 9.2 există întregii σ_1 și τ cu $\sigma_1\pi + \tau\mu \equiv 1 \pmod{\pi}$, deci există σ și τ astfel încît $\sigma\pi + \tau\mu = 1$.

Dacă π nu este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, atunci există întregi ai lui Dirichlet Ω cu $N_r(\Omega) \equiv 0 \pmod{\pi}$ și $N_r(\Omega) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$, deci clasa de resturi Ω modulo π are toate elementele cu norma relativă divizibilă prin π, dar unele din ele, de exemplu Ω, nu au norma relativă divizibilă prin π^2.

Fie ϖ un întreg al unei astfel de clase. Să presupunem că norma relativă a lui ϖ este divizibilă prin π, dar nu și prin π^2, adică $N_r(\varpi) = z\pi$, z fiind un întreg al lui Gauss prim cu π, deci

$$z\pi = \varpi\varpi^*$$

Teorema 11.4. *ϖ și ϖ^* sînt primi față de π*, deoarece dacă ϖ nu ar fi prim față de π ar avea un divizor propriu ν în raport cu π, atunci ar exista întregul lui Gauss z' prim cu π astfel ca $z'\varpi = \nu\chi$, $\chi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ și deci $z'\varpi^* = \nu^*\chi^*$. Rezultă că $\nu\chi\nu^*\chi = N_r(\nu)$. $N_r(\chi) = z'^2\,\varpi\varpi^* = z'^2 z\pi$ sau $N_r(\nu).N_r(\chi) = z'^2 z\pi$; deoarece ν este un divizor propriu în raport cu π al lui ϖ avem $N_r(\nu) = \pi x$, deci $z'^2 z = xN_r(\chi)$; deoarece $z'^2 z$ este prim cu π rezultă că $N_r(\chi)$ este primă cu π, deci, conform teoremei 4.4, ϖ este asociat cu ν în raport cu π, contrar ipotezei. Acum, conform teoremei 10.1, se deduce că și ϖ^* este prim față de π.

Se observă că teorema 11.1 și teorema 11.4 dovedesc existența întregilor lui Dirichlet primi față de π în cele două cazuri posibile: atunci cînd π este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$ și atunci cînd π nu este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$. Modul de obținere a tuturor întregilor lui Dirichlet primi față de π va rezulta din următoarele două teoreme.

Teorema 11.5. *Condiția necesară și suficientă ca Ω să fie prim față de π, atunci cînd π este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, este ca Ω să fie asociat cu π în raport cu π sau ca $\Omega \equiv 0$ (mod. π), dar $\Omega \not\equiv 0$ (mod. π^2).*

Într-adevăr, dacă Ω este prim față de π, iar π este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, atunci $N_r(\Omega) = z\pi^\nu$ cu $\nu \geqslant 2$ și $z \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π. Deci $z\underbrace{\pi\pi \ldots \pi}_{\nu} = \Omega\Omega^*$, însă

Ω fiind prim față de π și divizînd în raport cu π produsul $\underbrace{\pi\pi \ldots \pi}_{\upsilon}$ divide cel puțin unul din factori în raport cu π, deci divide pe π în raport cu π; dar π este prim față de π, deci π este asociat cu Ω în raport cu π. Prin urmare, există întregul lui Gauss z' prim cu π astfel încît $z'\Omega = \pi\upsilon'$, υ' fiind o unitate în raport cu π. De aici, conform teoremei 2.2, rezultă că $\Omega \equiv 0 \pmod{\pi}$; de asemenea nu putem avea $\Omega \equiv 0 \pmod{\pi^2}$, deoarece, atunci $N_r(\Omega) \equiv 0 \pmod{\pi^4}$ și $z'^2 N_r(\Omega) = \pi^2 N_r(\upsilon')$ cu $N_r(\upsilon')$ primă cu π, ceea ce este contradictoriu. Condiția este suficientă, deoarece dacă $\Omega \equiv 0 \pmod{\pi}$, iar $\Omega \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$, atunci $\Omega = \pi\upsilon$ cu υ o unitate în raport cu π. Într-adevăr, sau $N_r(\upsilon)$ este primă cu π, deci υ este o unitate în raport cu π sau $N_r(\upsilon) \equiv 0 \pmod{\pi^2}$, deoarece $N_r(\upsilon) \equiv 0 \pmod{\pi}$ și $N_r(\upsilon) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$ nu este posibil, π fiind primîn $\Im[i, \theta]$; dar din $N_r(\upsilon) \equiv 0 \pmod{\pi^2}$, conform teoremei 6.2, rezultă că $\upsilon \equiv 0 \pmod{\pi}$, ceea ce contrazice $\Omega \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$. Relația $\Omega = \pi\upsilon$ ne arată că Ω este asociat cu π în raport cu π, υ fiind o unitate în raport cu π. Rămîne de arătat că Ω este prim față de π dacă Ω este asociat cu π în raport cu π, iar π este prim față de π. Să presupunem că Ω are un divizor propriu ν în raport cu π; atunci există z'' prim cu π astfel încît $z''\Omega = \nu\chi$ cu $\chi \in \Im[i, \theta]$, deci ținînd seama și de $z'\Omega = \pi\upsilon'$, rezultă că $z'\nu\chi = \pi z''\upsilon'$, deci ν divide pe π în raport cu π. Dar π este prim față de π, deci ν este divizor impropriu al lui π în raport cu π, prin urmare ν este sau o unitate în raport cu π sau este asociat cu π în raport cu π, deci este asociat cu Ω în raport cu π, ceea ce este contradictoriu. Așadar Ω nu are decît divizori improprii în raport cu π, deci Ω este prim față de π.

Teorema 11.6. *Condiția necesară și suficientă ca Ω să fie prim față de π, atunci cînd π nu este prim în $\Im[i, \theta]$, este ca Ω să fie asociat în raport cu π cu cel puțin unul dintre întregii lui Dirichlet $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}^*$ din relația $z\pi = \mathfrak{w}\mathfrak{w}^*$, $z \in \Im[i]$ fiind prim cu π, sau ca $N_r(\Omega) \equiv 0$ (mod. π), dar $N_r(\Omega) \not\equiv 0$ (mod. π^2).*

Într-adevăr, dacă Ω este prim față de π, iar π nu este prim în $\Im[i, \theta]$, atunci $N_r(\Omega) = z_1\pi^\nu$ cu $\nu \geqslant 1$ și $z_1 \in \Im[i]$ prim cu π. Deci $z_1 \underbrace{\pi\pi \ldots \pi}_{\upsilon} = \Omega\Omega^*$, iar Ω fiind prim față de π și divizînd în raport cu π produsul $\underbrace{\pi\pi \ldots \pi}_{\upsilon}$ divide cel puțin unul din factori în raport cu π, deci divide pe π în raport cu π. Prin urmare există $z' \in \Im[i]$ prim cu π astfel încît $z'\pi = \Omega\chi$ cu $\chi \in \Im[i, \theta]$. Dar $z\pi = \mathfrak{w}\mathfrak{w}^*$, deci $z'\mathfrak{w}\mathfrak{w}^* = \Omega(z\chi)$; Ω fiind prim față de π și divizînd în raport cu π produsul $\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*$ divide cel puțin unul din factori în raport cu π, deci Ω divide în raport cu π cel puțin unul dintre întregii lui Dirichlet $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}^*$, deci Ω este asociat în raport cu π cu cel puțin unul dintre întregii lui Dirichlet $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}^*$, deoarece atît $\mathfrak{w}$ cît și $\mathfrak{w}^*$ sînt primi față de π. Să presupunem că Ω este asociat cu $\mathfrak{w}$ în raport cu π, deci există $z'' \in \Im[i]$ prim cu π astfel încît $z''\mathfrak{w}\Omega = \mathfrak{w}\upsilon$ cu υ o unitate în raport cu π, deci $z''^2 N_r(\Omega) = N_r(\mathfrak{w}) N_r(\upsilon)$ sau $z''^2 N_r(\Omega) = z N_r(\upsilon)\pi$. Prin urmare, $N_r(\Omega) \equiv 0 \pmod{\pi}$, dar $N_r(\Omega) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$. Condiția este suficientă, deoarece dacă $N_r(\Omega) \equiv 0 \pmod{\pi}$ și $N_r(\Omega) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$, atunci $N_r(\Omega) = z'''\pi$ cu z''' prim cu π, deci $\Omega\Omega^* = z'''\pi$ de unde conform teoremei 11.4, Ω este prim față de π. La fel ca pentru condiția necesară se demonstrează că Ω este asociat în raport cu π cu cel puțin unul dintre $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}^*$ ceea ce înseamnă că

întregul lui Dirichlet Ω care verifică congruențele $N_r(\Omega) \equiv 0 \pmod{\pi}$ și $N_r(\Omega) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$ este asociat în raport cu π cu ϖ sau cu ϖ^*. Rămîne să mai arătăm că dacă Ω este asociat în raport cu π cu cel puțin unul dintre ϖ, ϖ^*, atunci Ω este prim față de π. În acest scop, să presupunem că Ω este asociat cu ϖ în raport cu π; atunci $z''\Omega = \varpi\upsilon$ cu υ o unitate în raport cu π. Ca la condiția necesară, se demonstrează că $N_r(\Omega) \equiv 0 \pmod{\pi}$, dar $N_r(\Omega) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$, deci Ω este prim față de π.

După cum se constată, denumirea de întreg prim π al lui Gauss *prim în* $\mathfrak{J}[i, \theta]$ este neobișnuită și chiar improprie, dar ea se justifică prin aceea că întregii primi π ai lui Gauss, primi în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, sînt primi față de π și reciproc. În acest sens, în cazul cînd π este neprim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, putem vorbi de o *descompunere a numărului prim* π *al lui Gauss* dacă în relația $z'\pi = \alpha\beta$ cu $z' \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π cel puțin unul dintre α și β este prim față de π. Vom arăta că:

Teorema 11.7. *Într-o descompunere a numărului prim* π *al lui Gauss neprim în* $\mathfrak{J}[i]$:

$$z'\pi = \alpha\beta$$

$z' \in \mathfrak{J}[i]$ *fiind prim cu* π, β *este prim față de* π *odată cu* α, β *fiind asociat cu* ϖ^* *în raport cu* π, *dacă* α *este asociat cu* ϖ *în raport cu* π.

Într-adevăr, odată cu relația $z'\pi = \alpha\beta$ avem și relația $z\pi = \varpi\varpi^*$ cu z' și $z \in \mathfrak{J}[i]$, primi cu π. Deci $z\alpha\beta = z'\varpi\varpi^*$; să presupunem că α este asociat cu ϖ în raport cu π, conform teoremei precedente, α fiind prim față de π, deci există $z'' \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π și υ o unitate în raport cu π astfel încît $z''\alpha = \varpi\upsilon$; considerînd și relația $z\alpha\beta = z'\varpi\varpi^*$ seconstată că $z\varpi\upsilon\beta = z'z''\varpi\varpi^*$ sau $z\upsilon\beta = z'z''\varpi^*$, deci β este asociat cu ϖ^* în raport cu π și, conform teoremei precedente, β este prim față de π.

Nu este cazul de a vorbi despre o descompunere a numărului prim π al lui Gauss, dacă în relația $z'\pi = \alpha\beta$ cu $z' \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π nici α și nici β nu sînt primi față de π, deoarece:

Teorema 11.8. *Dacă în relația* $z'\pi = \alpha\beta$ *cu* $z' \in \mathfrak{J}[i]$ *prim cu* π *nici* α *și nici* β *nu sînt primi față de* π, *atunci unul dintre* α *și* β *este o unitate în raport cu* π, *iar celălalt este divizibil prin* π.

Într-adevăr, α nefiind prim față de π, atunci, conform teoremei 11.6 sau $N_r(\alpha)$ este primă cu π sau $N_r(\alpha) \equiv 0 \pmod{\pi^2}$. Să luăm cazul cînd $N_r(\alpha)$ este primă cu π, atunci α este o unitate în raport cu π, iar relația $z'\pi = \alpha\beta$ ne dă $z'\alpha^*\pi = N_r(\alpha)\beta$, deci β este divizibil prin π în raport cu π, deci β este divizibil prin π, conform teoremei 2.2. Dacă $N_r(\alpha) \equiv 0 \pmod{\pi^2}$, atunci $z'\pi = \alpha\beta$ ne dă $z'^2\pi^2 = N_r(\alpha)N_r(\beta)$ deci $N_r(\beta)$ este primă cu π; atunci β este o unitate în raport cu π, iar α este divizibil prin π, după o demonstrație analogă, ca mai sus.

Dacă π este neprim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$ vom denumi drept *factor prim al lui* π *în raport cu* π orice întreg al lui Dirichlet prim față de π.

Teorema 11.9. *Dacă* π *este neprim în* $\mathfrak{J}[i, \theta]$ *și dacă nici un factor prim al lui* π *în raport cu* π *nu divide pe* μ *în raport cu* π, *atunci există întregii* σ *și* τ *ai lui Dirichlet astfel ca*

$$\sigma\pi + \tau\mu = 1.$$

Într-adevăr, fie ϖ un factor prim al lui π în raport cu π; ϖ este prim față de π și deoarece nu divide pe μ în raport cu π, conform teoremei 10.5, există întregi ai lui Dirichlet σ' și τ' astfel ca

$$\sigma'\varpi + \tau'\mu \equiv 1 \pmod{\pi}.$$

Pentru același motiv, există întregi ai lui Dirichlet σ'' și τ'' astfel încît

$$\sigma''\varpi^* + \tau''\mu \equiv 1 \pmod{\pi}$$

deci $\sigma'\sigma''\varpi\varpi^* + \mu(\sigma'\tau''\varpi + \sigma''\tau'\varpi^* + \tau'\tau''\mu) \equiv 1 \pmod{\pi}$. Dar $\varpi\varpi^* = z\pi$, $z \in \mathfrak{J}[i]$ fiind prim cu π, deci cu $\tau = \sigma\tau''\varpi + \sigma''\tau\varpi^* + \tau'\tau''\mu$ avem $\tau\mu \equiv 1 \pmod{\pi}$, deci există σ astfel încît $\sigma\pi + \tau\mu = 1$.

12. În general, π fiind neprim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, cei doi factori ai lui π în raport cu π, anume ϖ și ϖ^*, nu sînt asociați în raport cu π; dacă ϖ și ϖ^* sînt asociați în raport cu π, atunci există un întreg al lui Gauss z' prim cu π astfel încît să avem $\frac{z'\varpi}{\varpi^*} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ sau $\frac{z'\varpi^2}{N_r(\varpi)} = \frac{z'\varpi^2}{z\pi} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$; z' fiind prim cu π rezultă că ϖ^2 este divizibil prin π, după teorema 2.2. Reciproc, dacă ϖ^2 este divizibil prin π, atunci $\frac{\varpi^2}{\pi} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, deci $\frac{\varpi^2}{\pi} = \frac{z\varpi^2}{z\pi} = \frac{z\varpi^2}{\varpi\varpi^*} = \frac{z\varpi}{\varpi^*} \in \mathfrak{J}[i, \theta]$; z fiind prim cu π urmează că ϖ este divizibil prin ϖ^* în raport cu π. Însă atît ϖ cît și ϖ^* sînt primi față de π, deci ϖ este asociat cu ϖ^* în raport cu π.

Deci putem enunța

Teorema 12.1. *Condiția necesară și suficientă ca cei doi factori primi ai lui π în raport cu π, anume ϖ și ϖ^*, să fie asociați în raport cu π este ca* $\varpi^2 \equiv 0$ (*mod.* π).

Vom studia, acum, congruența $\varpi^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$ și nu vom reține decît soluțiile care sînt factori primi ai lui π în raport cu π. Pentru aceasta este necesar și suficient să studiem sistemul de congruențe.

$\varpi^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, $N_r(\varpi) \equiv 0 \pmod{\pi}$ și $N_r(\varpi) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$, conform teoremei 11.6. Acest sistem se poate scrie și astfel: $\varpi^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, $\varpi\varpi^* \equiv 0 \pmod{\pi}$ și $\varpi\varpi^* \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$. Adunînd primele două congruențe se obține $\varpi(\varpi + \varpi^*) \equiv 0 \pmod{\pi}$. Dar $\varpi + \varpi^* \in \mathfrak{J}[i]$ și deci, sau $\varpi + \varpi^* \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, ceea ce, conform teoremei 2.2 și congruenței $\varpi(\varpi + \varpi^*) \equiv 0 \pmod{\pi}$, dă $\varpi \equiv 0 \pmod{\pi}$ contrazicînd $\varpi\varpi^* \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$ sau $\varpi + \varpi^* \equiv 0 \pmod{\pi}$. Sistemul de congruențe $\varpi\varpi^* \equiv 0 \pmod{\pi}$, $\varpi + \varpi^* \equiv 0 \pmod{\pi}$ este echivalent cu sistemul de congruențe $\varpi\varpi^* \equiv 0 \pmod{\pi}$, $\varpi^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$ în cazul cînd $\varpi\varpi^* \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$. Punînd $\varpi = \alpha + \beta\theta$, obținem

$$\varpi\varpi^* = \begin{cases} \alpha^2 + \alpha\beta + \dfrac{1-\delta}{4}\beta^2 = \dfrac{1}{4}[(2\alpha+\beta)^2 - \delta\beta^2] \text{ dacă } \delta \equiv 1 \pmod 4 \\ \alpha^2 + i\alpha\beta - \dfrac{1+\delta}{4}\beta^2 = \dfrac{1}{4}[(2\alpha+i\beta)^2 - \delta\beta^2] \text{ dacă } \delta \equiv 3 \pmod 4 \\ \alpha^2 + (1-i)\alpha\beta + i\dfrac{\delta-1}{2}\beta^2 = \\ \quad \dfrac{1}{2i}[\{(1+i)\alpha+\beta\}^2 - \delta\beta^2] \quad \text{dacă} \begin{cases} \delta \equiv 1+2i \pmod 4 \\ \delta \equiv 3+2i \pmod 4 \end{cases} \\ \alpha^2 - \delta\beta^2 \quad \text{dacă } \delta \text{ este diferit de valorile de mai sus,} \end{cases}$$

$$\varpi + \varpi^* = \begin{cases} 2\alpha + \beta & \text{dacă } \delta \equiv 1 \pmod 4 \\ 2\alpha + i\beta & \text{dacă } \delta \equiv 3 \pmod 4 \\ [(1+i)\alpha + \beta](1-i) & \text{dacă } \begin{cases} \delta \equiv 1 + 2i \pmod 4 \\ \delta \equiv 3 + 2i \pmod 4 \end{cases} \\ 2\alpha \quad \text{dacă } \delta \text{ este diferit de valorile de mai sus.} \end{cases}$$

Din aceste expresii se vede, în cazul cînd $\pi \neq 1 + i$, că din $\varpi + \varpi^* \equiv 0 \pmod \pi$ sau $(\varpi + \varpi^*)^2 \equiv 0 \pmod{\pi^2}$ și din cea de a doua formă a lui $\varpi\varpi^* \equiv 0 \pmod \pi$ obținem $\delta\beta^2 \equiv 0 \pmod \pi$, dar $\delta\beta^2 \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$, deci $\delta \equiv 0 \pmod \pi$ cu $\beta \not\equiv 0 \pmod \pi$. Reciproc, dacă $\delta \equiv 0 \pmod \pi$, $\beta \not\equiv 0 \pmod \pi$ și $\varpi + \varpi^* \equiv 0 \pmod \pi$ se vede că $\varpi\varpi^* \equiv 0 \pmod \pi$, dar $\varpi\varpi^* \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$. Dacă $\pi = 1 + i$, iar $\delta \equiv 1 \pmod 4$ sau $\delta \equiv 3 \pmod 4$, din $\varpi + \varpi^* \equiv 0 \pmod{1+i}$ rezultă că $\beta \equiv 0 \pmod{1+i}$; apoi din prima formă a lui $\omega\omega^*$ rezultă și $\alpha \equiv 0 \pmod{1+i}$, ceea ce contrazice $\varpi\varpi^* \not\equiv 0 \pmod{(1+i)^2}$. Prin urmare, cazul $\pi = 1 + i$, iar $\delta \equiv 1 \pmod 4$ sau $\delta \equiv 3 \pmod 4$ nu trebuie luat în considerație. Dacă $\pi = 1 + i$, iar $\delta \not\equiv 1 \pmod 4$ și $\delta \not\equiv 3 \pmod 4$, atunci $\varpi + \varpi^* \equiv 0 \pmod{1+i}$ este satisfăcută identic și rămîne de examinat congruența $\varpi\varpi^* \equiv 0 \pmod{1+i}$ împreună cu $\varpi\varpi^* \not\equiv 0 \pmod{(1+i)^2}$. Vom căuta, deci, soluțiile congruenței

$$\alpha^2 + (1-i)\alpha\beta + i\frac{\delta-1}{2}\beta^2 \equiv 0 \pmod{1+i} \text{ dacă } \begin{cases} \delta \equiv 1 + 2i \pmod 4 \\ \delta \equiv 3 + 2i \pmod 4 \end{cases}$$

și ale congruenței $\alpha^2 - \delta\beta^2 \equiv 0 \pmod{1+i}$ dacă $\delta \not\equiv 1, \not\equiv 3, \not\equiv 1+2i, \not\equiv 3+2i \pmod 4$, lăsînd de o parte soluțiile care nu verifică $\varpi\varpi^* \not\equiv 0 \pmod{(1+i)^2}$. Nu putem lua $\beta \equiv 0 \pmod{1+i}$, pentru că atunci și $\alpha \equiv 0 \pmod{1+i}$, ceea ce contrazice $\varpi\varpi^* \not\equiv 0 \pmod{(1+i)^2}$. Trebuie, deci, ca $\beta \equiv 1 \pmod{1+i}$. Dacă $\delta \equiv 1 + 2i \pmod 4$ sau $\delta \equiv 3 + 2i \pmod 4$, condiția $\alpha^2 + (1-i)\alpha\beta + i\frac{\delta-1}{2}\beta^2 \equiv 0 \pmod{1+i}$ devine $\alpha^2 + i\frac{\delta-1}{2} \equiv 0 \pmod{1+i}$. Dacă $\delta \equiv 1 + 2i \pmod 4$, atunci $\frac{\delta-1}{2} \equiv i \pmod 2$, deci $\alpha^2 \equiv 1 \pmod{1+i}$ de unde se deduce $\alpha \equiv 1 \pmod{1+i}$. Însă $\alpha \equiv 1 \pmod{1+i}$ înseamnă $\alpha = 1 + \zeta_1(1+i)$ cu $\zeta_1 \in \mathfrak{J}[i]$, deci $\alpha^2 = 1 + 2\zeta_1(1+i) + \zeta_1^2(1+i)^2$, așadar $\alpha^2 \equiv 1 \pmod{(1+i)^2}$; în același mod, se arată că dacă $\beta \equiv 1 \pmod{1+i}$, atunci $\beta^2 \equiv 1 \pmod{(1+i)^2}$. Apoi $\alpha = 1 + \zeta_1(1+i)$, $\beta = 1 + \zeta_2(1+i)$ atrage $\alpha\beta = 1 + (1+i)(\zeta_1 + \zeta_2) + \zeta_1\zeta_2(1+i)^2$, deci $(1-i)\alpha\beta \equiv 1 - i \pmod{(1+i)^2}$. Prin urmare, $\varpi\varpi^* = \alpha^2 + (1-i)\alpha\beta + i\frac{\delta-1}{2}\beta^2 \equiv 1 + (1-i) - 1 \pmod{(1+i)^2}$ sau $\varpi\varpi^* \equiv -i(1+i) \pmod{(1+i)^2}$, deci $\varpi\varpi^* \equiv 0 \pmod{1+i}^2$, dar $\varpi\varpi^* \not\equiv 0 \pmod{(1+i)^2}$. Dacă $\delta \equiv 3 + 2i \pmod 4$, atunci $\frac{\delta-1}{2} \equiv 1 + i \pmod{(1+i)^2}$ sau $\frac{\delta-1}{2} \equiv 0 \pmod{1+i}$, deci $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{(1+i)}$, de unde se deduce $\alpha \equiv 0 \pmod{(1+i)}$; atunci $\varpi\varpi^* \equiv i(1+i) \pmod{(1+i)^2}$, deci, și în acest caz $\varpi\varpi^* \equiv 0 \pmod{1+i}$, dar $\varpi\varpi^* \not\equiv 0 \pmod{(1+i)^2}$. Dacă $\delta \not\equiv 1, 3, 1+2i, 3+2i \pmod 4$

atunci, deoarece $\beta \equiv 1 \pmod{1+i}$, condiția $\alpha^2 - \delta\beta^2 \equiv 0 \pmod{1+i}$ devine $\delta \equiv \alpha^2 \pmod{1+i}$. Dacă $\alpha \equiv 0 \pmod{1+i}$ avem $\delta \equiv 0 \pmod{1+i}$ și atunci $\varpi\varpi^* = \alpha^2 - \delta\beta^2 \equiv -\delta \pmod{(1+i)^2}$; δ neavînd factori pătrate perfecte și $\delta \equiv 0 \pmod{1+i}$ rezultă că $\varpi\varpi^* \equiv 0 \pmod{1+i}$, însă $\varpi\varpi^* \not\equiv 0 \pmod{(1+i)^2}$. Dacă $\alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)}$ obținem $\delta \equiv 1 \pmod{1+i}$ și atunci $\varpi\varpi^* \equiv 1 - \delta \pmod 2$. Nu putem avea $\delta \equiv 1 \pmod 2$, pentru că, atunci am deduce $\delta \equiv 1, 3, 1+2i, 3+2i \pmod 4$, deci $1 - \delta \equiv 0 \pmod{1+i}$, fără a avea $1 - \delta \equiv 0 \pmod{(1+i)^2}$, deci $\varpi\varpi^* \equiv 0 \pmod{1+i}$, dar $\varpi\varpi^* \not\equiv 0 \pmod{(1+i)^2}$. Rezultatul obținut se poate formula astfel:

Teorema 12.2. *Sistemul de congruențe.*

$$\varpi^2 \equiv 0 \pmod{\pi},\ N_r(\omega) \equiv 0 \pmod{\pi},\ N_r(\omega) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$$

admite soluții, dacă și numai dacă $\delta \not\equiv 1, \not\equiv 3 \pmod 4$ *pentru* $\pi = 1+i$ *și* $\delta \equiv 0 \pmod{\pi}$ *pentru* $\pi \neq 1+i$.

Vom introduce, acum, *discriminantul corpului relativ pătratic al lui Dirichlet prin următoarea*

Definiție: *discriminantul corpului relativ pătratic al lui Dirichlet este* $D = (\theta - \theta^*)^2$ *în care* θ *este:*

$$\theta = \frac{1+\sqrt{\delta}}{2} \quad \text{dacă} \quad \delta \equiv 1 \pmod 4$$

$$\theta = \frac{i+\sqrt{\delta}}{2} \quad \text{dacă} \quad \delta \equiv 3 \pmod 4$$

$$\theta = \frac{1+\sqrt{\delta}}{1+i} \quad \text{dacă} \quad \begin{cases} \delta \equiv 1+2i \pmod 4 \\ \delta \equiv 3+2i \pmod 4 \end{cases}$$

$\theta = \sqrt{\delta}$ dacă δ este diferit de valorile de mai sus.

Deci dacă $\delta \equiv 1 \pmod 4$ avem $\theta^* = \frac{1-\sqrt{\delta}}{2}$, $\theta - \theta^* = \sqrt{\delta}$ și $D = \delta$; dacă $\delta \equiv 3 \pmod 4$ avem $\theta^* = \frac{i-\sqrt{\delta}}{2}$, $\theta - \theta^* = \sqrt{\delta}$ și $D = \delta$; dacă $\delta \equiv 1+2i \pmod 4$ sau $\delta \equiv 3+2i \pmod 4$ avem $\theta = \frac{1-\sqrt{\delta}}{1+i}$, $\theta - \theta^* = (1-i)\sqrt{\delta}$ și $D = -2i\delta$; dacă δ este diferit de valorile de mai sus avem $\theta^* = -\sqrt{\delta}$ și $D = 4\delta$.

Prin urmare:

$D = \delta$ dacă $\delta \equiv 1 \pmod 4$ sau $\delta \equiv 3 \pmod 4$;

$D = -2i\delta$ dacă $\delta \equiv 1+2i \pmod 4$ sau $\delta \equiv 3+2i \pmod 4$,

$D = 4\delta$ dacă δ este diferit de valorile de mai sus.

Teorema 12.3. *Condiția necesară și suficientă ca factorii primi ai lui* π *în raport cu* π *să fie asociați în raport cu* π *este ca* $D \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Condiția este necesară, deoarece dacă factorii primi ai lui π în raport cu π sînt asociați în raport cu π, atunci dacă ϖ este unul dintre factorii primi ai

lui π în raport cu π obținem că $\mathfrak{A}$ este asociat cu $\mathfrak{A}^*$ în raport cu π, $\mathfrak{A}^*$ fiind și el factor prim al lui π în raport cu π conform teoremei 11.4. Atunci, conform teoremei 12.1 avem $\mathfrak{A}^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$ și deci, conform teoremei 11.6, rezultă că sistemul de congruențe $\mathfrak{A}^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, $N_r(\mathfrak{A}) \equiv 0 \pmod{\pi}$, $N_r(\mathfrak{A}) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$ are cel puțin o soluție; prin urmare, datorită teoremei 12.2 și examinînd expresiile care dau pe D, ajungem la concluzia că $D \equiv 0 \pmod{\pi}$. Condiția este suficientă, deoarece dacă $D \equiv 0 \pmod{\pi}$, atunci sau $\delta \not\equiv 1$, $\not\equiv 3 \pmod 4$ cînd $\pi = 1 + i$ sau $\delta \equiv 0 \pmod{\pi}$ cînd $\pi \neq 1 + i$, fiindcă $\delta \equiv 0 \pmod{1 + i}$ este în contrazicere cu $\delta \equiv 1 \pmod 4$ și $\delta \equiv 3 \pmod 4$ care au drept consecință $\delta \equiv 1 \pmod{1 + i}$. Acum, datorită teoremei 12.2, înseamnă că sistemul de congruențe $\mathfrak{A}^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, $N_r(\mathfrak{A}) \equiv 0 \pmod{\pi}$, $N_r(\mathfrak{A}) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$ admite soluții. Fie $\mathfrak{A}$ o soluție a acestui sistem de congruențe. Deoarece $\mathfrak{A}$ verifică $N_r(\mathfrak{A}) \equiv 0 \pmod{\pi}$, $N_r(\mathfrak{A}) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$ se deduce, conform teoremei 11.6 că $\mathfrak{A}$ este un factor prim al lui π în raport cu π, deci și $\mathfrak{A}^*$ este un factor prim al lui π în raport cu π; deoarece $\mathfrak{A}$ verifică și congruența $\mathfrak{A}^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, conform teoremei 12.1, rezultă că $\mathfrak{A}$ este asociat cu $\mathfrak{A}^*$. Prin urmare, conform teoremei 11.6, factorii primi ai lui π în raport cu π sînt asociați în raport cu π.

Întregii lui Gauss π, primi în $\mathfrak{J}[i]$ care divid pe D vor fi numiți *numere critice*.

Teorema 12.4. *Dacă π este un număr critic, atunci π este neprim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$.*

Într-adevăr, dacă π este un număr critic, atunci $D \equiv 0 \pmod{\pi}$. Acum, ca și în demonstrația teoremei precedente, obținem că $\delta \not\equiv 1$, $\not\equiv 3 \pmod 4$ dacă $\pi = 1 + i$ sau $\delta \equiv 0 \pmod{\pi}$ dacă $\pi \neq 1 + i$, apoi referindu-ne la teorema 12.2 deducem că sistemul de congruențe $\mathfrak{A}^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, $N_r(\mathfrak{A}) \equiv 0 \pmod{\pi}$, $N_r(\mathfrak{A}) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$ admite soluții, deci există un întreg al lui Dirichlet $\mathfrak{A}$ astfel încît $N_r(\mathfrak{A}) \equiv 0 \pmod{\pi}$, dar $N_r(\mathfrak{A}) \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$, deci π este neprim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$.

Această teoremă, împreună cu teorema 12.3, reprezintă un criteriu pentru a recunoaște dacă factorii primi ai lui π în raport cu π, anume $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{A}^*$ sînt asociați în raport cu π sau nu după cum π divide sau nu pe D.

Teorema 12.5. *Condiția necesară și suficientă ca $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{A}^*$ să fie factori primi ai lui π în raport cu π, asociați în raport cu π este ca $\mathfrak{A}^2$ să fie asociat cu π în raport cu π.*

Într-adevăr, $\mathfrak{A}$ fiind factor prim al lui π în raport cu π, există $z \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π astfel încît $z\pi = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$, conform teoremei 11.6; $\mathfrak{A}$ fiind asociat în raport cu π cu $\mathfrak{A}^*$, există $z_1 \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π astfel încît $z_1\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}\upsilon$, υ fiind o unitate în raport cu π. Obținem $z_1 z\pi = \mathfrak{A}(z_1\mathfrak{A}^*) = \mathfrak{A}^2\upsilon$, $z' = z_1 z \in \mathfrak{J}[i]$ fiind prim cu π, deci $\mathfrak{A}^2$ este asociat cu π în raport cu π, conform teoremei 4.4. Reciproc, dacă $\mathfrak{A}^2$ este asociat cu π în raport cu π, există $z' \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π astfel ca $z'\pi = \mathfrak{A}^2\upsilon$, υ fiind o unitate în raport cu π, conform teoremei 4.3. Rezultă că $z'\upsilon^*\pi = \omega^2 N_r(\upsilon)$, iar $N_r(\upsilon)$ fiind primă cu π, deducem că $\mathfrak{A}^2 = \pi\chi$ datorită teoremei 2.2; atunci $z'\pi = \pi\chi\upsilon$ sau $z' \cdot 1 = \chi\upsilon$ deci χ este o unitate în raport cu π. Din $\mathfrak{A}^2 = \pi\chi$ obținem $[N_r(\mathfrak{A})]^2 = \pi^2 N_r(\chi)$; π fiind un întreg prim al lui Gauss trebuie ca $N_r(\mathfrak{A}) = \pi z$ și deci $\pi^2 z^2 = \pi^2 N_r(\chi)$ sau $z^2 = N_r(\chi)$, deci z este prim cu π. Prin urmare $z\pi = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$, deci $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{A}^*$ sînt factori ai lui π în raport cu π și deoarece $\mathfrak{A}$ verifică și relația $\mathfrak{A}^2 = \pi\chi$ sau congruența $\mathfrak{A}^2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, datorită teoremei 12.1 rezultă că $\mathfrak{A}$ este asociat cu $\mathfrak{A}^*$ în raport cu π.

Teorema 12.6. *Dacă întregul lui Dirichlet* $\mathfrak{w}$ *verifică relația* $\mathfrak{w}^2 = \pi\upsilon$, π *fiind un întreg prim al lui Gauss, iar* υ *o unitate în raport cu* π, *atunci* $\mathfrak{w}$ *este un factor prim al lui* π *în raport cu* π *asociat cu* $\mathfrak{w}^*$ *în raport cu* π.

Demonstrația acestei teoreme este analogă cu partea corespunzătoare din demonstrația teoremei 12.5. Deosebirea esențială este că în teorema 12.5 se presupune că π este neprim în $\Im[i, \theta]$, ceea ce este necesar pentru demonstrarea condiției necesare, pe cînd în această teoremă nu se face nici o presupunere asupra lui π ci dimpotrivă se demonstrează că π este neprim în $\Im[i, \theta]$, cu ajutorul relației $z\pi = \mathfrak{w}\mathfrak{w}^*$ cu $z \in \Im[i]$ prim cu π, care se obține în ambele cazuri.

Teorema 12.7. *Întregul prim* π *al lui Gauss, neprim în* $\Im[i, \theta]$ *se descompune într-un produs* $z\pi = \mathfrak{w}\mathfrak{w}^*$ *de doi întregi ai lui Dirichlet* $\mathfrak{w}$ *și* $\mathfrak{w}^*$, z *fiind prim cu* π, *iar* $\mathfrak{w}$ *și* $\mathfrak{w}^*$ *fiind primi față de* π; *în această descompunere sau* $\mathfrak{w}$ *și* $\mathfrak{w}^*$ *nu au divizori comuni cu* π *sau sînt asociați în raport cu* π.

Această teoremă se demonstrează ținînd seama de teorema 11.4 și de teorema 10.4.

Vom spune că π *este de categoria I-a* dacă $\mathfrak{w}$ și $\mathfrak{w}^*$ nu sînt asociați în raport cu π și vom spune că π *este de categoria a II-a* dacă $\mathfrak{w}$ și $\mathfrak{w}^*$ sînt asociați în raport cu π.

13. Vom examina, acum, modul cum intervin, în structura unui întreg al lui Dirichlet, întregii primi față de π.

Teorema 13.1. *Dacă există un întreg prim* π *al lui Gauss, prim în* $\Im[i, \theta]$, *care să dividă un întreg dat* Ω *al lui Dirichlet, atunci există un număr finit de întregi primi ai lui Gauss* $\pi_1, \ldots, \pi_r$, *primi în* $\Im[i, \theta]$, *care divid pe* Ω. *Pentru fiecare din ei există un exponent, număr natural,* e_i, *astfel ca* $\pi_i^{e_i}$ *să dividă pe* Ω *dar* $\pi_i^{e_i+1}$ *să nu-l dividă*; Ω *este divizibil prin* $\pi_1^{e_1} \ldots \pi_r^{e_r}$, *iar*

$$\Omega_1 = \frac{\Omega}{\pi_1^{e_1} \ldots \pi_r^{e_r}}$$

nu este divizibil prin nici un întreg prim al lui Gauss, prim în $\Im[i, \theta]$.

Într-adevăr, dacă π este un întreg prim al lui Gauss, prim în $\Im[i, \theta]$, care divide pe Ω, atunci $\Omega = \pi\chi$ deci $N_r(\Omega) = \pi^2 N_r(\chi)$; așadar π divide pe $N_r(\Omega)$. Deci divizorii lui Ω, care sînt întregi primi ai lui Gauss, trebuind să fie în același timp și divizorii lui $N_r(\Omega)$, sînt în număr finit. Să presupunem că $\Omega = \pi^e \chi_1$, atunci $N_r(\Omega) = \pi^{2e} N_r(\chi_1)$, deci există un exponent e astfel ca π^{e+1} să nu-l dividă pe Ω, deoarece divizorii lui $N_r(\Omega)$ se găsesc în $N_r(\Omega)$ la puteri finite. Pentru fiecare π_i care divide pe Ω vom scrie $\Omega = \pi_i^{e_i}\chi_i$. Deoarece $\pi_1, \ldots, \pi_r$ sînt întregi primi ai lui Gauss ei vor fi primi între ei, deci și $\pi_2^{e_2} \ldots \pi_r^{e_r}$, $\pi_1^{e_1}\pi_3^{e_3} \ldots \pi_r^{e_r}$, $\ldots$, $\pi_1^{e_1} \ldots \pi_{r-1}^{e_{r-1}}$ sînt primi între ei; există, atunci, întregii lui Gauss $h_1, h_2, \ldots, h_r$ astfel încît $h_1\pi_2^{e_2} \ldots \pi_r^{e_r} + h_2\pi_1^{e_1}\pi_3^{e_3} \ldots \pi_r^{e_r} + \ldots + h_r\pi_1^{e_1} \ldots \pi_{r-1}^{e_{r-1}} = 1$ deci

$$\Omega = \Omega\left(h_1\pi_2^{e_2} \ldots \pi_r^{e_r} + h_2\pi_1^{e_1}\pi_3^{e_3} \ldots \pi_r^{e_r} + \ldots + h_r\pi_1^{e_1} \ldots \pi_{r-1}^{e_{r-1}}\right) =$$

$$(h_1\chi_1 + h_2\chi_2 + \ldots + h_r\chi_r).\ \pi_1^{e_1} \ldots \pi_r^{e_r},$$

deci Ω este divizibil prin $\pi_1^{e_1} \ldots \pi_r^{e_r}$.

Dacă $\Omega = \pi_1^{e_1} \ldots \pi_r^{e_r}\Omega_1$ atunci Ω_1 nu este divizibil prin nici un întreg prim π, al lui Gauss, prim în $\Im[i, \theta]$, deoarece dacă Ω_1 ar fi divizibil prin π atunci

π ar divide pe Ω, deci ar fi unul dintre întregii primi ai lui Gauss $\pi_1, \ldots, \pi_r$, de exemplu ar fi π_1 și atunci $\pi_1^{e_1+1}$ l-ar divide pe Ω ceea ce este contradictoriu.

Teorema 13.2. *Dacă μ și ν nu se divid prin nici un întreg prim π al lui Gauss, prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, atunci nici $\mu\nu$ nu se divide prin nici un întreg prim π al lui Gauss, prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$.*

Să presupunem contrariul, adică să presupunem că $\mu\nu = \pi\chi$ cu π un întreg prim al lui Gauss, prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$. Dar π este prim față de π și divizînd în raport cu π produsul $\mu\nu$ divide în raport cu π cel puțin unul din factori. Să admitem că μ se divide în raport cu π prin π; atunci $\mu = \pi\chi_1$ contrar ipotezei. Dacă μ nu se divide în raport cu π prin π, atunci $\nu = \pi\chi_2$, ceea ce este de asemenea contrar ipotezei.

Fie π de categoria I-a.

Teorema 13.3. *Dacă întregul lui Dirichlet Ω nu este o unitate în raport cu π, atunci Ω este divizibil în raport cu π prin $\mathfrak{w}$ sau prin $\mathfrak{w}^*$.*

Într-adevăr, dacă Ω nu este o unitate în raport cu π, atunci $N_r(\Omega)$ este divizibilă prin π, adică $\Omega\Omega^* = \pi\chi$; π fiind de categoria I-a există $z \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π astfel încît $z\pi = \mathfrak{w}\mathfrak{w}^*$, deci $z\Omega\Omega^* = \mathfrak{w}\mathfrak{w}^*\chi$. Întregul lui Dirichlet $\mathfrak{w}$ fiind prim față de π și divizînd în raport cu π produsul $\Omega\Omega^*$ divide în raport cu π cel puțin unul din factori. Deci sau Ω este divizibil în raport cu π prin $\mathfrak{w}$ sau Ω^* este divizibil în raport cu π prin $\mathfrak{w}$ ceea ce înseamnă că Ω este divizibil în raport cu π prin $\mathfrak{w}^*$. Prin urmare, Ω este divizibil în raport cu π prin $\mathfrak{w}$ sau $\mathfrak{w}^*$.

Teorema 13.4. *Dacă $\mathfrak{w}^{e'}$ și $\mathfrak{w}^{*e''}$ va divide în raport cu π pe Ω, atunci $\mathfrak{w}^{e'}\mathfrak{w}^{e''}$ va divide în raport cu π pe Ω.*

Într-adevăr, dacă există z' și $z'' \in \mathfrak{J}[i]$ primi cu π astfel încît $z'\Omega = \mathfrak{w}^{e'}\chi', z''\Omega = \mathfrak{w}^{*e''}\chi''$ cu χ' și $\chi'' \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, atunci $z'z''\Omega = z''\mathfrak{w}^{e'}\chi' = z'\mathfrak{w}^{e''}\chi''$ sau $z''\underbrace{\mathfrak{w}\mathfrak{w}\ldots\mathfrak{w}}_{e'}\chi' = z'\mathfrak{w}^*\mathfrak{w}^{e''-1}\chi''$, deci $\mathfrak{w}^*$ divide în raport cu π pe $\underbrace{\mathfrak{w}\mathfrak{w}\ldots\mathfrak{w}}_{e'}\chi'$ și, fiind prim față de π, divide în raport cu π sau pe $\underbrace{\mathfrak{w}\mathfrak{w}\ldots\mathfrak{w}}_{e'}$ sau pe χ'; π fiind de categoria I-a, $\mathfrak{w}^*$ este prim cu $\mathfrak{w}$ față de π, deci nu divide în raport cu π pe $\underbrace{\mathfrak{w}\mathfrak{w}\ldots\mathfrak{w}}_{e'}$. Prin urmare, χ' se divide prin $\mathfrak{w}^*$ în raport cu π, deci există întregul lui Gauss z''' prim cu π astfel încît $z'''\chi = \omega^*\chi'''$; atunci $z'''z''\mathfrak{w}^{e'}\chi = z'z'''\mathfrak{w}^{*e''}\chi''$ sau $z''\mathfrak{w}^{e'}\mathfrak{w}^*\chi''' = z'z'''\mathfrak{w}^{*e''}\chi''$, de unde $z''\mathfrak{w}^{e'}\chi''' = z'z'''\mathfrak{w}^{*e''-1}\chi$. Continuînd raționamentul, în același mod, ajungem la concluzia că există z prim cu π astfel încît $z\chi' = \mathfrak{w}^{*e''}\chi$, deci $zz'\Omega = \mathfrak{w}^{e'}z\chi' = \mathfrak{w}^{e'}\mathfrak{w}^{*e''}\chi$.

Teorema 13.5. *Condiția necesară și suficientă ca întregul lui Dirichlet Ω să fie divizibil prin $\mathfrak{w}^e$ și $\mathfrak{w}^{*e}$ în raport cu π, $\mathfrak{w}$ și $\mathfrak{w}^*$ fiind factori primi ai lui π în raport cu π, π fiind de categoria I-a, este ca Ω să fie divizibil prin π^e.*

Într-adevăr, datorită teoremei precedente, există un întreg z' al lui Gauss prim cu π astfel încît $z'\Omega = \mathfrak{w}^e\mathfrak{w}^{*e}\chi$ cu $\chi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$, deci: $z'\Omega = \pi^e(z^e\chi)$, deoarece $z\pi = \mathfrak{w}\mathfrak{w}^*$, deci Ω este divizibil prin π^e, conform teoremei 2.2. Reciproc, dacă Ω este divizibil prin π^e, atunci $\Omega = \pi^e\chi'$ și deoarece $z\pi = \mathfrak{w}\mathfrak{w}^*$, z fiind prim cu π, avem $z^e\Omega = \mathfrak{w}^e\mathfrak{w}^{*e}\chi'$, deci Ω este divizibil în raport cu π prin $\mathfrak{w}^e$ și prin $\mathfrak{w}^{*e}$, z^e fiind prim cu π.

Fie π de categoria a II-a.

Teorema 13.6. *Dacă întregul Ω al lui Dirichlet nu este o unitate în raport cu π, atunci Ω este divizibil în raport cu π prin $\mathfrak{w}$.*

Într-adevăr, dacă Ω nu este o unitate în raport cu π, atunci $N_r(\Omega) = \Omega\Omega^*$ este divizibilă prin π, deci $\mathfrak{W}\mathfrak{W}^* = \pi\chi$; π nefiind prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$ există $z \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π astfel încît $z\pi = \mathfrak{W}\mathfrak{W}^*$, deci $z\Omega\Omega^* = \mathfrak{W}\mathfrak{W}^*\chi$. Întregul lui Dirichlet $\mathfrak{W}$ fiind prim față de π și divizînd în raport cu π produsul $\Omega\Omega^*$, divide în raport cu π cel puțin unul din factori. Deci sau Ω este divizibil în raport cu π prin ω sau Ω^* este divizibil în raport cu π prin $\mathfrak{W}$, ceea ce înseamnă că Ω este divizibil în raport cu π prin $\mathfrak{W}^*$. Dar π este de categoria a II-a, deci $\mathfrak{W}^*$ este asociat în raport cu π cu $\mathfrak{W}$ și deci Ω este divizibil în raport cu π prin $\mathfrak{W}$ în toate cazurile.

Vom vorbi despre *o descompunere a unui întreg Ω al lui Dirichlet în raport cu π* dacă în relația $z\,\Omega = \alpha\beta$ cu $z \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π avem că cel puțin unul dintre α și β este prim față de π sau că atît α cît și β sînt unități în raport cu π. Vom arăta că descompunerea unui întreg Ω al lui Dirichlet în raport cu π este unică prin următoarele trei teoreme:

Teorema 13.7. *Dacă π este un întreg prim al lui Gauss, prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, atunci pentru orice întreg al lui Dirichlet Ω există o descompunere în raport cu π*

$$\Omega = \pi^e\,\upsilon,$$

unde υ este o unitate în raport cu π, iar exponentul e este un întreg rațional, pozitiv, definit în mod unic pentru un Ω dat.

Într-adevăr, dacă Ω este o unitate în raport cu π trebuie ca $e = 0$, altfel $N_r(\Omega) \equiv 0 \pmod{\pi}$, ceea ce este contradictoriu; atunci $\upsilon = \Omega$. Dacă Ω nu este o unitate în raport cu π, atunci $N_r(\Omega)$ este divizibilă prin π, deci $\Omega\Omega^* = \pi\chi$; π fiind prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$ este prim și față de π și divizînd pe $\Omega\Omega^*$ în raport cu π divide în raport cu π sau pe Ω sau pe Ω^*, deci în toate cazurile, divide pe Ω în raport cu π și conform teoremei 2.2 avem că $\Omega = \pi\chi_1$ cu $\chi_1 \in \mathfrak{J}[i, \theta]$. Datorită teoremei 13.1 putem scrie că $\Omega = \pi^e(\pi_2^{e_2} \ldots \pi_r^{e_r}\,\Omega_1)$ exponentul e fiind unic determinat, deoarece Ω nu se divide cu π^{e+1}, așa cum s-a arătat în teorema amintită. Punînd $\nu = \pi_2^{e_2} \ldots \pi_r^{e_r}\,\Omega_1$, π_i fiind prim cu π rezultă că υ este o unitate în raport cu π, deoarece $N_r(\nu) = \pi_2^{2e_2} \ldots \pi_r^{2e_r} N_r(\Omega_1) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, altfel Ω_1 s-ar divide prin π, după o demonstrație analogă cu cea de mai sus.

Teorema 13.8. *Dacă π este de categoria I-a, atunci pentru orice întreg al lui Dirichlet Ω există o descompunere în raport cu π*

$$z\,\Omega = \mathfrak{W}^{e'}\,\mathfrak{W}^{*e''}\upsilon,$$

unde $z \in \mathfrak{J}[i]$ este prim cu π, υ este o unitate în raport cu π, iar exponenții e' și e'' sînt întregi raționali, pozitivi unic determinați pentru un Ω dat.

Într-adevăr, sau Ω este o unitate în raport cu π și atunci $z = 1$, $e' = e'' = 0$, $\upsilon = \Omega$ ne dă descompunerea în raport cu π sau Ω nu este o unitate în raport cu π și atunci, după teoremele 13.3 și 13.4 avem $z\,\Omega = \mathfrak{W}^{e'}\,\mathfrak{W}^{*e''}\chi$, $z \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π, iar χ fiind o unitate sau nu în raport cu π. Dacă χ nu este o unitate în raport cu π, atunci după teorema 13.3, χ se divide în raport cu π sau cu $\mathfrak{W}$ sau cu $\mathfrak{W}^*$. Însă avem $z^2 N_r(\Omega) = [N_r(\mathfrak{W})]^{e'+e''} N_r(\chi)$ și deci exponenții e' și e'' nu se pot mări decît pînă la exponenți $e_1' > 0$, $e_1'' > 0$, pentru care suma $e_1' + e_1''$ este egală cu exponentul lui π în $N_r(\Omega)$; atunci χ se transformă în χ_1, care este o unitate în raport cu π. Putem, deci, presupune că exponenții e' și e'' au fost determinați astfel încît $\chi = \upsilon$ este o unitate în raport cu π. Existența unei relații $z\,\Omega = \mathfrak{W}^{e'}\,\mathfrak{W}^{*e''}\upsilon$ cu $z \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π, iar υ o unitate

în raport cu π este, deci, dovedită. Acum, dacă mai avem și o altă descompunere în raport cu π: $z'\,\Omega = \varpi^{g'}\,\varpi^{*g''}\upsilon'$, atunci $zz'\,\Omega = z'\,\varpi^{e'}\,\varpi^{*e''}\upsilon = z\,\varpi^{g'}\,\varpi^{*g''}\upsilon'$. Să presupunem că $e' > g'$, atunci $z'\varpi^{e'-g'}\,\varpi^{*e''}\upsilon = z\varpi^{*g''}\upsilon'$ sau $z\underbrace{\varpi^{*}\ldots\varpi^{*}}_{g''}\upsilon' = z'\,\varpi\,\varpi^{e'-g'-1}\,\varpi^{*e''}\,\upsilon$, deci ϖ divide în raport cu π pe $\underbrace{\varpi^{*}\varpi^{*}\ldots\varpi^{*}}_{g''}\upsilon'$ ceea ce este imposibil. Deci trebuie admis că $e' \leqslant g'$; analog se arată că $e' \geqslant g'$, deci $e' = g'$. La fel se arată că $e'' = g''$.

Teorema 13.9. *Dacă π este de categoria a II-a, atunci pentru orice întreg al lui Dirichlet Ω există o descompunere în raport cu π*

$$z\,\Omega = \varpi^{e}\,\upsilon,$$

unde z este un întreg al lui Gauss prim cu π, υ este o unitate în raport cu π, iar exponentul e este un întreg rațional, pozitiv, definit în mod unic pentru un Ω dat.

Într-adevăr, sau Ω este o unitate în raport cu π și atunci descompunerea în raport cu π este $\Omega = \upsilon$ cu $z = 1$, $e = 0$ sau Ω nu este o unitate în raport cu π și atunci datorită teoremei 13.6 putem scrie $z\,\Omega = \varpi^{e}\,\chi$ cu $z \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π, χ fiind o unitate sau nu în raport cu π. Dacă χ nu este o unitate în raport cu π, atunci, datorită aceleiași teoreme, χ se divide prin ϖ în raport cu π; însă $z^2 N_r(\Omega) = [N_r(\varpi)]^e\, N_r(\chi)$, deci exponentul e nu se poate mări decît pînă la exponentul lui π în $N_r(\Omega)$. Dacă e este mai mic decît exponentul lui π în $N_r(\Omega)$, atunci $N_r(\chi)$ se divide prin π, deci χ nu este o unitate în raport cu π și atunci putem mări exponentul e cel puțin cu 1, χ divizîndu-se în raport cu π cel puțin cu ϖ. În felul acesta rezultă că e este egal cu exponentul lui π în $N_r(\Omega)$, deci este unic determinat pentru un întreg dat Ω al lui Dirichlet, iar $\chi = \upsilon$ este o unitate în raport cu π.

14. O dată stabilită unicitatea descompunerii în raport cu π se poate trece la o teorie multiplicativă a divizibilității în raport cu π, adică de a decide dacă întregul lui Dirichlet este divizibil în raport cu π prin întregul lui Dirichlet ν numai pe baza descompunerilor în raport cu π ale întregilor μ și ν ai lui Dirichlet; de asemenea, pe aceeași cale, se poate calcula și cel mai mare divizor comun în raport cu π al lui μ și ν. În acest scop vom demonstra următoarele teoreme:

Teorema 14.1. *Condiția necesară și suficientă ca μ să fie divizibil prin ν în raport cu π, π fiind un număr prim al lui Gauss, prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, este ca exponentul lui π în μ să fie cel puțin egal cu cel din ν.*

Într-adevăr, putem scrie $\mu = \pi^{e}\,\mu'$, $\nu = \pi^{g}\,\nu'$, μ' și ν' fiind unități în raport cu π. Dacă μ este divizibil prin ν, în raport cu π există $z \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π și $\chi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ astfel încît $z\mu = \nu\chi$, deci $z\,\pi^{e}\,\mu' = \pi^{g}\,\nu'\chi$. Dacă $g > e$, atunci $z\mu' = \pi^{g-e}\nu'\chi$ ceea ce este absurd, deoarece $z\mu'$ este o unitate în raport cu π, iar π este prim față de π. Este necesar, deci, ca $e \geqslant g$. Reciproc, dacă $e \geqslant g$, atunci, $N_r(\nu')$ fiind primă cu π avem $N_r(\nu')\,\mu = \nu'\nu'^{*}\pi^{e}\,\mu' = \nu(\pi^{e-g}\nu'^{*}\mu')$, deci μ este divizibil în raport cu π prin ν.

Teorema 14.2. *Condiția necesară și suficientă ca μ să fie divizibil în raport cu π prin ν, dacă π este de categoria I-a, este ca exponenții factorilor primi ai lui π în raport cu π, anume ai lui ϖ și ϖ^{*}, în μ să fie cel puțin egali cu exponenții respectivi în ν.*

Într-adevăr, putem scrie $z'\mu = \varpi^{e'}\,\varpi^{*e''}\,\upsilon'$, $z''\nu = \varpi^{g'}\,\varpi^{*g''}\,\upsilon''$, z' și z'' fiind întregi ai lui Gauss primi cu π, iar υ', υ'' fiind unități în raport cu π. Dacă ν

divide pe μ în raport cu π, atunci există $z \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π și $\chi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ astfel încît $z\mu = \chi\nu$, deci $zz''(z'\mu) = z'\chi(z''\nu)$ sau $zz''\varpi^{*e'}\varpi^{e''}\upsilon' = z'\chi\varpi^{g'}\varpi^{*g''}\upsilon''$. Dacă $e' < g'$, atunci $zz''\varpi^{*e''}\upsilon' = z'\chi\varpi^{g'-e'}\varpi^{*g''}\upsilon''$ sau $(zz'')\underbrace{\varpi^{*}\ldots\varpi^{*}}_{e''}\upsilon' = (z'\chi\varpi^{g'-e'-1}\varpi^{g''}\upsilon'')\varpi$, ceea ce este imposibil, deoarece ϖ fiind prim față de π și verificînd relația de mai sus trebuie să dividă în raport cu π cel puțin unul din factorii produsului $\underbrace{\varpi^{*}\ldots\varpi^{*}}_{e''}\upsilon'$ și în același timp nu poate să dividă nici unul din factorii acestui produs, ϖ fiind prim cu ϖ^{*} față de π, iar υ' fiind o unitate în raport cu π. Trebuie, deci, ca $e' \geqslant g'$. La fel se arată că este necesară relația $e'' \geqslant g''$. Reciproc, dacă $e' \geqslant g'$ și $e'' \geqslant g''$, atunci, deoarece υ'' este o unitate în raport cu π, $N_r(\upsilon'')$ este primă cu π, deci $z'N_r(\upsilon'')\mu = \upsilon''\upsilon''^{*}\varpi^{e'}\varpi^{*e''}\upsilon' = \varpi^{e'-g'}\varpi^{*e''-g''}\upsilon''^{*}\upsilon z''\nu$, deci $z'N_r(\upsilon'')$ fiind prim cu π, μ este divizibil în raport cu π prin ν.

Teorema 14.3. *Condiția necesară și suficientă ca μ să fie divizibil prin ν în raport cu π, π fiind de categoria a II-a, este ca exponentul factorului prim al lui π în raport cu π, anume al lui ϖ, în μ să fie cel puțin egal cu exponentul său în ν.*

Într-adevăr, putem scrie $z'\mu = \varpi^{e}\upsilon'$, $z''\nu = \varpi^{g}\upsilon''$. Dacă ν divide pe μ în raport cu π există $z \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π și $\chi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$ astfel încît $z\mu = \nu\chi$, deci $zz''(z'\mu) = z'\chi(z''\nu)$ sau $zz''\varpi^{e}\upsilon' = z'\chi\varpi^{g}\upsilon''$. Dacă am avea $e < g$, atunci $zz''\upsilon' = (z'\chi\varpi^{g-e-1}\upsilon'')\varpi$, ceea ce este imposibil, deoarece ϖ nu divide în raport cu π pe υ', υ^{*} fiind o unitate în raport cu π, iar ϖ fiind prim față de π, deci $e \geqslant g$. Reciproc, dacă $e \geqslant g$, atunci $N_r(\upsilon'')$ este primă cu π, υ'' fiind o unitate în raport cu π, deci $z'N_r(\upsilon')\mu = \upsilon''\upsilon''^{*}\varpi^{e}\upsilon' = (\varpi^{e-g}\upsilon''^{*}\upsilon' z'')\nu$, deci μ este divizibil în raport cu π prin ν.

Teorema 14.4. *Cel mai mare divizor comun în raport cu π, π fiind prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, al întregilor lui Dirichlet $\mu = \pi^{e}\upsilon'$ și $\nu = \pi^{g}\upsilon''$, υ' și υ'' fiind unități în raport cu π este π^{h} cu $h = min(e, g)$.*

Într-adevăr, luînd $h = \min(e, g)$, atunci μ și ν sînt divizibili prin π^{h}. Prin urmare un divizor comun în raport cu π al lui μ și ν este π^{h}. Fie, acum, δ cel mai mare divizor comun al lui μ și ν în raport cu π. Putem scrie $\delta = \pi^{k}\delta'$, δ' fiind o unitate în raport cu π; δ fiind cel mai mare divizor comun al lui μ și ν în raport cu π trebuie să existe relația $k \geqslant h$ și în același timp δ fiind și un divizor comun al lui μ și ν în raport cu π trebuie ca $e \geqslant k$, $g \geqslant k$. Deoarece $h = \min(e, g)$ înseamnă că și $h \geqslant k$, deci $k = h$. Pentru că π^{h} este asociat cu δ în raport cu π putem alege drept cel mai mare divizor comun în raport cu π al lui μ și ν pe π^{h}.

Teorema 14.5. *Cel mai mare divizor comun în raport cu π, π fiind de categoria I-a, al lui μ și ν ale căror descompuneri în raport cu π sînt $z'\mu = \varpi^{e'}\varpi^{*e''}\upsilon'$ și $z''\nu = \varpi^{g'}\varpi^{*g''}\upsilon''$ este $\varpi^{h'}\varpi^{*h''}$ cu $h' = min(e', g')$ și $h'' = min(e'', g'')$, ϖ și ϖ^{*} fiind cei doi factori primi ai lui π în raport cu π.*

Într-adevăr, luînd $h' = \min(e', g')$, $h'' = \min(e'', g'')$, atunci un divizor comun în raport cu π al lui μ și ν este $\varpi^{h'}\varpi^{*h''}$. Fie δ cel mai mare divizor comun al lui μ și ν în raport cu π. Pentru δ putem scrie $z'''\delta = \varpi^{k'}\varpi^{*k''}\delta'$, $z''' \in \mathfrak{J}[i]$ fiind prim cu π, iar δ' fiind o unitate în raport cu π; $\varpi^{h'}\varpi^{*h''}$ fiind un divizor comun în raport cu π al lui μ și ν trebuie ca $k' \geqslant h'$, $k'' \geqslant h''$; μ și ν fiind divizibili prin δ în raport cu π trebuie ca $e' \geqslant k'$, $e'' \geqslant k''$; $g' \geqslant k'$, $g'' \geqslant k''$, deci $h' \geqslant k'$, $h'' \geqslant k''$, deoarece $h' = \min(e', g')$, $h'' = \min(e'', g'')$. Deci $k' = h'$, $k'' = h''$. Prin urmare, $\varpi^{h'}\varpi^{*h''}$ este asociat în raport cu π cu δ; pentru acest

motiv vom lua pe $\varpi^{h'}\varpi^{*h''}$ drept cel mai mare divizor comun al lui μ și ν în raport cu π.

Teorema 14.6. *Cel mai mare divizor comun în raport cu* π, π *fiind de categoria a II-a, al lui* μ *și* ν *ale căror descompuneri în raport cu* π *sînt* $z'\mu = \varpi^{e}\rho'$ *și* $z''\nu = \varpi^{g}\upsilon''$ *este* ϖ^{h} *cu* $h = min\ (e, g)$, ϖ *fiind un factor prim al lui* π *în raport cu* π.

Într-adevăr, luînd $h = \min\ (e, g)$ se constată că întregul lui Dirichlet ϖ^{h} este un divizor comun în raport cu π al lui μ și ν. Fie δ cel mai mare divizor comun al lui μ și ν în raport cu π, atunci $z'''\delta = \varpi^{k}\delta'$, $z''' \in \mathfrak{J}[i]$ fiind prim cu π, iar δ' fiind o unitate în raport cu π; ϖ^{h} fiind un divizor comun în raport cu π al lui μ și ν, îl divide pe δ în raport cu π deci $k \geqslant h$. Însă δ divide în raport cu π atît pe μ cît și pe ν, fiind cel mai mare divizor comun în raport cu π al lui μ și ν, deci $e \geqslant k$, $g \geqslant k$. Deoarece $h = \min\ (e, g)$ rezultă că $h \geqslant k$, deci $k = h$ și deci ϖ^{h} este asociat cu δ în raport cu π; putem, deci, alege pe ϖ^{h} drept cel mai mare divizor comun al lui μ și ν în raport cu π.

15. O teorie multiplicativă a divizibilității în raport cu π se conturează și mai precis prin introducerea de *factori primi ideali.*

Vom numi *factori primi ai lui Gauss* întregii primi ai lui Gauss, primi în $\mathfrak{J}[i, \theta]$.

Vom introduce *numerele ideale prime* sau *factori primi ideali* sau *divizori ideali primi* făcînd să corespundă fiecărui întreg prim π al lui Gauss, care nu este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, unul sau doi factori primi ideali și anume:

1) Dacă π se descompune în raport cu π în doi factori neasociați ϖ și ϖ^{*}:

$$z\pi = \varpi\varpi^{*}$$

vom face să corespundă lui π doi factori primi ideali Ω_{I} și Ω_{II}, Ω_{I} fiind corespunzătorul lui ϖ, iar Ω_{II} fiind corespunzătorul lui ϖ^{*} și vom scrie

$$\pi = \Omega_{I}\ \Omega_{II};$$

2) Dacă π este număr critic

$$z\pi = \varpi^{2}\upsilon$$

vom face să-i corespundă lui π un factor prim ideal Ω și vom scrie

$$\pi = \Omega^{2}.$$

Vom spune că întregul lui Dirichlet ω este divizibil prin $\Omega_{I}^{e'}\ \Omega_{II}^{e''}$ dacă, în raport cu $\pi = \Omega_{I}\ \Omega_{II}$, întregul lui Dirichlet ω este divizibil prin $\varpi^{e'}\varpi^{*e''}$; vom spune că ω este divizibil prin Ω^{e} dacă, în raport cu $\pi = \Omega^{2}$, este divizibil prin ϖ^{e}.

Fiind dat un întreg ω al lui Dirichlet acest întreg nu este o unitate în raport cu π decît pentru un număr finit de întregi primi ai lui Gauss, care intră ca factori în structura lui $N_{r}(\omega)$, deci numai pentru un număr finit de întregi primi π ai lui Gauss, neprimi în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, este divizibil prin Ω_{I}, prin Ω_{II} sau prin Ω. Prin urmare, fiind dat un întreg al lui Dirichlet și luînd în considerație cele spuse mai sus, precum și teoremele 13.7, 13.8 și 13.9 care stabilesc unicitatea descompunerii în raport cu π a unui întreg al lui Dirichlet, deducem că există un număr finit de factori primi ai lui Gauss $\pi_{1}, \ldots, \pi_{r}$, un număr finit de factori primi ideali $\Omega_{1,I}, \Omega_{1,II}, \ldots, \Omega_{t,I}, \Omega_{t,II}$ și un număr finit de factori primi ideali $\Omega_{1}, \ldots, \Omega_{s}$ care să dividă pe ω. De asemenea există exponenții

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$; $e_1', e_1'', \ldots, e_t', e_t''$; $e_1, \ldots, e_s$ astfel încît ω să fie divizibil prin $\pi_i^{\varepsilon_i}$, $\Omega_{i,\,\mathrm{I}}^{e_i'}$ $\Omega_{i,\mathrm{II}}^{e_i''}$, $\Omega_i^{e_i}$, dar nici $\pi_i^{\varepsilon_i+1}$, nici $\Omega_{i,\,\mathrm{I}}^{e_i'+1}$, nici $\Omega_{i,\,\mathrm{II}}^{e_i''+1}$, nici $\Omega_i^{e_i+1}$ nu divid pe ω. Vom înțelege cele de mai sus scriind că:

$$\omega = \pi_1^{\varepsilon_1} \ldots \pi_r^{\varepsilon_r} \cdot \Omega_{1,\,\mathrm{I}}^{e_1'} \Omega_{1,\,\mathrm{II}}^{e_1''} \ldots \Omega_{t,\,\mathrm{I}}^{e_t'} \Omega_{t,\,\mathrm{II}}^{e_t''} \Omega_1^{e_1} \ldots \Omega_s^{e_s} .$$

Trebuie adăugat că în această descompunere a lui ω în factori primi ai lui Gauss și factori primi ideali, factorii $\Omega_{i,\,\mathrm{I}}$ și $\Omega_{i,\,\mathrm{II}}$ nu sînt independenți, conform teoremei 13.8, în caz contrar, nu mai poate fi vorba despre unicitatea descompunerii a unui întreg al lui Dirichlet în factori primi ideali.

Cele spuse mai sus se pot formula și astfel:

Teorema 15.1. *Orice întreg al lui Dirichlet ω se poate scrie sub forma*

$$\omega = \prod_{i,j,k} \pi_i^{\varepsilon_i} \Omega_{j,\,\mathrm{I}}^{e_j'} \Omega_{j,\,\mathrm{II}}^{e_j''} \Omega_k^{e_k}$$

exponenții ε_i, e_j', e_j'', e_k, determinați în mod unic pentru un ω dat, avînd următoarele proprietăți:

$\varepsilon_i \geqslant 0$, $e_j' \geqslant 0$, $e_j'' \geqslant 0$, $e_k \geqslant 0$ *oricare ar fi* π_i, $\Omega_{j,\,\mathrm{I}}$, $\Omega_{j,\,\mathrm{II}}$, Ω_k ;

$\varepsilon_i > 0$, $e_j' > 0$, $e_j'' > 0$, $e_k > 0$ *doar pentru un număr finit de* π_i, $\Omega_{j,\,\mathrm{I}}$, $\Omega_{j,\,\mathrm{II}}$, Ω_k .

Ținînd seama de definițiile cu ajutorul cărora s-au introdus noțiunile de factor prim al lui Gauss și de factori primi ideali, se constată că

$$\omega^* = \prod_{i,j,k} \pi_i^{\varepsilon_i} \Omega_{j,\,\mathrm{I}}^{e_j''} \Omega_{j,\,\mathrm{II}}^{e_j'} \Omega_k^{e_k}$$

Deci rezultă

Teorema 15.2. *Dacă ω este divizibil prin π^{ε}, atunci ω^* este divizibil prin π^{ε} ; dacă ω este divizibil prin Ω_{I}^{e}, atunci ω^* este divizibil prin Ω_{II}^{e} ; dacă ω este divizibil prin Ω^e, atunci ω^* este divizibil prin Ω^e și reciproc.*

Fie μ și ν doi întregi ai lui Dirichlet. Vom considera că

$$\mu = \prod_{i,j,k} \pi_i^{\alpha_i} \Omega_{j,\,\mathrm{I}}^{e_j'} \Omega_{j,\,\mathrm{II}}^{e_j''} \Omega_k^{e_k}$$

$$\nu = \prod_{i,j,k} \pi_i^{\beta_i} \Omega_{j,\,\mathrm{I}}^{g_j'} \Omega_{j,\,\mathrm{II}}^{g_j''} \Omega_k^{g_k}$$

și vom scrie

$$\frac{\mu}{\nu} = \prod_{i,j,k} \pi_i^{\alpha_i-\beta_i} \Omega_{j,\mathrm{I}}^{e_j'-g_j'} \Omega_{j,\mathrm{II}}^{e_j''-g_j''} \Omega_k^{e_k-g_k}$$

arătînd prin aceasta că facem compararea exponenților lui π_i, din descompunerile lui μ și ν în raport cu π_i, că facem compararea exponenților lui $\mathfrak{w}_j$ și $\mathfrak{w}^*_j$ din descompunerile lui μ și ν în raport cu $\pi_j = \Omega_{j,\,\mathrm{I}}\,\Omega_{j,\,\mathrm{II}}$, că facem compararea exponenților lui $\mathfrak{w}_k$ din descompunerile lui μ și ν în raport cu $\pi_k = \Omega_k^2$. Dar expresia lui $\frac{\mu}{\nu}$ de mai sus are o semnificație mai precisă, anume, în ceea ce privește numărul π_i, există un întreg al lui Gauss z prim cu π_i, astfel încît $z\frac{\mu}{\nu} = \pi_i^{\gamma_i} \frac{\upsilon_i'}{\upsilon_i''}$ cu $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$, iar υ_i', υ_i'' fiind unități în raport cu π_i .

Într-adevăr, dacă $z_1 \mu = \pi_i^{\alpha_i} \upsilon$, $z_2 \nu = \pi_i^{\beta_i} \upsilon_i''$, atunci $\frac{z_1 \mu}{z_2 \nu} = \pi_i^{\alpha_i - \beta_i} \frac{\upsilon}{\upsilon_i''}$ sau $z_1 \frac{u}{\nu} = \pi_i^{\alpha_i - \beta_i} \frac{\upsilon z_2}{\upsilon_i''}$, $\upsilon_i' = \upsilon z_2$ fiind o unitate în raport cu π_i. Dacă există un alt z' prim cu π_i astfel încît $z' \frac{\mu}{\nu} = \pi_i^{\gamma_i'} \frac{\upsilon_i'''}{\upsilon_i^{IV}}$ cu υ_i''' și υ_i^{IV} unități în raport cu π_i, atunci $zz' \frac{\mu}{\nu} = \pi_i^{\gamma_i} \frac{z' \upsilon_i'}{\upsilon_i''} = \pi_i^{\gamma_i'} \frac{z \upsilon_i'''}{\upsilon_i^{IV}}$ sau $\pi_i^{\gamma_i'} (z' \upsilon_i' \upsilon_i^{IV}) = \pi_i^{\gamma_i'} (z \upsilon_i''' \upsilon_i'')$ deci $\gamma_i' = \gamma_i$. Același lucru se poate spune și despre factorii primi ideali $\Omega_{j,I}$, $\Omega_{j,II}$ și Ω_k.

Teorema 15.3. *Dacă toți exponenții din expresia lui* $\frac{\mu}{\nu}$ *sînt pozitivi sau nuli, atunci* $\frac{\mu}{\nu}$ *este un întreg al lui Dirichlet,* după cum rezultă din explicațiile date mai sus [de exemplu, în ceea ce privește numărul π_i, avem $z \frac{\mu}{\nu} = \pi_i^{\gamma_i} \frac{\upsilon_i'}{\upsilon_i''}$ sau $(z \upsilon_i'' \upsilon_i''^*) \frac{\mu}{\nu} = \pi_i^{\gamma_i} (\upsilon_i' \upsilon_i''^*)$, deci μ este divizibil prin ν în raport cu π_i] și din teorema 2.4. În aceste condiții rezultă următoarele teoreme-

Teorema 15.4. *Condiția necesară și suficientă ca* μ *să fie divizibil prin* ν *în raport cu factorul prim* π *al lui Gauss este ca* μ *să aibă factorul* π *cu un exponent cel puțin egal cu cel din* ν.

Într-adevăr, μ fiind divizibil prin ν în raport cu π există $z \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π astfel încît $\frac{z\mu}{\nu} = \chi \in \mathfrak{J}[i, \theta]$.

Atunci putem scrie

$$\chi = \prod_{i,j,k} \pi_i^{\gamma_i} \Omega_{j,I}^{h_j'} \Omega_{j,II}^{h_j''} \Omega_k^{h_k}$$

cu

$\gamma_i \geqslant 0$, $h_j' \geqslant 0$, $h_j'' \geqslant 0$, $h_k \geqslant 0$ oricare ar fi π_i, $\Omega_{j,I}$, $\Omega_{j,II}$, Ω_k;

$\gamma_i > 0$, $h_j' > 0$, $h_j'' > 0$, $h_k > 0$ doar pentru un număr finit de π_i, $\Omega_{j,I}$, $\Omega_{j,II}$, Ω_k.

Considerînd expresia lui $\frac{\mu}{\nu}$ de mai sus, constatăm că înmulțirea lui z cu $\frac{\mu}{\nu}$ nu afectează exponentul lui π, ci doar exponenții factorilor primi π_i ai lui Gauss diferiți de π, precum și exponenții lui $\Omega_{j,I}$, $\Omega_{j,II}$, Ω_k. Considerînd că $\pi = \pi_1$ putem scrie că

$$\frac{z\mu}{\nu} = \pi_1^{\alpha_1 - \beta_1} \prod_{i \neq 1, j, k} \pi_i^{\delta_i} \Omega_{j,I}^{f_j'} \Omega_{j,II}^{f_j''} \Omega_k^{f_k}.$$

Deoarece $\frac{z\mu}{\nu} = \chi$, iar exponenții sînt unic determinați, rezultă că

$$\alpha_1 - \beta_1 = \gamma_1 \geqslant 0.$$

Reciproc, dacă $\alpha_1 - \beta_1 \geqslant 0$, atunci prin înmulțirea lui $\frac{\mu}{\nu}$ cu un factor $z \in \Im[i]$ prim cu π_1 putem modifica exponenții lui $\pi_i \neq \pi_1$, ai lui $\Omega_{j,\,\mathrm{I}}$, $\Omega_{j,\,\mathrm{II}}$, Ω_k astfel încît să devină pozitivi, atunci $\frac{z\mu}{\nu}$ devine un întreg al lui Dirichlet deci μ este divizibil prin ν în raport cu π.

Teorema 15.5. *Condiția necesară și suficientă ca μ să fie divizibil în raport cu $\pi = \Omega_{\mathrm{I}}\,\Omega_{\mathrm{II}}$ prin ν este ca μ să aibă factorii primi ideali Ω_{I} și Ω_{II} cu exponenții cel puțin egali cu cei din ν.*

Demonstrația este întrutotul analogă cu cea de mai sus presupunînd că $\pi = \Omega_{1,\,\mathrm{I}}\,\Omega_{1,\,\mathrm{II}}$.

Teorema 15.6. *Condiția necesară și suficientă ca μ să fie divizibil în raport cu $\pi = \Omega^2$ prin ν este ca să aibă factorul prim ideal Ω cu exponentul cel puțin egal cu cel din ν.*

Demonstrația este analogă cu aceea dată pentru teorema 15.4, cu presupunerea că $\pi = \Omega_2$. E necesar de adăugat că ultimele trei teoreme sînt teoremele 14.1, 14.2, și 14.3 într-o altă formulare.

Teorema 15.7. *Condiția necesară și suficientă ca întregul lui Dirichlet ω să fie divizibil prin π^e, atunci cînd $\pi = \Omega_{\mathrm{I}}\,\Omega_{\mathrm{II}}$, este ca ω să fie divizibil prin Ω_{I}^e și prin Ω_{II}^e.*

Într-adevăr, putem scrie $\pi^e = \Omega_{\mathrm{I}}^e\,\Omega_{\mathrm{II}}^e$. Mai departe se consideră expresia lui ω și teorema 15.5.

Teorema 15.8. *Condiția necesară și suficientă ca întregul lui Dirichlet μ să fie divizibil prin întregul lui Dirichlet ν este ca toți factorii primi ai lui Gauss ca și cei ideali ai lui ν să se regăsească în μ cu exponenți cel puțin egali celor din ν.*

Într-adevăr, condiția este necesară deoarece dacă μ se divide prin ν atunci

$$\frac{\mu}{\nu} = \prod_{i,\,j\,k} \pi_i^{\alpha_i - \beta_i}\ \Omega_{j,\,\mathrm{I}}^{e_j' - g_j'}\ \Omega_{j,\,\mathrm{II}}^{e_j'' - g_j''}\ \Omega_k^{e_k - g_k}$$

este un întreg al lui Dirichlet, deci $\alpha_i - \beta_i \geqslant 0$, $e_j' - g_j' \geqslant 0$, $e_j'' - g_j'' \geqslant 0$, $e_k - g_k \geqslant 0$. Reciproc, dacă $\alpha_i - \beta_i \geqslant 0$, $e_j' - g_j' \geqslant 0$, $e_j' - g_j' \geqslant 0$, $e_k - g_k \geqslant 0$, atunci

$$\chi = \prod_{i,\,j,\,k} \pi_i^{\alpha_i - \beta_i}\ \Omega_{j,\,\mathrm{I}}^{e_j' - g_j}\ \Omega_{j,\,\mathrm{II}}^{e_j'' - g_j}\ \Omega_k^{e_k - g_k}$$

este un întreg al lui Dirichlet, deci $\frac{\mu}{\nu} = \chi \in \Im\,[i, \theta]$, deci μ este divizibil prin ν.

Teorema 15.9. *Condiția necesară și suficientă ca întregul υ al lui Dirichlet să fie o unitate în raport cu π este ca υ să nu fie divizibil prin factorul prim π al lui Gauss, în cazul cînd π este prim în $\Im\,[i, \theta]$ și să nu fie divizibil prin factorii primi ideali ai lui π, în cazul cînd π este neprim în $\Im\,[i, \theta]$.*

Într-adevăr, dacă υ este o unitate în raport cu π, atunci υ divide pe 1 în raport cu π. Dar factorii primi ai lui Gauss cît și factorii primi ideali din descom-

punerea lui 1 au exponenți egali cu zero, deci conform teoremei 15.4 și teoremelor 15.5 și 15.6, exponenții corespunzători din υ trebuie să fie nuli. Reciproc, dacă acești exponenți sînt nuli, conform acelorași teoreme, υ divide pe 1 în raport cu π, deci este o unitate în raport cu π.

Teorema 15.10. *Condiția necesară și suficientă ca* υ *să fie o unitate în* $\mathfrak{J}[i, \theta]$ *este ca* υ *să nu aibă nici factori primi ai lui Gauss, nici factori primi ideali.*

Într-adevăr, dacă υ este o unitate în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, atunci $N_r(\upsilon)$ este primă cu orice întreg prim al lui Gauss, deci $N_r(\upsilon)$ nu are nici factori primi ai lui Gauss, nici factori primi ideali și deoarece υ divide pe $N_r(\upsilon)$ înseamnă că nici υ nu are nici factori primi ai lui Gauss, nici factori primi ideali. Reciproc, dacă υ nu are nici factori primi ai lui Gauss, nici factori primi ideali, atunci, conform teoremei 15.2 și υ^* se găsește în aceeași situație. Deci și $\upsilon\upsilon^* = N_r(\upsilon)$ nu are nici factori primi ai lui Gauss, nici factori primi ideali. Aceasta înseamnă că $N_r(\upsilon)$ este primă cu orice întreg prim al lui Gauss, deci υ este o unitate în $\mathfrak{J}[i, \theta]$.

Teorema 15.11. *Condiția necesară și suficientă ca întregii lui Dirichlet* μ *și* ν *să fie asociați în raport cu* π, π *fiind factor prim al lui Gauss, este ca* μ *și* ν *să conțină pe* π *cu același exponent.*

Demonstrația teoremei se obține din teorema 15.4, pe care o aplicăm odată lui μ și ν și apoi lui ν și μ.

Teorema 15.12. *Condiția necesară și suficientă ca întregii lui Dirichlet* μ *și* ν *să fie asociați în raport cu* $\pi = \Omega_{\mathrm{I}}\,\Omega_{\mathrm{II}}$ *este ca ei să aibă factorii* Ω_{I} *și* Ω_{II} *cu aceiași exponenți.*

Demonstrația se obține din teorema 15.5 analog ca pentru teorema precedentă.

Teorema 15.13. *Condiția necesară și suficientă ca întregii lui Dirichlet* μ *și* ν *să fie asociați în raport cu* $\pi = \Omega^2$ *este ca ei să conțină factorul prim ideal* Ω *cu același exponent.*

Se utilizează teorema 15.6 la fel ca în demonstrațiile teoremelor 15.11, 15.12.

Teorema 15.14. *Condiția necesară și suficientă ca întregii lui Dirichlet* μ și ν *să fie asociați este ca ei să aibă aceeași descompunere în factori primi ai lui Gauss și ideali.*

Pentru demonstrația acestei teoreme este suficient să avem în vedere teorema 15.8.

Teorema 15.15. *Să considerăm, din nou, întregii lui Dirichlet* μ *și* ν:

$$\mu = \prod_{i,j,k} \pi_i^{\alpha_i}\, \Omega_{j,\mathrm{I}}^{\prime e_j}\, \Omega_{j,\mathrm{II}}^{\prime\prime e_j}\, \Omega_k^{e_k}\,.$$

$$\nu = \prod_{i,j,k} \pi_i^{\beta_i}\, \Omega_{j,\mathrm{I}}^{\prime g_j}\, \Omega_{j,\mathrm{II}}^{\prime\prime g_j}\, \Omega_k^{l_k}\,,$$

Cel mai mare divizor comun al lui μ *și* ν *în raport cu* π^i, *sau în raport cu* $\pi_j = \Omega_{j,\mathrm{I}}\,\Omega_{j,\mathrm{II}}$, *sau în raport cu* $\pi_k = \Omega^2{}_k$ *va fi scris sub forma*

$$\delta = \prod_{i,j,k} \pi_i^{\gamma_i}\, \Omega_{j,\mathrm{I}}^{\prime h_j}\, \Omega_{j,\mathrm{II}}^{\prime\prime h_j}\, \Omega_k^{h_k}$$

unde $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$, $h_j' = \min(e_j', g_j')$, $h_j'' = \min(e_j'', g_j'')$, $h_k = \min(e_k, l_k)$.

Întregul lui Dirichlet δ divide în raport cu π_i, atît pe μ cît și pe ν, datorită modului cum este definit exponentul lui π_i în δ, anume $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$.

De asemenea orice întreg χ a lui Dirichlet, care divide atît pe μ cît și pe ν în raport cu π_l, are exponentul lui π_i mai mic și decît α_i și β_i, deci exponentul lui π_i în χ este mai mic decît γ_i, deci χ divide în raport cu π_i pe δ. La fel se arată că δ are proprietățile celui mai mare divizor comun al lui μ și ν în raport cu $\pi_j = \Omega_{j,\,\mathrm{I}}\,\Omega_{j,\,\mathrm{II}}$ cît și în raport cu $\pi_k = \Omega_k^2$.

Teorema 15.16. *Condiția necesară și suficientă ca întregii lui Dirichlet μ și ν să nu aibă divizori comuni cu π este ca ei să nu fie divizibili prin același factor prim π al lui Gauss, în cazul cînd π este prim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$ și să nu fie divizibili prin același factor prim ideal al lui π, în cazul cînd π este neprim în $\mathfrak{J}[i, \theta]$.*

Într-adevăr, dacă μ și ν nu au divizori comuni în raport cu π, atunci în δ exponentul factorului prim π al lui Gauss este nul sau exponenții factorilor primi ideali Ω_{I} și Ω_{II}, dacă $\pi = \Omega_{\mathrm{I}}\,\Omega_{\mathrm{II}}$, sînt nuli sau exponentul factorului prim ideal Ω, dacă $\pi = \Omega^2$, este nul. Dar atunci cel puțin unul dintre exponenții corespunzători din μ și ν este nul, deci μ și ν nu sînt divizibili prin același factor prim π al lui Gauss sau prin același factor prim ideal al lui π. Reciproc, dacă μ și ν nu sînt divizibili prin același factor prim π al lui Gauss sau prin același factor prim ideal al lui π, atunci cel puțin în unul din întregii lui Dirichlet μ și ν exponentul factorului prim π al lui Gauss sau a factorului prim ideal al lui π este nul. Dar atunci exponentul corespunzător din δ este nul, deci δ este o unitate în raport cu π, iar μ și ν nu au divizori comuni cu π.

Se justifică astfel denumirea întrebuințată în paragraful 8″ μ și ν nu au divizori comuni cu π″ ca însemnînd « μ și ν nu au divizori comuni cu π, care să fie factori primi ai lui Gauss sau divizori ideali primi ».

Teorema 15.17. *Fiind dat un număr finit de întregi ai lui Dirichlet $\mu, \nu, \ldots$ cel mai mare divizor comun în raport cu π_i, sau în raport cu $\pi_j = \Omega_{j,\,\mathrm{I}}\,\Omega_{j,\,\mathrm{II}}$ sau în raport cu $\pi_k = \Omega_k^2$ al întregilor lui Dirichlet $\mu, \nu, \ldots$ este*

$$\delta = \prod_{i,\,j,\,k} \pi_i^{\gamma_i}\, \Omega_{j,\,\mathrm{I}}^{h'_j}\, \Omega_{j,\,\mathrm{II}}^{h''_j}\, \Omega_k^{h_k},$$

unde $\gamma_i = min\ (\alpha_i, \beta_i, \ldots)$, $h_j = min\ (e'_j, g'_j, \ldots)$, $h''_j = min\ (e''_j, g''_j, \ldots)$, $h_k = min\ (e_k, h_k, \ldots)$.

Ca și pentru cel mai mare divizor comun în raport cu π a doi întregi ai lui Dirichlet se arată că cel mai mare divizor comun în raport cu π al unui număr finit de întregi ai lui Dirichlet $\mu, \nu, \ldots$, definit mai sus, verifică următoarele proprietăți:

a) $\mu, \nu, \ldots$ sînt divizibili prin δ în raport cu π;

b) dacă χ este un divizor comun în raport cu π al lui $\mu, \nu, \ldots$, atunci χ divide pe δ în raport cu π.

Se constată, deci, că se poate face o teorie multiplicativă a divizibilității în raport cu π analogă teoriei multiplicative a întregilor raționali, a întregilor lui Gauss etc.

Cu toate acestea, cel mai mare divizor comun în raport cu π al unui număr finit de întregi ai lui Dirichlet poate fi definit și cu ajutorul operației de adunare, după cum s-a făcut în cazul a doi întregi ai lui Dirichlet, cu ajutorul noțiunii de ordin în raport cu π al unui întreg al lui Dirichlet. Fie, în acest scop, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ un număr finit de întregi ai lui Dirichlet și să considerăm întregii lui Dirichlet de forma

$$\delta' = \mu_1 + \mu\ \xi'_2 + \mu_2\, \xi'_3 + \ldots + \mu_r\ \xi'_r$$

$\xi_2', \xi_3', \ldots, \xi_r'$ fiind întregi arbitrari ai lui Dirichlet. Atunci cînd $\xi_2', \xi_3', \ldots, \xi_r'$ variază în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, ordinul lui δ' în raport cu π variază în mulțimea întregilor raționali, pozitivi, care este mărginită inferior, deci există cel puțin un grup de întregi ai lui Dirichlet $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_r$ astfel încît

$$\delta = \mu_1 + \mu_2 \xi_2 + \mu_3 \xi_3 + \ldots + \mu_r \xi_r$$

să aibă cel mai mic ordin în raport cu π dintre toți întregii lui Dirichlet de forma

$$\delta' = \mu_1 + \mu_2 \xi_2' + \mu_3 \xi_3' + \ldots + \mu_r \xi_r'$$

cu $\xi_2' \xi_3' \ldots, \xi_r'$ arbitrari în $\mathfrak{J}[i, \theta]$. Fie ε_2 ordinul în raport cu π al lui μ_2, atunci $N_r(\mu_2) = z_2 \pi^{\varepsilon}{}_2$ cu $z_2 \in \mathfrak{J}[i]$ prim cu π. Vom considera, acum, întregii lui Dirichlet de forma

$$\delta_2 = \mu_1 + \mu_2 \xi_2' + \mu_3 \xi_3 + \ldots + \mu_r \xi_r$$

cu ξ_2' arbitrar în $\mathfrak{J}[i, \theta]$, $\xi_3, \ldots, \xi_r$ fiind luați din grupul $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_r$ determinat, anterior, astfel ca δ să aibă cel mai mic ordin în raport cu π dintre întregii lui Dirichlet δ'. Putem scrie că $\mu_2^* \delta_2 = (\mu_1 + \mu_3 \xi_3 + \ldots + \mu_r \xi_r) \mu_2^* + z_2 \pi^{\varepsilon}{}_2 \xi_2$,

$$\mu_2^* \delta = (\mu_1 + \mu_2 \xi_3 + \ldots + \mu_r \xi_r) \mu_2^* + z_2 \pi^{\varepsilon_2} \xi_2 .$$

Ordinul lui δ în raport cu π fiind cel mai mic dintre ordinele în raport cu π ale întregilor δ', deci și ale întregilor δ_2, urmează că ordinul în raport cu π al lui $\mu_2^* \delta$ este cel mai mic dintre ordinele în raport cu π ale întregilor lui Dirichlet $\mu_2^* \delta_2$. Însă

$$\mu_2^* \delta_2 = \mu_2^* \delta + z_2 \pi^{\varepsilon_2} (\xi_2' - \xi_2).$$

De aici încolo, la fel ca pentru cel mai mare divizor comun în raport cu π a doi întregi ai lui Dirichlet, paragraful 7, se obține că μ_2 este divizibil în raport cu π prin δ. La fel se arată că și $\mu_3, \ldots, \mu_r$ sînt divizibili în raport cu π prin δ. Scriind $\mu_1 = \delta - \mu_2 \xi_2 - \mu_3 \xi_3 - \ldots - \mu_r \xi_r$ se arată că și μ_1 este divizibil prin δ în raport cu π. Din cauză că $\delta = \mu_1 + \mu_2 \xi_2 + \ldots + \mu_r \xi_r$ se deduce că orice divizor comun χ în raport cu π al lui $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ divide pe δ în raport cu π.

Teorema 15.18. *Orice alt întreg al lui Dirichlet δ_1 care verifică proprietățile celui mai mare divizor comun în raport cu π al unui număr finit de întregi ai lui Dirichlet $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ este asociat în raport cu π cu $\delta = \mu_1 + \mu_2 \xi_2 + \ldots + \mu_r \xi_r$.*

Într-adevăr, considerînd că δ_1 verifică prima proprietate, anume că $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ sînt divizibili prin δ_1 și că $\delta = \mu_1 + \mu_2 \xi_2 + \ldots + \mu_r \xi_r$ verifică a doua proprietate, anume că orice divizor comun în raport cu π al lui $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ divide pe δ în raport cu π, rezultă că δ_1 divide pe δ în raport cu π. Schimbînd rolurile lui δ_1 și δ se deduce că δ divide pe δ_1 în raport cu π. Deci δ_1 este asociat cu $\delta = \mu_1 + \mu_2 \xi_2 + \ldots + \mu_r \xi_r$ în raport cu π.

Prin definiție un număr finit de întregi ai lui Dirichlet: $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ *nu au divizori comuni cu* π sau că $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ *sînt primi între ei față de* π dacă cel mai mare divizor comun în raport cu π al întregilor $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ este o unitate în raport cu π.

Teorema 15.19. *Dacă cel mai mare divizor comun în raport cu π al întregilor lui Dirichlet $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ este o unitate în raport cu π, atunci pentru*

orice întreg al lui Dirichlet ω *pentru care avem* $\omega\mu_1 \equiv \omega\mu_2 \equiv \ldots \equiv \omega\mu_r \equiv 0$ (*mod.* π) *deducem* $\omega \equiv 0$ (*mod.* π).

Într-adevăr, $\delta = \mu_1 + \mu_2\,\xi_2 + \ldots + \mu_r\,\xi_r$ fiind o unitate în raport cu π, atunci, odată cu $\omega\mu_1 \equiv \omega\mu_2 \equiv \ldots \equiv \omega\mu_r \equiv 0$ (mod. π) avem $\omega\delta = (\omega\mu_1) + (\omega\mu_2)\,\xi_2 + \ldots + (\omega\mu_r)\,\xi_r \equiv 0$ (mod. π), deci $\omega \equiv 0$ (mod. π).

Teorema 15.20. *Dacă pentru orice întreg al lui Dirichlet, pentru care* $\omega\mu_1 \equiv \omega\mu_2 \equiv \ldots \equiv \omega\mu_r \equiv 0$ (*mod.* π), *deducem* $\omega \equiv 0$ (*mod.* π), *atunci cel mai mare divizor comun în raport cu* π *al întregilor lui Dirichlet* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ *este o unitate în raport cu* π.

Într-adevăr, fie δ cel mai mare divizor comun în raport cu π al lui $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$; atunci există întregii lui Gauss $z_1, z_2, \ldots, z_r$ primi cu π astfel încît $\frac{z_1\mu_1}{\delta} = \chi_1 \in \Im[i, \theta], \ldots, \frac{z_r\mu_r}{\delta} = \chi_r \in \Im[i, \theta]$, deci: $z_1\mu_1 = \chi_1\,\delta, \ldots, z_r\,\mu_r = \chi_r\,\delta$. Fie, acum, ω un întreg al lui Dirichlet astfel încît $\omega\delta \equiv 0$ (mod. π), atunci $z_1(\omega\mu_1) = \chi_1(\omega\delta) \equiv 0$ (mod. π), $\ldots z_r(\omega\mu_r) = \chi_r(\omega\delta) \equiv 0$ (mod. π); conform teoremei 2.2 putem simplifica cu $z_1, \ldots, z_r$ și obținem $\omega\mu_1 \equiv \ldots \equiv \omega\mu_r\ 0$(mod. π), deci $\omega \equiv 0$ (mod. π) și prin urmare δ este o unitate în raport cu π.

Ca aplicații la teoria celui mai mare divizor comun în raport cu π putem stabili următoarele teoreme:

Teorema 15.21. *Condiția necesară și suficientă ca* μ *și* ν *să nu aibă divizori comuni cu* π, *oricare ar fi întregul prim* π *al lui Gauss, factor comun al lui* $N_r(\mu)$ *și* $N_r(\nu)$, *este să existe întregii* σ *și* τ *ai lui Dirichlet astfel ca*

$$\sigma\mu + \tau\nu = 1\,.$$

Într-adevăr, fie $z = \pi_1^{e_1} \ldots \pi_s^{e_s}$ cel mai mare divizor comun al lui $N_r(\mu)$ și $N_r(\nu)$. Deoarece presupunem că μ și ν nu au divizori comuni cu π_i, atunci $\delta_i = \mu + \nu\xi_i$ este o unitate în raport cu π_i, deci: $\delta_i\,\delta_i^* = \mu\,\delta_i^* + \nu\xi_i\,\delta_i^*$ sau $N_r(\delta_i) = \sigma_i\,\mu + \tau_i\,\nu$ cu $\sigma_i = \delta_i^*$, $\tau_i = \xi_i\,\delta_i^*$, $N_r(\delta_i)$ fiind primă cu π_i. Întregii lui Gauss $N_r(\delta_1), \ldots, N_r(\delta_s)$, $N_r(\mu)$, $N_r(\nu)$ au pe 1 drept cel mai mare divizor comun, deoarece orice factor prim comun al lui $N_r(\mu)$ și $N_r(\nu)$ este un întreg al lui Gauss π_i, deci nu divide pe $N_r(\delta_i)$. Prin urmare, există întregii lui Gauss $h_1, \ldots, h_s, k', k''$ astfel ca $h_1 N_r(\delta_1) + \ldots + h_s N_r(\delta_s) + k' N_r(\mu) + k'' N_r(\nu) = 1$ deci $(h_1\sigma_1 + \ldots + h_s\sigma_s + k'\mu^*)\mu + (h_1\tau_1 + \ldots + h_s\tau_s + k''\nu^*)\nu = 1$. Reciproc, dacă există σ, τ cu $\sigma\mu + \tau\nu = 1$, atunci din $\omega\mu \equiv \omega\nu \equiv 0$ (mod. π_i) deducem $\omega = \omega(\sigma\mu + \tau\nu) = \sigma(\omega\mu) + \tau(\omega\nu) \equiv 0$ (mod. π_i), deci $\omega \equiv 0$ (mod. π_i), ceea ce înseamnă că μ și ν nu au divizori comuni cu π_i.

Teorema 15.22. *Condiția necesară și suficientă ca întregii* μ *și* ν *să nu aibă divizori comuni cu* π, *oricare ar fi întregul prim* π *al lui Gauss, este să existe întregii lui Dirichlet* σ *și* τ *astfel ca*

$$\sigma\mu + \tau\nu = 1.$$

Această teoremă se deduce din precedenta ținînd seama de faptul că printre întregii primi π ai lui Gauss se găsesc toți întregii primi π ai lui Gauss care divid, în același timp, și pe $N_r(\mu)$ și pe $N_r(\nu)$.

Reformulată cu ajutorul noțiunilor de factor prim al lui Gauss și de factori primi ideali, această teoremă se enunță astfel:

Teorema 15.23. *Condiția necesară și suficientă ca întregii* μ *și* ν *ai lui Dirichlet să nu aibă nici un divizor comun care să fie factor prim al lui Gauss sau divizor ideal prim este ca să existe doi întregi* σ *și* τ *ai lui Dirichlet astfel ca*

$$\sigma\mu + \tau\nu = 1.$$

Pentru un număr finit de întregi ai lui Dirichlet $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ se poate stabili o teoremeă analogă:

Teorema 15.24. *Condiţia necesară şi suficientă ca întregii lui Dirichlet* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ *să nu aibă nici un divizor comun care să fie factor prim al lui Gauss sau divizor ideal prim este ca să existe întregii lui Dirichlet* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ *astfel*

$$\sigma_1 \mu_1 + \sigma_2 \mu_2 + \ldots + \sigma_r \mu_r = 1.$$

Demonstraţia se face la fel ca pentru teorema 15.21, utilizîndu-se expresia corespunzătoare a celui mai mare divizor comun în raport cu π al întregilor lui Dirichelt $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$.

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ПО ЗОЛОТАРЕВУ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ДИРИХЛЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор применяет метод Золотарева для изучения целых Дирихле. Изложение составлено таким образом, чтобы аналогия между общими свойствами целых и локальными свойствами целых Дирихле была наиболее очевидна. Перечислены последовательно свойства делимости по отношению к простому целому Гаусса, определение и свойства единиц, целых ассоциированных между собой, определение и свойства наибольшего делителя двух илинескольких целых Дирихле, определение и свойства взаимнопростых целых Дирихле, простых целых по отношению к простому целому Гаусса. Затем, при помощи простых множителей Гаусса и идеальных простых множителей, построена мултипликативная теория целых Дирихле.

Также при помощи теоремы Золотарева, перенесенной на целые Дирихле (см. пар. 6), возможно получить аддитивное выражение для общего наибольшего делителя двух или нескольких целых Дирихле по отношению к простому целому Гаусса. Становится очевидным, что теорема Золотарева имеет в этой теории роль теоремы целого деления, а порядок целого Дирихле по отношению к простому числу Гаусса соответствует целому неотрицательному числу, входящему в теорему целого деления.

LA THÉORIE LOCALE DES NOMBRES IDÉAUX D'APRÈS ZOLOTAREV DANS LE CAS DES ENTIERS DE DIRICHLET

(RÉSUMÉ)

L'Auteur applique la méthode de Zolotarev à l'étude des entiers de Dirichlet. L'exposé est rédigé de telle manière que l'analogie entre les propriétés globales des entiers et les propriétés locales des entiers de Dirichlet soit aussi évidente que possible. Sont passées en revue, l'une après l'autre, les propriétés de la divisibilité par rapport à un entier premier de Gauss, la définition et les propriétés des unités et celles des entiers associés entre eux, la définition et les propriétés du plus grand diviseur commun de deux ou de plusieurs entiers de Dirichlet, la définition et les propriétés des entiers de Dirichlet, premiers

entre eux, et des entiers premiers par rapport à un entier premier de Gauss. Ensuite, à l'aide des facteurs premiers de Gauss et des facteurs premiers idéaux, on établit une théorie multiplicative des entiers de Dirichlet. De même, le théorème de Zolotarev, transposé au cas des entiers de Dirichlet (voir par. 6), rend possible une expression additive du plus grand diviseur comun de deux ou de plusieurs entiers de Dirichlet par rapport à un entier premier de Gauss. Il ressort que, selon cette théorie, le théorème de Zolotarev joue le rôle de théorème de la division entière et que l'ordre d'un entier de Dirichlet par rapport à un nombre premier de Gauss correspond au nombre entier non négatif qui intervient dans le théorème de la division entière.

BIBLIOGRAFIE

1. Cebotarev N. G., *Osnovi teorii Galois.* Moscova-Leningrad, 1937, partea a II-a.
2. Hilbert D., *Über den Dirichlet'schen biquadratischen Zahlkörper.* Mathematische Annalen, Leipzig, 1894, t. 45, p. 310.
3. — *Théorie des corps de nombres algébriques.* Paris, 1913.
4. Dirichlet Lejenine G., *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, 1842, vol. 24, caietul IV, p. 291.
5. Moisil Gr. C., *Introducere în algebră.* I. *Inele şi ideale,* vol. 2 (după manuscrisul autorului).
6. Popovici C. P., *Asupra determinării unei baze a întregilor corpului relativ pătratic al lui Dirichlet.* Revista Universităţii C. I. Parhon şi a Politehnicii Bucureşti, 1954, nr. 4—5, p. 47.
7. — *Proprietăţi locale ale întregilor lui Gauss.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., secţia de ştiinţe matematice şi fizice, t. VIII, nr. 1, ianuarie-martie 1956 (sub tipar)
8. Zolotarev E. G., *Sur la théorie des nombres complexes.* Journal de Mathématiques, Paris, 1880, t. VI, p. 51, 129.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 1—2, 1956

UN CRITERIU DE EXISTENŢĂ A UNUI CICLU LIMITĂ STABIL PENTRU ECUAŢIA OSCILAŢIILOR NELINIARE *)

DE

I. BARBĂLAT şi A. HALANAY

1. Folosind metode asemănătoare celor utilizate de A. F. Filippov [1], vom demonstra o teoremă de existenţă a unui ciclu limită stabil pentru ecuaţia oscilaţiilor neliniare, cuprinzînd astfel o serie de cazuri care scapă criteriului formulat de Filippov.

Teoremă. *Fie ecuaţia diferenţială*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0. \tag{1}$$

Presupunem că

1° $f(x)$ *şi* $g(x)$ *sînt continue pentru orice* x *şi* $x\,g(x) \neq 0$ *pentru* $x \neq 0$;

2° *după schimbarea de variabilă* $z = sgn\, x \int_0^x g(\xi)\,d\xi$, *se notează* $\varphi(z) = \int_0^{x(z)} f(\xi)\,d\xi = F(x(z))$; *există* $\delta > 0$, *astfel ca pentru* $0 \leqslant z \leqslant \delta$ *să avem* $\varphi(z) \leqslant \varphi(-z)$, *fără ca aceste funcţii să fie identice*;

3° *există* $0 < \eta_1 \leqslant \delta$, *astfel încît să aibă loc una din situaţiile*

a) $\varphi(\eta_1) = 0$

b) $\varphi(-\eta_1) = 0$

c) $\varphi(z) < 0$ *şi* $\varphi(-z) > 0$ *pentru* $0 < z \leqslant \eta_1$

d) $\varphi(z) > 0$ *pentru* $0 < z \leqslant \eta_1$ *şi* $\int_0^{\eta_1} \frac{dz}{\varphi(z)} > \varphi(\eta_1)$

e) $\varphi(-z) < 0$ *pentru* $0 < z \leqslant \eta_1$ *şi* $\int_0^{\eta_1} \frac{dz}{\varphi(-z)} < \varphi(-\eta_1)$

f) $\varphi(z) > 0$ *şi* $\varphi(z) \leqslant \frac{2\eta_1 + \varphi^2(\eta_1)}{2\varphi(\eta_1)}$ *pentru* $0 < z \leqslant \eta_1$

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 1 decembrie 1955.

g) $\varphi(-z) < 0$ *și* $\varphi(-z) \geqslant \dfrac{-2\eta + \varphi^2(-\eta)}{2\varphi(-\eta)}$ *pentru* $0 < z \leqslant \eta$;

4° *există* $z_0 > \delta$ *astfel ca* $\int_0^{z_0} [\varphi(z) - \varphi(-z)]\, dz > 0$ *și pentru* $z > z_0$ *să avem* $\varphi(z) \geqslant \varphi(-z)$;

5° *fie* $N_1 = \overline{\lim_{x\to\infty}} z(x)$, $-N_2 = \lim_{x\to-\infty} z(x)$,

$\Lambda = \lim_{z\to N_1} \varphi(z)$, $\mu = \underline{\lim_{z\to -N_2}} \varphi(z)$,

atunci are loc una din situațiile

a) $\Lambda = \infty$ *și* $\mu = -\infty$

b) Λ *finit,* $\mu = -\infty$ *și există* $c > \max\{0, \sup_{z\geqslant z_0} \varphi(z)\}$,

astfel ca

$$\int_{z_0}^{N_2} \frac{dz}{c - \varphi(z)} = \infty$$

c) $\Lambda = \infty$, μ *finit și există* $\gamma < \min\{0, \inf_{z\geqslant z_0} \varphi(-z)\}$,

astfel ca

$$\int_{z_0}^{N_2} \frac{dz}{\gamma - \varphi(-z)} = -\infty$$

d) Λ *și* μ *finiți și există* c *și* γ *ca mai sus astfel ca*

$$\int_{z_0}^{N_1} \frac{dz}{c - \varphi(z)} = \infty \quad , \qquad \int_{z_0}^{N_2} \frac{dz}{\gamma - \varphi(-z)} = -\infty$$

e) $\lim_{z\to N_1} \varphi(z) = -\infty$ (*și deci și* $\lim_{z\to N_2} \varphi(-z) = -\infty$)

și

$$\overline{\lim_{z\to N_1}} \left[\int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\alpha - \varphi(\zeta)} + \varphi(z) \right] = \infty$$

pentru orice α *suficient de mare*

f) $\lim_{z\to N_2} \varphi(-z) = \infty$ (*și deci și* $\lim_{z\to N_2} \varphi(z) = \infty$) *și*

$$\underline{\lim_{z\to N_2}} \left[\int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\beta - \varphi(-\zeta)} + \varphi(-z) \right] = -\infty$$

pentru orice $\beta < 0$ *suficient de mare în valoare absolută.*

În aceste condiții ecuația (1) *admite cel puțin un ciclu limită stabil.*

Observații. 1) Condiția 5°,*a*) nu presupune divergența integralelor $\int_0^{\infty} g(x)\, dx$, $\int_0^{-\infty} g(x)\, dx$; condițiile 5°, *b*) și *e*) cer numai divergența primei integrale; condițiile 5°, *c*) și *f*) cer numai divergența celei de a doua integrale; condiția 5°, *d*) cere divergența ambelor integrale.

2) Condiția 3°,*c*) este mai restrictivă decît condiția corespunzătoare din teorema lui Filippov; ea a fost menționată pentru a se enumera toate cazurile ce se ivesc și nu este necesar să fie considerată în cursul demonstrației.

3) Dacă în condiția 3°,*d*) se cere ca $\varphi(z) < a\sqrt{z}$ pentru $0 \leqslant z \leqslant \delta$ se obține $a^2 < 2$, rezultat mai restrictiv decît acel găsit de F i l i p p o v, $a^2 < 8$; cu condiția 3°,*f*) se obține $a^2 \leqslant 2$. Aceeași observație rămîne valabilă pentru condițiile 3°,*e*), 3°,*g*), 5°,*e*) și 5°,*f*).

4) Condițiile integrale 5°,*b*) și 5°,*c*) sînt verificate dacă sînt verificate condițiile lui Filippov.

5) Criteriul de mai sus cuprinde numeroase cazuri în care condițiile lui Filippov nu sînt aplicabile și de asemenea un criteriu cunoscut al lui Levinson și Smith.

Demonstrație. Ecuația (1) este echivalentă cu sistemul

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \qquad \frac{dy}{dt} = -g(x) \tag{2}$$

și, după schimbarea de variabilă, cu

$$\frac{dz}{dt} = g(x(z))(y - \varphi(z)) \operatorname{sgn} z, \qquad \frac{dy}{dt} = -g(x(z)), \tag{3}$$

iar traiectoriile sistemului (3) verifică ecuația diferențială

$$dz = \operatorname{sgn} z\,(\varphi(z) - y)\,dy. \tag{4}$$

La demonstrarea teoremei se utilizează cunoscuta teoremă a coroanei, a lui Poincaré-Bendixson, și pentru efectuarea construcțiilor se utilizează, între altele, următoarea lemă din [1]:

Dacă $\Phi(z)$ este continuă pentru $0 \leqslant z \leqslant \alpha$, $\Phi(0) = 0$, soluția ecuației $dz = [\Phi(z) - y]\,dy$ care trece prin $M(z_M, \Phi(z_M))$ cu $0 < z_M \leqslant \alpha$, de pe curba Δ de ecuație $y - \Phi(z) = 0$, taie pe Oy în N și P cu $y_N \geqslant 0$, $y_P \leqslant 0$, $y_P < \Phi(z_M) < y_N$. În mod analog, dacă $\Phi(z)$ este continuă pentru orice $-\alpha \leqslant z \leqslant 0$ și $\Phi(0) = 0$, soluția ecuației $dz = [y - \Phi(z)]\,dy$ care trece prin $M^*(z_{M^*}, \Phi(z_{M^*}))$ cu $-\alpha \leqslant z_{M^*} < 0$ de pe curba Δ, taie pe Oy în N^* și P^* cu $y_N \geqslant 0$, $y_{P^*} \leqslant 0$, $y_{P^*} < \Phi(z_{M^*}) < y_{N^*}$ (fig. 1).

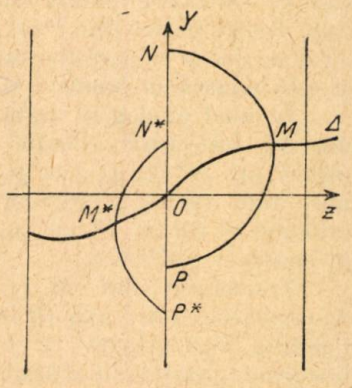

Fig. 1

Funcția $z = z(x)$ definită de schimbarea de variabilă este crescătoare; dacă este verificată una din condițiile *a)* sau *b)* din 3°, atunci traiectoria ecuației (4) care pleacă din $M(\eta, \varphi(\eta))$ sau $M^*(-\eta, \varphi(-\eta))$ în $z \geqslant 0$ sau $z \leqslant 0$, ocolește originea (fig. 1) și este situată în banda $0 \leqslant z \leqslant \eta$ respectiv $-\eta \leqslant z \leqslant 0$.

Cazul *c)* din 3° este cuprins în condițiile teoremei lui Filippov, după cum s-a arătat mai sus; în acest caz, sau cel puțin una din traiectoriile PMN sau $P^*M^*N^*$ ocolește originea (fig. 1) sau punctele N și P^* sînt confundate în origine.

În cazul *d)* din 3° vom demonstra că traiectoria $y = y(z)$ a ecuației (4), în semiplanul $z \geqslant 0$, cu $y(0) = y_P < 0$ și $|y_P|$ suficient de mic, taie curba Δ

înainte de a tăia dreapta $z = \eta$ (fig. 2). Într-adevăr se poate alege $|y_P|$ suficient de mic, astfel ca această traiectorie să taie axa Oz în $A\ (a, 0)$ cu $a > 0$ suficient de mic. Deoarece condiția integrală se poate scrie sub forma

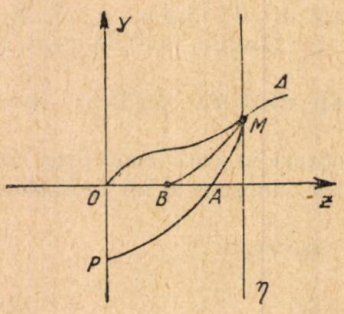

Fig. 2

$$\int_0^{\eta} \frac{dz}{\varphi(z)} > \varphi(\eta)$$

şi deoarece pentru a descrescător şi tinzînd către zero

$$\int_a^{\eta} \frac{dz}{\varphi(z)}$$

este crescătoare şi tinde către integrala din condiție, se poate alege $|y_P|$ suficient de mic şi deci a suficient de mic, astfel ca

$$\int_a^{\eta} \frac{dz}{\varphi(z)} > \varphi(\eta).$$

Pentru $a \leqslant z \leqslant \eta$ avem $0 < \varphi(z) - y < \varphi(z)$

şi deci

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\varphi(z) - y} > \frac{1}{\varphi(z)}.$$

Presupunem că traiectoriile care pleacă din orice punct A de pe Oz, cu $< a < \eta$, taie dreapta $z = \eta$ înainte de a tăia curba Δ. Integrînd de la a la η, rezultă că

$$y(\eta) - \varphi(\eta) > \int_a^{\eta} \frac{dz}{\varphi(z)} - \varphi(\eta) > 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza făcută. Rezultă că şi în acest caz traiectoria PMN (fig. 3) care pleacă din $P\ (0, y_P)$ cu $y_P < 0$ suficient de mic în valoare absolută, ocoleşte originea şi este situată în banda $0 \leqslant z \leqslant \eta$.

În mod analog se arată că în condiția $e)$ din 3°, traiectoria ecuației (4) în $z \leqslant 0$, care pleacă din $N^*\ (0, y_{N^*})$ cu $y_{N^*} > 0$ suficient de mic, taie curba Δ într-un punct M^* şi se întoarce pe Oy în P^* cu $y_{P^*} < 0$ şi este situată în banda $-\eta \leqslant z \leqslant 0$.

Traiectoria din $M\ (\eta, \varphi(\eta))$, pentru y descrescător, taie axa Oz în $B\ (b, 0)$, cu $b \geqslant 0$. Condiția 3°,$f)$ asigură că $b > 0$. Într-adevăr, integrînd ecuația diferențială

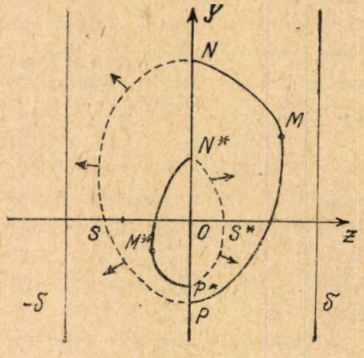

Fig. 3

$$dz + y\,dy = \varphi(z)\,dy$$

de-a lungul traiectoriei BM, se obține

$$b = \eta + \frac{1}{2}\varphi^2(\eta) - \int_0^{\varphi(\eta)} \varphi(z(y))\,dy. \qquad (5)$$

Din (5) cu inegalitatea din 3°,*f*) se obține $b > 0$. Prelungind traiectoria BM din B și M pentru z descrescător, se obține o traiectorie $PBMN$, care ocolește originea și este situată în banda $0 \leqslant z \leqslant \eta$.

Un rezultat similar, în semiplanul $z \leqslant 0$, se obține cu ajutorul condiției 3°,*g*).

Construcția conturului interior. Exceptînd, eventual, cazul *c*) din 3° se poate construi o traiectorie PMN în $z \geqslant 0$ (sau $P^*M^*N^*$ în $z \leqslant 0$), care înconjoară originea și este situată în banda $0 \leqslant z \leqslant \delta$ (sau $-\delta \leqslant z \leqslant 0$). O completăm cu simetrica sa PSN față de Oy (sau $P^*S^*N^*$). Vom demonstra, utilizînd condiția 2°, că traiectoriile sistemului (3), pentru t crescător, taie arcul PSN de la interiorul spre exteriorul domeniului limitat de curba simplă închisă $PMNSP$ (fig. 3). Fie $z = z(y)$ ecuația curbei PMN și $z = z^*(y)$ ecuația curbei simetrice PSN. Deoarece

$$z(y) = -z^*(y) \quad \text{și} \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{dz^*}{dy}$$

ecuația diferențială a curbei PSN este $dz^* = (y - \varphi(-z^*))\,dy$.

În intervalul $-\delta \leqslant z \leqslant 0$ avem, în baza condiției 1°,

$$\frac{dz}{dy} = y - \varphi(z) \leqslant y - \varphi(-z)$$

și deci

$$\frac{dz}{dy} \leqslant \frac{dz^*}{dy}.$$

Deoarece cînd t crește, și y crește în semiplanul $z \leqslant 0$, afirmația rezultă în baza lemei lui Ciaplîghin.

În mod analog se arată că și arcul $P^*S^*N^*$ este tăiat de traiectoriile sistemului (3), pentru t crescător, de la interiorul spre exteriorul domeniului limitat de curba simplă închisă $P^*M^*N^*S^*P^*$.

Acestor curbe închise le corespund în planul inițial de faze (x, y) curbe simple închise și care pentru t crescător nu sînt tăiate spre interior de traiectoriile sistemului (2).

Dacă traiectoriile PMN și $N^*M^*P^*$ intră în origine cu capetele N și P^* (cazul *c*) din 3°), construcția conturului interior se efectuează ca în [1]. Păstrînd aceleași notații în planele (z, y) și (x, y) se vede ușor că arcul de traiectorie MP este prelungibil pînă la verticala M^*Q și arcul de traiectorie M^*N^* pînă la verticala MQ^* (fig. 4). Pentru t crescător, traiectoriile sistemului (2) nu taie conturul $PMQ^*N^*M^*QP$ spre interior.

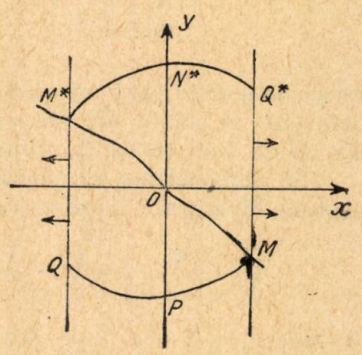

Fig. 4

Construcția conturului exterior. Fie M_0 și M_0^* punctele de intersecție ale curbei Δ cu verticalele $z = \pm z_0$ (fig. 5) și traiectoriile M_0N_0, M_0P_0 ale ecuației (5) în semiplanul $z \geqslant 0$, respectiv $M_0^*N_0^*$, $M_0^*P_0^*$ în semiplanul $z \leqslant 0$. Avem $y_{N_0} > 0$, $y_{P_0} \leqslant 0$, $y_{N_0^*} \geqslant 0$, $y_{P_0^*} < 0$. Deoarece traiectoria $N_0M_0P_0$ nu poate pătrunde în conturul interior, rezultă că $y_{P_0} < 0$;

la fel $y_{N_0^*} > 0$. În fiecare din condiţiile 5° ale teoremei vom demonstra că orice traiectorie care pleacă din $N(0, y_N)$ cu $y_N > y_{N_0}$ taie întîi dreapta $z = z_0$, apoi curba Δ în M şi se întoarce în P pe Oy, cu $y_P < y_{P_0}$. Luînd pe y_N suficient de mare, arcul NMP este exterior conturului interior construit mai sus. La fel, orice traiectorie care pleacă din $P^*(0, y_{P^*})$ cu $y_{P^*} < y_{P_0^*}$ taie întîi dreapta $z = -z_0$, apoi curba Δ în M^* şi se întoarce pe Oy în N^* cu $y_{N^*} > y_{N_0^*}$; luînd pe $|y_{P^*}|$ suficient de mare, arcul $P^* M^* N^*$ este exterior conturului interior.

Traiectoria, care pleacă din N cu $y_N > y_{N_0}$, taie dreapta $z = z_0$ şi atît timp cît rămîne deasupra curbei Δ avem pentru orice $z \geqslant z_0$

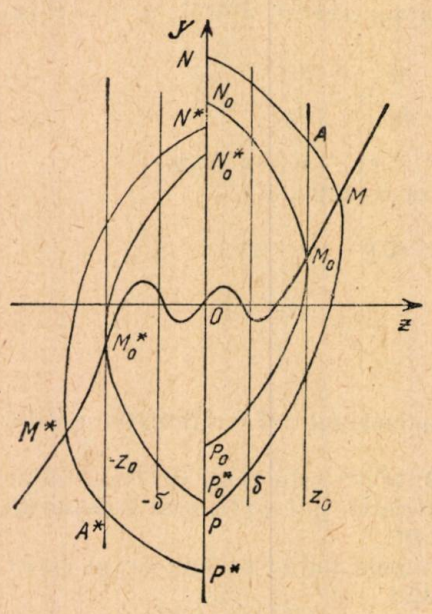

Fig. 5

$$0 > \varphi(z) - y(z) > \varphi(z) - y_N,$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\varphi(z) - y} < \frac{1}{\varphi(z) - y_N}, \tag{6}$$

$$y(z) - \varphi(z) < y(z_0) - \varphi(z) - \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{y_N - \varphi(\zeta)}. \tag{7}$$

a) Dacă $\Lambda = \infty$, există cel puţin un şir de puncte $z_1 < z_2 < \ldots < z_n < \ldots$ tinzînd către N_1, astfel încît $\lim \varphi(z_n) = \infty$ şi deci oricare ar fi y_N, inegalitatea (6) nu este satisfăcută. În consecinţă traiectoria din N, oricare ar fi $y_N > y_{N_0}$, taie întîi dreapta $z = z_0$, apoi curba Δ.

La fel traiectoria din P^* cu $y_{P^*} < y_{P_0^*}$ taie întîi dreapta $z = -z_0$ şi apoi curba Δ.

b) Fie $y_N = c$; deoarece $\int_{z_0}^{N_1} \frac{d\zeta}{c - \varphi(\zeta)} = \infty$ şi Λ este finită există cel puţin un şir de puncte $\{z_n\}$ crescător şi tinzînd către N_1, astfel ca pentru orice n suficient de mare (7) să conducă la $y(z_n) - \varphi(z_n) < 0$ şi deci traiectoria din N să taie curba Δ, după ce a tăiat dreapta $z = z_0$.

Să demonstrăm că, dacă integrala precedentă este divergentă pentru c, ea este divergentă pentru orice $s > c$. Avem

$$\int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{s - \varphi(\zeta)} = \int_{z_0}^{z} \frac{1}{c - \varphi(\zeta)} \frac{c - \varphi(\zeta)}{s - \varphi(\zeta)} d\zeta = \frac{c - \varphi(\xi)}{s - \varphi(\xi)} \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{c - \varphi(\zeta)}$$

şi unde $z_0 < \xi < z$. Vom dovedi că

$$\lim_{z \to N_1} \frac{c - \varphi(\xi)}{s - \varphi(\xi)} > 0.$$

Într-adevăr, dacă această limită inferioară ar fi nulă, ori ar exista un şir $\{\xi_n\}$ crescător şi tinzînd către N_1, astfel ca $\lim_{n \to \infty} \varphi(\xi_n) = c$, ceea ce este imposibil,

deoarece $c > \Lambda$; ori ar exista un asemenea șir, pentru care $\lim \varphi(\xi_n) = -\infty$ și pe acest șir limita fracției ar fi unu.

c) Se tratează analog cu *b)*.

d) Se tratează analog cu *c)* și *b)*.

e) Pentru orice $y_N > y_{N_0}$ există cel puțin un șir $\{z_n\}$ crescător și tinzînd către $N_1 = \infty$, pentru care

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \int_{z_0}^{z_n} \frac{d\zeta}{y_N - \varphi(\zeta)} + \varphi(z_n) \right\} = \infty$$

și deci pe acest șir și pentru n suficient de mare avem $y(z_n) - \varphi(z_n) < 0$ și deci traiectoria din N taie curba Δ, după ce a tăiat dreapta $z = z_0$.

f) Se tratează analog cu *e)*.

Dacă y_{P^*} scade și tinde către $-\infty$, atunci y_{N^*} crește și deci ori tinde către ∞, ori tinde către o valoare finită $y_{L^*} > 0$, punctul L^* fiind situat la exteriorul conturului interior. De asemenea, dacă y_N crește și tinde către ∞, atunci y_P scade și tinde către $-\infty$ ori către y_L finit, L fiind la exteriorul conturului interior.

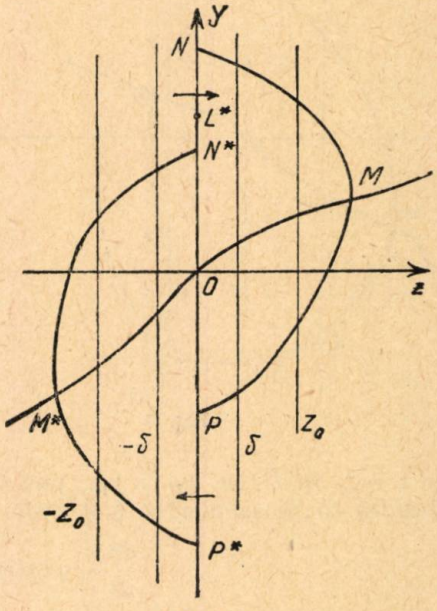

Fig. 6

Cazul y_{L^*} sau y_L finite. În acest caz nu este necesară condiția 4°. Considerăm un punct N pe Oy cu $y_N > y_L$ și suficient de mare astfel ca soluția ecuației (4), care pleacă din N în semiplanul $z \geqslant 0$, să taie curba Δ, după ce a tăiat dreapta $z = z_0$ și să se întoarcă pe Oy în P cu $y_P < 0$, P fiind la exteriorul conturului interior (fig. 6). Considerăm acum un punct P^* pe Oy cu $y_{P^*} \leqslant y_P$ și cu $|y_{P^*}|$ suficient de mare, astfel ca soluția ecuației (4), care pleacă din P^* în semiplanul $z \leqslant 0$, să taie întîi dreapta $z = -z_0$, apoi curba Δ în M^* și să se întoarcă în N^* pe Oy cu $0 < y_{N^*} < y_{L^*} < y_N$, N^* fiind la exteriorul conturului interior. Revenind în planul inițial de faze (x, y) și păstrînd notațiile, conturul $NMPP^*M^*N^*N$ nu este tăiat spre exterior de traiectoriile sistemului (2), pentru t crescător, deoarece pe N^*N avem $\dot{x} = y - F(x) > 0$ și pe P^*P avem $\dot{x} = y - F(x) < 0$. Construcția se efectuează în mod analog dacă y_L este finit.

Cazul $y_{L^*} = \infty$ și $y_L = -\infty$. În [1] se arată, utilizînd condiția integrală din 4°, că dacă $y = y_1(z)$ și $y = y_2(z)$ sînt soluții ale ecuației (4) cu $y_1(0) = y_2(0) = y_0 \neq 0$ respectiv în semiplanele $z \geqslant 0$ și $z \leqslant 0$, există $p > 0$, astfel ca din $|y_0| > p$ să rezulte $y_1(z_0) < y_2(-z_0)$, iar $y_1(z)$ și $y_2(z)$ pe $[0, z_0]$, respectiv $[-z_0, 0]$ diferă oricît de puțin de y_0.

Considerăm în semiplanul $z \leqslant 0$ o soluție a ecuației (4) care pleacă din P^* cu $y_{P^*} < -p$ și care se reîntoarce pe Oy în N^* cu $y_{N^*} > p$, p fiind un număr pozitiv arbitrar și suficient de mare pentru ca soluția considerată să

taie şi dreapta $z = -z_0$ (fig. 7); fie Q^* primul punct de intersecţie al acestei soluţii cu $z = -z_0$, M^* punctul ei de intersecţie cu curba Δ, R^* al doilea punct de intersecţie cu $z = -z_0$. Avem

$$y_{Q^*} < y_{M^*} = \varphi(z_{M^*}) < y_{R^*}$$

Considerăm în semiplanul $z \geqslant 0$ soluţiile ecuaţiei (4) care pleacă respectiv din N^* şi P^* şi care, dacă p este suficient de mare, taie dreapta $z = z_0$ în S şi V cu $y_S < y_{R^*}$, $y_V < y_{Q^*}$. În plus, deoarece y_S diferă oricît de puţin de y_{N^*} şi y_V diferă oricît de puţin de y_{P^*}, punctul S se găseşte ca şi N^* deasupra curbei Δ şi V dedesubt.

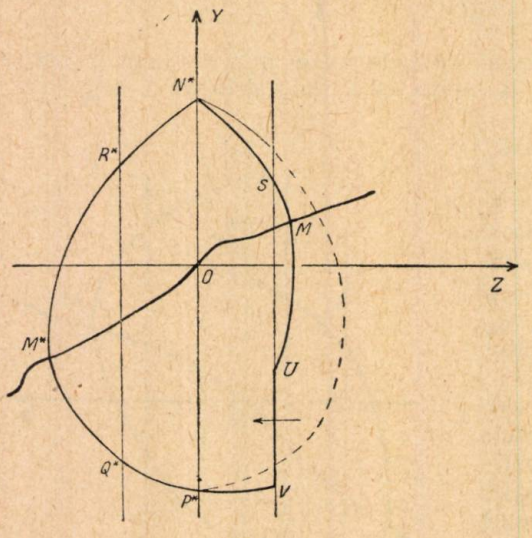

Fig. 7

Avem deci $y_V < y_{Q^*} < y_S < y_{R^*}$.

Considerăm în $z \geqslant 0$ curba simetrică faţă de Oy a curbei $P^* Q^* M^* R^* N^*$ şi fie $z = \bar{z}(y)$ ecuaţia simetricei. Avem

$$d\bar{z} = [\varphi(-\bar{z}) - y]\, dy.$$

În baza condiţiei 4°, pentru $\bar{z} \geqslant \bar{z}_0$ avem $\varphi(\bar{z}) > \varphi(-z)$ şi deci pentru traiectoria SMU care prelungeşte pe N^*S pentru t crescător — deci y descrescător — avem $z'_y \geqslant \bar{z}'_y$.

În consecinţă traiectoria SMU, care pentru y descrescător prelungeşte pe N^*S, rămîne sub curba $z = \bar{z}(y)$, deci ea taie curba Δ într-un punct M şi se întoarce pe $z = z_0$ în U cu $y_U > y_V$, punctul U fiind situat în regiunea $y < \varphi(z)$. Rezultă că pe segmentul UV avem

$$\frac{dz}{dt} = g(x(z))\,(y - \varphi(z)) < 0$$

şi deci traiectoriile sistemului (3) pentru t crescător nu taie curba simplă închisă $P^*Q^*M^*R^*N^*\ SMUVP^*$ spre exterior. Întorcîndu-ne în planul (x, y) construcţia conturului exterior este făcută, şi în acest caz, şi teorema Poincaré-Bendixon asigură existenţa în coroană construită, a cel puţin unui ciclu limită stabil.

Observaţie. Dacă funcţia $g(x)$ este impară, criteriul poate fi formulat astfel:

Se consideră ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0,$$

unde $f(x)$, $g(x)$ *sînt continue pentru orice* x, $xg(x) > 0$ *pentru* $x \neq 0$ *şi* $g(x) = -g(-x)$. *Se notează* $F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$, $G(x) = \int_0^x g(\xi)\, d\xi$, $\Lambda = \overline{\lim_{x \to \infty}} F(x)$, $\mu = \underline{\lim_{x \to -\infty}} F(x)$. *Dacă*

1° *există* $\delta > 0$, *astfel încît pentru* $0 \leqslant x \leqslant \delta$ *să avem* $F(x) \leqslant F(-x)$, *fără ca cele două funcții să fie identice.*

2° *există* $\eta > 0$, *cu* $\eta \leqslant \delta$, *astfel încît să aibă loc una din situațiile*

a) $F(\eta) = 0$

b) $F(-\eta) = 0$

c) $F(x) < 0$ *și* $F(-x) > 0$ *pentru* $0 < x \leqslant \eta$

d) $F(x) > 0$ *pentru* $0 < x \leqslant \eta$ *și* $\int_0^{\eta} \frac{g(x)}{F(x)}\,dx > F(\eta)$

e) $F(-x) < 0$ *pentru* $0 < x \leqslant \eta$ *și* $\int_0^{\eta} \frac{g(x)}{F(-x)}\,dx < F(-\eta)$

f) $F(x) > 0$ *și* $F(x) \leqslant \frac{2G(\eta) + F^2(\eta)}{2F(\eta)}$ *pentru* $0 < x \leqslant \eta$

g) $F(-x) < 0$ *și* $F(-x) \geqslant \frac{2G(\eta) + F^2(-\eta)}{2F(-\eta)}$ *pentru* $0 < x \leqslant \eta$

3° *există* $x_0 > \delta$, *astfel ca* $\int_0^{x} [F(x) - F(-x)]\, g(x)\,dx > 0$ *și pentru* $x > x_0$ *să avem* $F(x) \geqslant F(-x)$.

4° *este satisfăcută una din condițiile*

a) $\Lambda = \infty$ *și* $\mu = -\infty$

b) Λ *finit,* $\mu = -\infty$ *și există* $c > \max\{0, \sup_{x \geqslant x_0} F(x)\}$ *astfel ca*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{g(x)\,dx}{c - F(x)} = \infty$$

c) $\Lambda = \infty$, μ *finit și există* $\gamma < \min\{0, \inf_{x \geqslant x_0} F(-x)\}$

astfel ca

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{g(x)\,dx}{\gamma - F(-x)} = -\infty$$

d) Λ *și* μ *finiți și există* $c > \max\{0, \sup_{x \geqslant x_0} F(x)\}$ *și* $\gamma < \min\{0, \inf_{x \geqslant x_0} F(-x)\}$, *astfel ca*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{g(x)\,dx}{c - F(x)} = \infty \quad \text{și} \quad \int_{x_0}^{\infty} \frac{g(x)\,dx}{\gamma - F(-x)} = -\infty$$

e) $\lim_{x \to \infty} F(x) = -\infty$ (*și deci și* $\lim_{x \to \infty} F(-x) = -\infty$) *și*

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \left[\int_{x_0}^{x} \frac{g(\xi)\,d\xi}{\alpha - F(\xi)} + F(x) \right] = \infty$$

pentru orice α *suficient de mare*

f) $\lim_{x \to \infty} F(-x) = \infty$ (*deci și* $\lim_{x \to \infty} F(x) = \infty$) *și*

$$\underline{\lim_{x \to \infty}} \left[\int_{x_0}^{x} \frac{g(\xi)\,d\xi}{\beta - F(-\xi)} + F(-x) \right] = -\infty$$

pentru orice $\beta < 0$ *suficient de mare în valoare absolută, atunci ecuaţia admite cel puţin un ciclu limită stabil.*

2. Folosind metode asemănătoare celor utilizate de N. Levinson şi O. K. Smith [2], se poate formula un criteriu de unicitate a ciclului limită stabil.

Teoremă. *Dacă sînt satisfăcute condiţiile:*

1° $\varphi(z) = -\varphi(-z)$ *pentru orice* z;

2° *există* $\delta > 0$ *cu* $\varphi(z) \leqslant 0$ *pentru* $0 \leqslant z \leqslant \delta$, *fără ca funcţia să fie identic nulă şi* $\varphi(z) > 0$ *pentru* $z > \delta$;

3° *pentru* $z > \delta$ *funcţia* $\varphi(z)$ *este crescătoare, dar* N_1 *şi* $\lim_{z \to N_1} \varphi(z)$ *nu sînt amîndoi finiţi, atunci ecuaţia dată admite un singur ciclu limită stabil.*

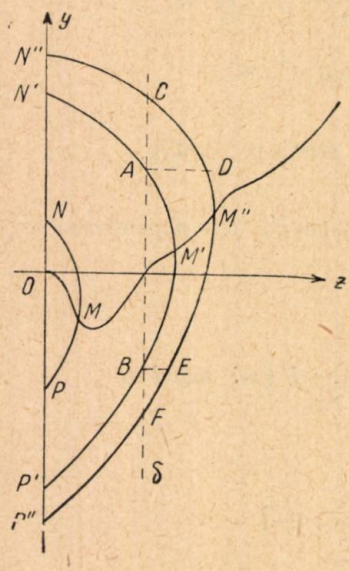

Fig. 8

Demonstraţie. Ecuaţia diferenţială

$$dz = \operatorname{sgn} z\,(\varphi(z) - y)\,dy$$

a traiectoriilor în planul (z, y) nu se modifică prin transformarea $(z, y) \to (-z, -y)$, deci traiectoriile închise în planul fazelor (x, y) corespund la traiectorii care în semiplanul $z \geqslant 0$ taie axa Oy în puncte simetrice.

Considerăm funcţia definită pentru $z \geqslant 0$ prin expresia

$$\lambda(z, y) = \frac{1}{2} y^2 + z.$$

Pe curbele integrale ale ecuaţiei diferenţiale avem

$$d\lambda(z, y) = y\,dy + dz = ydy + (\varphi(z) - y)\,dy = \varphi(z)\,dy = \frac{\varphi(z)}{\varphi(z) - y}\,dz.$$

Considerăm curba integrală NMP (fig. 8) cu $0 < z_M \leqslant \delta$; pe această curbă $dy < 0$ şi cînd z variază de la 0 la z_M avem $\varphi(z) \leqslant 0$, deci pe arcul de traiectorie NMP avem

$$\int_N^P d\lambda(z, y) = \int_N^P \varphi(z)\,dy < 0,$$

în consecinţă $\lambda_P - \lambda_N < 0$, adică $\overline{OP} - \overline{ON} > 0$.

Considerăm acum două curbe integrale $N'AM'BP'$ şi $N''CDM''EFP''$ care intersectează dreapta $z = \delta$ şi cu $\overline{ON''} > \overline{ON'}$.

Avem

$$\{y - \varphi(z)\}_{N''C} > \{y - \varphi(z)\}_{N'A} > 0$$

şi cum pe aceste arce $\varphi(z)\,dy \geqslant 0$, rezultă că

$$\int_{N''}^{C} d\lambda(z, y) < \int_{N'}^{A} d\lambda(z, y), \text{ adică } \lambda_C - \lambda_{N''} < \lambda_A - \lambda_{N'}$$

Pe arcul CD avem $\varphi(z) > 0$ și $dy < 0$, deci

$$\int_C^D d\lambda(z, y) < 0 \text{ , adică } \lambda_D - \lambda_C < 0 .$$

Din cauza monotoniei funcției $\varphi(z)$ pentru $z \geqslant \delta$, rezultă că pentru același y, $\{\varphi(z)\}_{DE} \geqslant \{\varphi(z)\}_{AB} > 0$ și cum $dy < 0$ pe aceste arce, rezultă că

$$\int_D^E d\lambda(z, y) < \int_A^B d\lambda(z, y), \text{ adică } \lambda_E - \lambda_D < \lambda_B - \lambda_A .$$

Pe arcul EF avem $\lambda_F - \lambda_E < 0$ și printr-o comparație similară cu aceea din primul cadran, pe arcele BP' și FP'' avem $\lambda_{P''} - \lambda_F < \lambda_{P'} - \lambda_B$.

Adunînd inegalitățile obținute, rezultă că $\lambda_{P''} - \lambda_{N''} \leqslant \lambda_{P'} - \lambda_{N'}$, adică $\overline{OP''} - \overline{ON''} \leqslant \overline{OP'} - \overline{ON'}$. Diferența $\overline{OP} - \overline{ON}$, socotită ca funcție de ordonata pozitivă a punctului N, începe prin a fi strict pozitivă pentru $0 < z_M \leqslant \delta$ și apoi este monoton descrescătoare. Deoarece există cel puțin o soluție periodică, această diferență se anulează cel puțin o dată pentru $z_M > \delta$ și din cauza monotoniei nu se poate anula decît o singură dată.

Exemplu. Ecuația

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + \frac{2\mu x}{x^4 + 1} = 0, \quad (\lambda\ ,\ \mu > 0)$$

analogă cu ecuația lui van der Pol, admite un singur ciclu limită stabil.

Într-adevăr, avem

$$F(x) = \lambda x\left(\frac{x^2}{3} - 1\right), \; z(x) = \mu \operatorname{arc\,tg} x^2, \; x = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{z}{\mu}} \quad (z \geqslant 0)$$

$$\varphi(z) = \lambda\sqrt{\operatorname{tg}\frac{z}{\mu}}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{z}{\mu} - 1\right), \; N_1 = \frac{\mu\pi}{2}, \; \lim_{Z \to N_1} \varphi(z) = \infty$$

$\varphi(z) \leqslant 0$ pentru $0 \leqslant z < \mu \operatorname{arc\,tg} 3$, $\varphi(z) > 0$ pentru $z > \mu \operatorname{arc\,tg} 3$, și $\varphi(z)$ monoton crescătoare pentru $z > \mu \operatorname{arc\,tg} 3$; în sfîrșit, funcția $\varphi(z)$ este impară.

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Доказывается теорема о существовании устойчивого предельного цикла для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0, \qquad (1)$$

позволяющая утверждать его существование в некоторых случаях, не предусмотренных в одной теореме А. Ф. Филиппова [1].

Т е о р е м а. Если

1° $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при всех x и $x\,g(x) > 0$ при $x \neq 0$;

2° după schimbarea de variabilă $z = \operatorname{sgn} x \int_0^x g(\xi)\,d\xi$, $\varphi(z) = \int_0^{x(z)} f(\xi)d\xi =$ $= F(x(z))$ există $\delta > 0$ astfel încît pentru $z \in [0, \delta]$ avem $\varphi(z) \leqslant \varphi(-z)$, fără ca aceste funcții să coincidă;

3° există $\eta \in (0, \delta]$ pentru care are loc una din următoarele condiții:

a) $\varphi(\eta) = 0$;

b) $\varphi(-\eta) = 0$,

c) $\varphi(z) < 0$ și $\varphi(-z) > 0$ pentru $z \in (0, \eta]$;

d) $\varphi(z) > 0$ pentru $z \in (0, \eta]$ și $\int_0^{\eta} \frac{dz}{\varphi(z)} > \varphi(\eta)$;

e) $\varphi(-z) < 0$ pentru $z \in (0, \eta]$ și $\int_0^{\eta} \frac{dz}{\varphi(-z)} < \varphi(-\eta)$;

f) $\varphi(z) > 0$ și $\varphi(z) \leqslant \frac{2\eta + \varphi^2(\eta)}{2\varphi(\eta)}$ pentru $z \in (0, \eta]$;

g) $\varphi(-z) < 0$ și $\varphi(-z) \geqslant \frac{-2\eta + \varphi^2(-\eta)}{2\varphi(-\eta)}$ pentru $z \in (0, \eta]$;

4° există $z_0 > \delta$ astfel încît $\int_0^{z_0} (\varphi(z) - \varphi(-z))\,dz > 0$ și pentru $z > z_0$ avem $\varphi(z) \geqslant \varphi(-z)$;

5° pentru $N_1 = \lim_{x \to \infty} z(x)$, $-N_2 = \lim_{x \to -\infty} z(x)$, $\Lambda = \overline{\lim_{z \to N_1}} \varphi(z)$, $\mu = \underline{\lim_{z \to -N_2}} \varphi(z)$ este îndeplinită una din următoarele condiții:

a) $\Lambda = \infty$ și $\mu = -\infty$;

b) Λ este finit, $\mu = -\infty$ și există $c > \max\{0, \sup_{z \geqslant z_0} \varphi(z)\}$ astfel încît $\int_{z_0}^{N_1} \frac{dz}{c - \varphi(z)} = \infty$;

c) $\Lambda = \infty$, μ este finit și există $\gamma < \min\{0, \inf_{z \geqslant z_0} \varphi(-z)\}$ astfel încît $\int_{z_0}^{N_2} \frac{dz}{\gamma - \varphi(-z)} = -\infty$

d) Λ și μ sînt finite și există c și γ astfel încît integralele precedente sînt divergente

e) $\lim_{z \to N_1} \varphi(z) = -\infty$ și $\overline{\lim_{z \to N_1}} \left[\int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\alpha - \varphi(\zeta)} + \varphi(-z) \right] = \infty$ pentru orice $\alpha > 0$ suficient de mare;

f) $\lim_{z \to N_2} \varphi(-z) = \infty$ și $\underline{\lim_{z \to N_2}} \left[\int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\beta - \varphi(-\zeta)} + \varphi(-z) \right] = -\infty$ pentru orice $\beta < 0$, $|\beta|$ suficient de mare și atunci ecuația (1) admite cel puțin un ciclu limită stabil.

Равным образом доказывается теорема единственности, аналогичная критерию Н. Левинсона и О. К. Смита (2).

Т е о р е м а. Если

1° $\varphi(z) = -\varphi(-z)$ для всякого z;

2° существует такое $\delta > 0$, что $\varphi(z) \leqslant 0$ для $z \in [0, \delta]$, не равняясь, тождественно нулю и $\varphi(z) > 0$ для $z > \delta$;

3° для $z > \delta$, $\varphi(z)$ — возрастающая функция, без того чтобы N_1 и $\lim_{z \to N_1} \varphi(z)$ были конечны, уравнение (1) допускает единственный устойчивый предельный цикл.

UN CRITÈRE D'EXISTENCE D'UN CYCLE LIMITE STABLE POUR L'ÉQUATION DES OSCILLATIONS NON LINÉAIRES

(RÉSUMÉ)

On démontre un théorème d'existence d'un cycle limite stable pour l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \qquad (1)$$

permettant d'en affirmer l'existence dans certains cas non prévus dans un théorème dû à A. F. F i l i p p o v [1].

T h é o r è m e. Si

1° $f(x)$ et $g(x)$ sont continues pour tout x et $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$;

2° après le changement de variables $z = \operatorname{sgn} x \int_0^x g(\xi)\, d\xi$, $\varphi(z) = \int_0^{x(z)} f(\xi)\, d\xi = F(x(z))$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $z \in [0, \delta]$ on ait $\varphi(z) \leqslant \varphi(-z)$ sans que ces deux fonctions soient identiques;

3° il existe $\eta \in (0, \delta]$ donnant lieu à l'une des conditions suivantes

a) $\varphi(\eta) = 0$; *b)* $\varphi(-\eta) = 0$; *c)* $\varphi(z) < 0$ et $\varphi(-z) > 0$ pour $z \in (0, \eta]$; *d)* $\varphi(z) > 0$ pour $z \in (0, \eta]$ et $\int_0^\eta \frac{dz}{\varphi(z)} > \varphi(\eta)$; *e)* $\varphi(-z) < 0$ pour $z \in (0, \eta]$ et $\int_0^\eta \frac{dz}{\varphi(-z)} < \varphi(-\eta)$; *f)* $\varphi(z) > 0$ et $\varphi(z) \leqslant \frac{2\eta + \varphi^2(\eta)}{2\varphi(\eta)}$ pour $z \in (0, \eta]$; *g)* $\varphi(-z) < 0$ et $\varphi(-z) \geqslant \frac{-2\eta + \varphi^2(-\eta)}{2\varphi(-\eta)}$ pour $z \in (0, \eta]$;

4° il existe $z_0 > \delta$ tel que $\int_0^{z_0} (\varphi(z) - \varphi(-z))\, dz > 0$ et tel que pour $z > z_0$ on ait $\varphi(z) \geqslant \varphi(-z)$;

5° soit $N_1 = \lim_{x \to \infty} z(x)$, $-N_2 = \lim_{x \to -\infty} z(x)$

$\Lambda = \overline{\lim_{z \to N_1}} \varphi(z)$, $\mu = \underline{\lim_{z \to -N_2}} \varphi(z)$; l'une des conditions suivantes est vérifiée:

a) $\Lambda = \infty$ et $\mu = -\infty$; *b)* Λ fini, $\mu = -\infty$ et il existe $c > \max\{0, \sup_{z \geqslant z_0} \varphi(z)\}$ tel que

$\int_{z_0}^{N_1} \frac{dz}{c-\varphi(z)} = \infty$; *c)* $\Lambda = \infty$, μ fini et il existe $\gamma < \min\{0, \inf_{z \geqslant z_0} \varphi(-z)\}$ tel que $\int_{z_0}^{N_2} \frac{dz}{\gamma - \varphi(-z)} = \infty$; *d)* Λ et μ finis et il existe c et γ tels que les deux intégrales précédentes soient divergentes; *e)* $\lim_{z \to N_1} \varphi(z) = -\infty$ et $\overline{\lim_{z \to N_1}} \left[\int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\alpha - \varphi(\zeta)} + \varphi(z) \right] = \infty$ quel que soit $\alpha > 0$ suffisamment grand; *f)* $\lim_{z \to N_2} \varphi(-z) = \infty$ et $\lim_{z \to N_2} \left[\int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\beta - \varphi(-\zeta)} + \varphi(-z) \right] = -\infty$ quel que soit $\beta < 0$, $|\beta|$ suffisamment grand;

alors l'équation (1) *admet au moins un cycle limite stable.*

On démontre également un théorème d'unicité analogue à un critère dû à N. Levinson et O. K. Smith [2].

Théorème. Si

1° $\varphi(z) = -\varphi(-z)$ quel que soit z;

2° il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi(z) \leqslant 0$ pour $z \in [0, \delta]$, sans qu'elle soit identiquement nulle et $\varphi(z) > 0$ pour $z > \delta$

3° pour $z > \delta$, $\varphi(z)$ est croissante, sans que N_1 et $\lim_{z \to N_1} \varphi(z)$ soient tous les deux finis, *l'équation* (1) *admet un cycle limite stable unique.*

BIBLIOGRAFIE

1. Filippov A. F., *Dostatocinoe uslovie suscestvovaniia usloicivogo predelnogo tihla dlea uravneniia vtorovgo poreadka.* Matematiceskii Sbornik, 1952, 30 (72), nr. 1, p. 171.
2. Levinson N. a. Smith O. K., *A General Equation for Relaxation Oscillations.* Duke Math. Journal, 1942, vol. 9, p. 382.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 1—2, 1956

PROPRIETĂŢI ALE SUPRAFEŢEI SFEREI UNITATE ŞI APLICAŢII LA REZOLVAREA PROBLEMEI UNICITĂŢII POLINOMULUI DE CEA MAI BUNĂ APROXIMAŢIE ÎN SPAŢII BANACH OARECARE*)

DE

IVAN SINGER

CAPITOLUL I

PROPRIETĂŢI ALE SUPRAFEŢEI SFEREI UNITATE DINTR-UN SPAŢIU BANACH OARECARE

Introducere

Studiul suprafeţei sferei unitate este de cea mai mare importanţă în teoria spaţiilor Banach, fiind şi azi centrul preocupărilor mai multor matematicieni. Studiul proprietăţilor geometrice ale suprafeţei sferei unitate dintr-un spaţiu Banach oarecare are aplicaţii importante între altele în teoria funcţiilor. De exemplu, după cum a observat K. Tatarkiewicz [30], problema unicităţii polinomului de cea mai bună aproximaţie într-un spaţiu Banach oarecare revine în esenţă la problema, dacă anumite mulţimi convexe de pe suprafaţa sferei unitate a spaţiului constau dintr-un singur element sau din mai multe elemente.

Cercetările de pînă acum, referitoare la suprafaţa sferei unitate dintr-un spaţiu Banach oarecare, au inconvenientul că ele caută să studieze suprafaţa sferei unitate dintr-un spaţiu Banach oarecare *numai* cu ajutorul elementelor spaţiului. După cum ne arată cercetările lui S. Eilenberg [9], R. F. Arens şi J. L. Kelley [3], R. E. Fullerton [11] referitoare la suprafaţa sferei unitate din anumite spaţii Banach particulare, se obţin rezultate mai profunde, dacă, în afară de elementele spaţiului se folosesc şi alte mărimi, care nu se pot exprima numai cu ajutorul elementelor spaţiului. De exemplu, dacă considerăm spaţiul Banach al tuturor funcţiilor reale continue pe un spaţiu Hausdorff bicompact Q (normat în modul obişnuit), atunci în studiul suprafeţei sferei unitate al acestui spaţiu, este util să folosim şi elementele spaţiului Q [9]; dacă considerăm spaţiul Banach al tuturor funcţiilor reale integrabile

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 23 aprilie 1955.

pe o mulțime Ω în raport cu o măsură complet aditivă m (normat prin $\| x \| = \int_{\Omega} |x(t)| \, dm(t)$), atunci în studiul suprafeței sferei unitate a acestui spațiu este util să folosim și submulțimile măsurabile ale mulțimii Ω [11].

În capitolul de față vom studia suprafața sferei unitate dintr-un spațiu Banach oarecare *cu ajutorul elementelor spațiului și a elementelor spațiului adjunct.* După cum se va vedea, metodele amintite mai sus (ale folosirii elementelor spațiului Q, respectiv a submulțimilor măsurabile ale mulțimii Ω) se încadrează drept cazuri particulare în metoda noastră generală.

Capitolul de față este împărțit în trei paragrafe. Paragraful 1 nu conține rezultate noi; în el sînt reamintite definițiile și teoremele la care facem trimitere în decursul lucrării. Paragraful 2 se ocupă de studiul fețelor sferei unitate, iar paragraful 3 este consacrat studiului mulțimilor de sprijin ale sferei unitate.

§ 1. Preliminarii

1. În acest paragraf reamintim, din analiza funcțională, noțiunile și proprietățile de care vom avea nevoie în decursul capitolului de față. Noțiunile și proprietățile din topologie, pe care le vom folosi, le presupunem cunoscute.

Fie E un spațiu Banach*) (adică un spațiu liniar normat complet) oarecare și fie E^* spațiul adjunct.

Fie x_1, x_2 două elemente distincte oarecare din spațiul E. Prin *segmentul* $< x_1, x_2 >$, *care unește punctele* x_1, x_2, *se* înțelege mulțimea**) $\{x \mid x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$. Se numește *interiorul segmentului* $< x_1, x_2 >$ mulțimea $\{x \mid x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, 0 < \lambda < 1\}$, iar punctele x_1 și x_2 se numesc *capetele segmentului* $< x_1, x_2 >$. Punctul $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ se numește *mijlocul segmentului* $< x_1, x_2 >$.

O mulțime oarecare M de elemente din spațiul E se numește *convexă*, dacă o dată cu orice două puncte ea conține și segmentul care le unește, adică dacă $x_1, x_2 \in M$ implică $< x_1, x_2 > \subseteq M$. Pentru ca mulțimea M să fie convexă, este necesar și suficient ca, o dată cu orice două puncte ea să conțină și mijlocul segmentului care le unește, adică $x_1, x_2 \in M$ să implice $\frac{x_1 + x_2}{2} \in M$.

Un punct x al unei mulțimi convexe închise nevide M se numește [18] *punct extrem* al acestei mulțimi dacă nu există nici un segment inclus în M care să conțină în interior punctul x. Pentru ca punctul $x \in M$ să fie punct extrem al mulțimii M, este necesar și suficient ca el să nu fie mijlocul nici unui segment inclus în M. De asemenea, se vede cu ușurință că punctul $x \in M$ este punct extrem al mulțimii convexe închise nevide M dacă și numai dacă mulțimea $M - \{x\}$ este și ea convexă.

Mai general, fiind dată o mulțime convexă închisă nevidă M, o parte convexă A a lui M se numește ([12], definiția 1) *mulțime extremă* a mulțimii M,

*) În decursul lucrării de față, în cazul cînd nu facem observație contrară, prin «spațiu liniar» vom înțelege spațiu liniar cu scalari reali, prin «număr» vom înțelege număr real și prin «funcție» vom înțelege funcție reală uniformă.

**) Mulțimea elementelor x care au o anumită proprietate P o vom nota cu $\{x P\}$.

dacă nu există nici un segment inclus în M și neinclus în A, care să conțină în interior un punct al lui A. Se vede cu ușurință că A este mulțime extremă a lui M dacă și numai dacă nici un punct $x \in A$ nu este mijlocul unui segment inclus în M și neinclus în A. De asemenea, se poate arăta că o parte convexă A a mulțimii convexe închise nevide M este mulțime extremă a mulțimii M dacă și numai dacă este închisă (în orice topologie în care este închisă mulțimea M) și mulțimea $M-A$ este convexă. În particular, toată mulțimea inițială M, orice mulțime formată dintr-un singur punct extrem al mulțimii M precum și mulțimea vidă sînt mulțimi extreme ale mulțimii M. Evident, o mulțime extremă a unei mulțimi, cu excepția cazurilor banale cînd ea este însăși mulțimea respectivă sau mulțimea vidă, aparține frontierei mulțimii. Proprietatea de a fi mulțime extremă a unei mulțimi este tranzitivă: *Dacă A este o mulțime extremă a unei mulțimi convexe închise nevide M, atunci orice mulțime extremă a mulțimii A este mulțime extremă a mulțimii M* [12]. Alte proprietăți simple ale mulțimilor extreme, pe care le vom folosi în decursul capitolului de față, sînt următoarele: Dacă $A \neq 0$ și B sînt mulțimi extreme ale unei mulțimi convexe închise nevide M și $B \subseteq A$, atunci B este o mulțime extremă a mulțimii A. Intersecția unui număr oarecare de mulțimi extreme ale unei mulțimi M este o mulțime extremă a acestei mulțimi.

Fie $x_0 \in E$ și r un număr pozitiv. Se numește *sferă* $S(x_0, r)$ cu *centrul* x_0 și *raza* r mulțimea $\{x \mid \| x - x_0 \| \leqslant r\}$. Mulțimea $\sigma(x_0, r) = \{x \mid \| x - x_0 \| = r\}$ se numește *suprafața*, iar mulțimea int $S(x_0, r) = \{x \mid \| x - x_0 \| < r\}$ se numește *interiorul sferei* $S(x_0, r)$. Vom nota pentru prescurtare cu S sfera unitate $S(0, 1)$ a spațiului E, cu σ suprafața și cu int S interiorul acestei sfere. Orice sferă $S(x_0, r)$ este o mulțime convexă; interiorul sferei $S(x_0, r)$ este o mulțime convexă, însă suprafața $\sigma(x_0, r)$ a sferei $S(x_0, r)$ nu este mulțime convexă.

Dacă mulțimea convexă $F \subset \sigma(x_0, r)$ este maximală, adică dacă nu există nici o mulțime convexă $F' \neq F$ astfel încît $F \subset F' \subset \sigma(x_0, r)$, atunci spunem că F este o *față**) *a sferei* $S(x_0, r)$.

Se poate arăta (vezi de ex. [12]) că orice punct al suprafeței sferei $S(x_0, r)$ aparține unei fețe a acestei sfere, deci suprafața oricărei sfere este reuniunea fețelor acestei sfere. De asemenea, se poate arăta că orice față a unei sfere $S(x_0, r)$ este mulțime extremă a acestei sfere; în particular, dacă fața F a sferei $S(x_0, r)$ constă dintr-un singur punct, atunci acest punct este punct extrem al sferei $S(x_0, r)$.

Fie x_1, x_2 două elemente distincte oarecare din spațiul E. Prin *dreapta* $[x_1, x_2]$ *care trece prin punctele* x_1, x_2 se înțelege mulțimea $\{x \mid x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, -\infty < \lambda < \infty\}$.

Numim o mulțime $V \subseteq E$ *varietate liniară*, dacă o dată cu orice două puncte ea conține și dreapta care trece prin ele, adică dacă $x_1, x_2 \in V$ implică $[x_1, x_2] \subseteq V$. În particular deci, orice mulțime formată dintr-un singur element, orice dreaptă și întreg spațiul E sînt varietăți liniare; mai mult, ele sînt varietăți liniare închise. De asemenea, orice mulțime formată din toate combinațiile liniare posibile ale unui număr finit de elemente liniar independente date este

*) S. Eilenberg [9] și R. F. Arens și J. L. Kelley [3] întrebuințează denumirea de «submulțime convexă maximală a suprafeței sferei», iar K. Tatarkiewicz [29] folosește termenul «mulțime de planeitate a sferei». Denumirea de «față» este folosită mai ales de R. E. Fullerton [11].

[20] o varietate liniară închisă. Evident, orice varietate liniară este o mulțime convexă.

K. Tatarkiewicz a arătat [29] că, pentru ca mulțimea F să fie o față a sferei $S(x_0, r)$ este necesar și suficient să avem $F = V \cap S(x_0, r)$ și F să fie maximală în sensul că nu există nici o mulțime $F' \neq F$ astfel încît $F' = V' \cap S(x_0, r)$, $F \subset F' \subset S(x_0, r)$.

Prin *învelișul liniar închis* al unei mulțimi nevide M se înțelege intersecția tuturor varietăților liniare închise care conțin mulțimea M.

Printre varietățile liniare din spațiul E se disting, prin importanța lor, hiperplanele. O varietate liniară închisă $H \subset E$ se numește *hiperplan*, dacă nu există nici o varietate liniară (închisă) H' astfel, încît $H \subset H' \subset E$, $H' \neq H$, $H' \neq E$. Hiperplanele sînt deci varietățile liniare închise maximale.

G. Ascoli a demonstrat următoarea propoziție [4]: *Dacă* $f \in E^*$, $f \neq \Phi^*$), *și* λ *este un număr, atunci mulțimea* $\{x \mid f(x) = \lambda\}$ *este un hiperplan; invers, pentru orice hiperplan dat* H *există o funcțională liniară* $f \in E^*$ *și un număr* λ *astfel încît* $H = \{x \mid f(x) = \lambda\}$.

Dintre hiperplanele din spațiul E ne vor interesa în mod deosebit hiperplanele de sprijin ale sferei unitate S. Spunem că hiperplanul H este *un hiperplan de sprijin* al sferei unitate S, dacă $H \cap \operatorname{int} S = 0$ și $\rho(H, S) = 0$**). Prin urmare, dacă un hiperplan H sprijină sfera S, atunci $M = H \cap S \subset \sigma$. Vom spune în acest caz, că *hiperplanul* H *sprijină sfera* S *în mulțimea* M.

După cum se știe [20], *ecuația oricărui hiperplan de sprijin al sferei* S *este de forma* $f(x) = 1$, *unde* $\| f \| = 1$.

Se știe [20] de asemenea, că *prin orice punct* $x_0 \in \sigma$ *(deci și prin orice mulțime convexă* $M \subset \sigma$*) se poate duce un hiperplan de sprijin al sferei* S. Inversa acestei afirmații nu mai este adevărată: se poate întîmpla ca intersecția unui hiperplan de sprijin al sferei S cu sfera S să fie vidă (cu alte cuvinte, se poate întîmpla ca pentru o funcțională liniară dată $f \in E^*$ cu $\| f \| = 1$ să nu existe nici un element $x \in E$ cu $\| x \| = 1$ astfel încît $f(x) = 1$).

Extindem definiția de mai sus și pentru varietăți liniare, spunînd că varietatea liniară V *sprijină* sfera S, dacă $V \cap \operatorname{int} S = 0$ și $\rho(V, S) = 0$. Folosind teorema lui S. Mazur [22], rezultă că varietatea liniară V sprijină sfera S numai dacă sfera S are un hiperplan de sprijin H care conține pe V; cînd $\rho(V, S) = 0$, această condiție este evident și suficientă.

Numim *translație* aplicația $U(x) = x + x_0$ a spațiului E pe el însuși. Vom spune, după G. Ascoli [4], că două varietăți liniare închise V_1 și V_2 *sînt paralele*, dacă există o translație care aduce pe una din ele în așa poziție, încît să conțină pe cealaltă, sau să fie conținută în cealaltă. În particular, deci, două hiperplane sînt paralele, dacă se pot suprapune printr-o translație; evident, hiperplanul $H_1 = \{x \mid f_1(x) = \lambda_1\}$ este paralel cu hiperplanul $H_2 = \{x \mid f_2(x) = \lambda_2\}$ dacă și numai dacă $f_1 = \lambda f_2$, $\lambda \neq 0$. De asemenea, o varietate liniară închisă V este paralelă cu un hiperplan H, dacă prin V trece un hiperplan paralel cu H.

Mai general, vom spune că două mulțimi convexe M_1 și M_2 *sînt paralele*, dacă învelișul liniar închis al mulțimii M_1 este paralel cu învelișul liniar închis al mulțimii M_2. În particular, orice două puncte sînt totdeauna paralele.

K. Tatarkiewicz a demonstrat următoarea teoremă [29]***: *Orice*

*) Notăm elementul nul al spațiului E cu θ și elementul nul al spațiului E^* cu Φ.
**) cu litera ρ notăm distanța.
***) teorema 2.4.

două sfere dintr-un spațiu Banach E se pot transforma una în cealaltă cu ajutorul produsului unei translații și a unei contracții) convenabil alese.* Din această teoremă rezultă că *orice două sfere dintr-un spațiu Banach au fețele paralele două câte două.*

În sfîrșit, vom folosi următoarea expresie: vom spune că o mulțime A este *banală*, dacă ea constă dintr-un singur punct.

2. Din cele precedente rezultă că ecuația oricărui hiperplan $\mathcal{H}$ din spațiul adjunct E^* este de forma $\varphi(f) = \lambda$, unde $\varphi \in E^{**}$ iar λ este un număr.

Printre hiperplanele din spațiul adjunct E^* se distinge clasa hiperplanelor regulate. Hiperplanul $\mathcal{H} \subset E^*$ se numește *hiperplan regulat*, dacă ecuația lui se poate da sub forma $f(x_0) = \lambda$, unde x_0 este un element fix din E, iar λ un număr.

Vom nota cu S^* sfera unitate $S(\Phi, 1)$ din spațiul E^* și cu σ^* suprafața acestei sfere. Hiperplanele de sprijin ale sferei S^* au ecuația de forma $\varphi(f) = 1$, unde $\varphi \in E^{**}$, $\| \varphi \| = 1$. Hiperplanele regulate de sprijin ale sferei S^* au ecuația de forma $f(x_0) = 1$, unde x_0 este un element fix din E cu $\| x_0 \| = 1$.

Prin orice punct $f_0 \in \sigma^*$ se poate duce un hiperplan de sprijin al sferei S^*. În general, însă, nu prin orice punct $f_0 \in \sigma^*$ se poate duce un hiperplan regulat de sprijin al sferei S^*.

O mulțime $\mathfrak{M}$ din spațiul E^* se numește *regulat convexă*, dacă orice punct $g \in E^*$, $g \notin \mathfrak{M}$ poate fi separat de $\mathfrak{M}$ printr-un hiperplan regulat, adică dacă pentru orice $g \in E^*$, $g \notin \mathfrak{M}$ există un element $x_0 \in E$ astfel încît $\sup_{f \in \mathfrak{M}} f(x_0) < g(x_0)$.

De exemplu, orice mulțime formată dintr-un singur punct, orice sferă $S(f_0, r)$, orice hiperplan regulat din spațiul E^* precum și întreg spațiul E^* sînt mulțimi regulat convexe.

Din definiția mulțimilor regulat convexe rezultă imediat că orice mulțime regulat convexă este convexă (invers nu) și intersecția unui număr oarecare de mulțimi regulat convexe este sau de asemenea regulat convexă, sau vidă. $\mathfrak{M}$ fiind o mulțime oarecare din spațiul E^*, intersecția tuturor mulțimilor regulat convexe care conțin mulțimea $\mathfrak{M}$ se numește *învelișul regulat convex* al mulțimii $\mathfrak{M}$ și se notează cu $\mathcal{H}_{\mathfrak{M}}$.

În spațiul E^*, pe lîngă topologia tare a spațiului, vom considera și topologia slabă definită prin vecinătățile lui Tihonov:

$$U(f_0; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{ f \mid | (f - f_0)(x_i) | < \varepsilon \},$$

unde $\| x_i \| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$

V. Gantmacher și V. Șmulian au demonstrat (vezi [18]) următorul criteriu de convexitate regulată: *O mulțime convexă mărginită $\mathcal{H} \subset E^*$ este regulat convexă dacă și numai dacă ea este slab bicompactă.* De aici rezultă, în particular, că orice sferă din spațiul E^* este o mulțime slab bicompactă; regăsim astfel o teoremă a lui L. Alaoglu [2].

Din această proprietate a sferelor și din criteriul de mai sus al lui V. Gantmacher și V. Șmulian se obține cu ușurință următorul criteriu de convexitate regulată:

(C) *O mulțime mărginită $\mathcal{H} \subset E^*$ este regulat convexă dacă și numai dacă este convexă și slab închisă.*

---

*) Prin contracție K. Tatarkiewicz înțelege aplicația $U(x) = \alpha x$ $(\alpha > 0)$ a spațiului E pe el însuși.

În baza criteriului (C) rezultă imediat că orice mulțime extremă a unei mulțimi regulat convexe este regulat convexă; în particular, orice mulțime extremă a unei sfere oarecare din spațiul E^* este regulat convexă.

M. Krein și D. Milman au demonstrat următoarea proprietate importantă a mulțimilor regulat convexe [18]: *Fie $\mathfrak{K} \subset E^*$ o mulțime regulat convexă mărginită. Atunci mulțimea $\mathfrak{E}$ a punctelor extreme ale lui $\mathfrak{K}$ este nevidă și învelișul ei regulat convex $\mathfrak{K}_{\mathfrak{E}}$ coincide cu $\mathfrak{K}$.*

Reamintim acum noțiunea de valoare medie, introdusă de A. A. Markov [21]. Fie R un spațiu topologic normal. Spunem că funcționala $\mathfrak{M}(x)$ definită pe spațiul*) $C(R)$ este o *valoare medie* definită în spațiul R, dacă ea satisface următoarele condiții:

1° $\mathfrak{M}(x+y) = \mathfrak{M}(x) + \mathfrak{M}(y)$ pentru orice $x, y \in C(R)$;

2° $\mathfrak{M}(x) \geqslant 0$, dacă $x(t) \geqslant 0$ pentru orice $t \in R$;

3° $\mathfrak{M}(x) = 1$, dacă $x(t) = 1$ pentru orice $t \in R$.

După cum a arătat A. A. Markov [21], *la fiecare valoare medie $\mathfrak{M}(x)$ definită în spațiul R îi corespunde în mod unic o funcție aditivă nenegativă $\mu(e)$ de mulțimi $e \subset R$ având anumite proprietăți și astfel încît,*

$$\mathfrak{M}(x) = \int_R x(t)\, d\mu(e),$$

unde integrala este înțeleasă în sens Fréchet-Stieltjes.

În lucrarea [19] M. Krein și V. Șmulian au demonstrat următoarea teoremă importantă: *Dacă $\mathfrak{E}$ este o mulțime mărginită din spațiul E^*, atunci învelișul ei regulat convex $\mathfrak{K}_{\mathfrak{E}}$ constă din acele și numai acele $g \in E^*$ care admit reprezentarea*

$$g(x) = \mathfrak{M}\{X(f)\},$$

unde cu $X(f)$ am notat următoarea funcție din**) $C(\mathfrak{E})$:

$$X(f) = f(x) \text{ pentru orice } f \in \mathfrak{E}.$$

Aplicînd această teoremă a lui M. Krein și V. Șmulian pentru cazul particular cînd $\mathfrak{E}$ este mulțimea punctelor extreme ale unei mulțimi regulat convexe, în baza teoremei lui M. Krein și D. Milman și ținînd seama de teorema lui A.A. Markov, rezultă [18] că fiecare punct al unei mulțimi regulat convexe este, într-un anumit sens, centrul de greutate al unor mase nenegative repartizate în punctele extreme ale acestei mulțimi.

3. În sfîrșit, reamintim definițiile unor clase particulare importante de spații Banach și cîteva proprietăți ale spațiilor care aparțin acestor clase.

Vom spune, după J. A. Clarkson [8], că spațiul Banach este un *spațiu de tip C*, dacă există un spațiu Hausdorff bicompact Q astfel încît spațiul E să fie echivalent (adică izomorf și izometric) cu spațiul $C(Q)$ al tuturor funcțiilor continue definite pe Q, norma fiind $\|x\| = \max_{t \in Q} |x(t)|$.

---

*) Notăm cu $C(R)$ spațiul tuturor funcțiilor mărginite continue pe R, cu norma definită în modul obișnuit: $\|x\| = \sup_{t \in R} |x(t)|$.

**) Notînd cu $\widetilde{\mathfrak{E}}$ închiderea slabă a mulțimii $\mathfrak{E}$, deoarece $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{K}_{\mathfrak{E}}$ și mulțimea $\mathfrak{K}_{\widetilde{\mathfrak{E}}}$ este slab bicompactă, rezultă că $\widetilde{\mathfrak{E}}$ este un spațiu Hausdorff bicompact, deci, în particular, și un spațiu topologic normal.

De exemplu, dacă spațiul Q constă din două elemente, atunci spațiul $C(Q)$ este echivalent cu mulțimea tuturor perechilor ordonate (ξ_1, ξ_2), unde ξ_1, ξ_2 sînt numere și $\| (\xi_1, \xi_2) \| = \max (| \xi_1 |, | \xi_2 |)$, adică spațiul $C(Q)$ este echivalent cu planul în care sfera unitate este pătratul $| \xi_1 |, | \xi_2 | \leqslant 1$; vom nota acest spațiu cu m_2. La fel, dacă spațiul Q constă din trei puncte, atunci spațiul $C(Q)$ este echivalent cu spațiul tri-dimensional în care sfera unitate este cubul $| \xi_1 |, | \xi_2 |, | \xi_3 | \leqslant 1$; vom nota acest spațiu cu m_3 (fig. 1.), ș.a.m.d.

Alte exemple de spații de tip C sînt: spațiul c al tuturor șirurilor infinite $x = \{\xi_n\}$ convergente, cu norma $\|x\| = \sup | \xi_i |$, spațiile $C(\mathfrak{M})$, unde $\mathfrak{M}$ este o mulțime mărginită închisă oarecare dintr-un spațiu euclidian de dimensiune oarecare k și, în particular, spațiul $C(<a, b>)$.

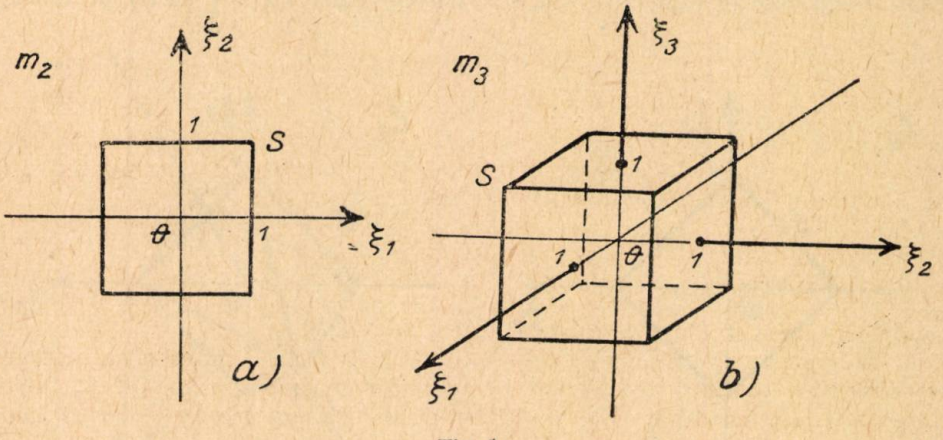

Fig. 1

Importanța studiului spațiilor de tip C reiese, între altele, din următoarea teoremă a lui L. Alaoglu [2]: Orice spațiu Banach E este echivalent cu un subspațiu al spațiului $C(S^*)$, unde S^* este sfera unitate*) din spațiul adjunct.

În legătură cu fețele sferei unitate S din spațiile de tip C, S. Eilenberg a demonstrat [9]**) următoarea teoremă: *Mulțimea $F \subset \sigma$ este o față a sferei S dacă și numai dacă există un $t_0 \in Q$ și $\varepsilon = \pm 1$ astfel încît $F = \{x \mid x(t_0) = \varepsilon, \|x\| = 1\}$.*

R. F. Arens și J. L. Kelley au demonstrat ([3], lemele 3.1 și 3.2) următoarea propoziție: *Funcționala liniară $f \in C(Q)^*$ este un punct extrem al sferei S^* dacă și numai dacă există un $t_0 \in Q$ astfel încît sau $f(x) = x(t_0)$ pentru orice $x \in C(Q)$, sau $f(x) = -x(t_0)$ pentru orice $x \in C(Q)$.*

Vom spune, după R. E. Fullerton [11], că spațiul Banach E este un *spațiu de tip L*, dacă există o mulțime Ω și o măsură complet aditivă m astfel încît spațiul E să fie echivalent***) cu spațiul $L(\Omega, m)$ al tuturor funcțiilor integrabile pe Ω în raport cu măsura m, norma fiind $\| x \| = \int_{\Omega} | x(t) | \, dm(t)$.

*) După cum am mai amintit, în topologia slabă S^* este un spațiu Hausdorff bicompact. Prin urmare, $C(S^*)$ este un spațiu de tip C.

**) teorema 5.3.

***) Condiția $m(\Omega) = 1$ pusă de R. E. Fullerton nu influențează echivalența și de aceea este de prisos.

De exemplu, dacă mulțimea Ω constă din două elemente și măsura $m(\omega)$ a mulțimii $\omega \subset \Omega$ o definim ca fiind egală cu numărul elementelor mulțimii ω, atunci spațiul $L(\Omega; m)$ este echivalent cu mulțimea tuturor perechilor ordonate (ξ_1, ξ_2), unde ξ_1, ξ_2 sînt numere și $\| (\xi_1, \xi_2) \| = |\xi_1| + |\xi_2|$, adică spațiul $L(\Omega; m)$ este echivalent cu planul în care sfera unitate este pătratul $|\xi_1| + |\xi_2| \leqslant 1$; vom nota acest spațiu cu l_2. La fel, dacă mulțimea Ω constă din trei puncte și măsura m este definită în mod analog cu aceea din exemplul precedent, atunci spațiul $L(\Omega; m)$ este echivalent cu spațiul tri-dimensional în care sfera unitate este octaedrul $|\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3| \leqslant 1$; vom nota acest spațiu cu l_3, (fig. 2) ș.a.m.d.*)

Un alt exemplu de spațiu de tip L este spațiul $L(<a, b>)$ al tuturor funcțiilor integrabile pe segmentul $<a, b>$, norma fiind $\| x \| = \int_a^b | x(t) | dt$. Spațiul

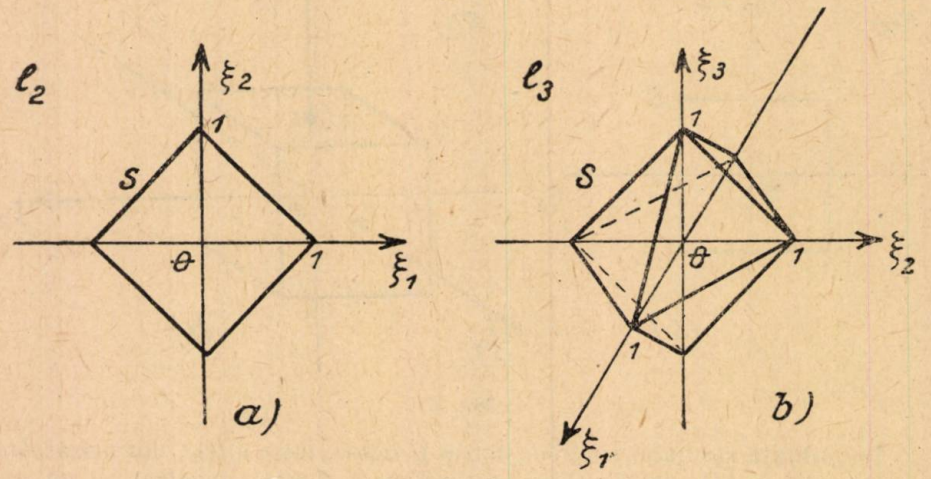

Fig. 2

$L_C(<a, b>)$ al tuturor funcțiilor continue pe segmentul $<a, b>$, cu norma $\| x \| = \int_a^b | x(t) | dt$ nu este însă un spațiu de tip L, deoarece $L_C(<a, b>) \subset L(<a, b>)$, $L_C(<a, b>) \neq L(<a, b>)$; de altfel spațiul $L_C(<a, b>)$, deși este spațiu liniar normat, nu este spațiu Banach.

În legătură cu fețele sferei unitate S din spațiile de tip L, R. E. Fullerton a demonstrat [11] următoarea teoremă: *Mulțimea $F \subset \sigma$ este o față a sferei S dacă și numai dacă există o submulțime măsurabilă $\omega \subset \Omega$ astfel* **) *încît* $F = \{x | \int_\Omega |x(t)| \, dm(t) = 1, \; x(t) > 0$ a.p.t. pe ω, $x(t) \leqslant 0$ a.p.t. pe $\Omega - \omega\}$.

Vom spune, după R. F. Arens și J. L. Kelley [3], că o față F a sferei unitate S împreună cu opusa ei $-F$ *întinde* sfera unitate S, dacă pentru orice $x \in S$ există $y \in F$, $z \in -F$ și λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, astfel încît $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$. După cum au arătat R. F. Arens și J. L. Kelley [3], respectiv R. E.

*) Menționăm că spațiile m_2 și l_2 sînt echivalente. Pentru $k \geqslant 3$ spațiile m_k și l_k nu sînt echivalente.

**) În loc de « submulțime măsurabilă în raport cu măsura m » vom spune pe scurt « submulțime măsurabilă » și în loc de « aproape peste tot » notăm prescurtat « a.p.t. »

F u l l e r t o n [11], *în spațiile de tip C precum și în spațiile de tip L orice față a sferei unitate împreună cu opusa ei întinde sfera unitate.*

În sfîrșit, vom spune după M. K r e i n *), că spațiul E este ***strict normat,*** dacă în inegalitatea $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$, unde $x,\ y \neq 0$, semnul egalității are loc numai în cazul cînd $y = \alpha x, \alpha > 0$.

De exemplu orice spațiu euclidian precum și orice spațiu hilbertian abstract (adică orice spațiu Banach de dimensiune infinită în care se poate defini un produs interior biliniar simetric astfel încît $\| x \| = \sqrt{(x, x)}$) este strict normat. De asemenea, spațiul $L^p (<a, b>)$ al tuturor funcțiilor cu a p-a putere integrabilă pe segmentul $<a, b,>$ norma fiind $\| x \| = \{ \int_a^b | x (t) |^p \, dt \}^{\frac{1}{p}}$, este pentru orice $p > 1$ un spațiu strict normat. La fel sînt și spațiile de șiruri l^p, l_k^p pentru $p > 1$ (vezi [20]).

Un spațiu E este strict normat dacă și numai dacă suprafața σ a sferei unitate S nu conține nici un segment. Prin urmare, spațiul E este strict normat dacă și numai dacă fiecare față a sferei unitate S este o mulțime banală. Deoarece orice față banală a sferei S este un punct extrem al acestei sfere, rezultă că spațiul E este strict normat dacă și numai dacă fiecare punct al mulțimii σ este punct extrem al sferei S.

Un alt criteriu important de strict normare este următorul, stabilit de M. K r e i n **): *Pentru ca spațiul Banach E să fie strict normat, este necesar și suficient ca fiecare funcțională liniară nenulă $f(x)$ să-și atingă maximul din sfera unitate S în cel mult un punct* ***).

§ 2. Fețele sferei unitate

1. Fie S sfera unitate a unui spațiu Banach oarecare E. Pentru orice față F a sferei S există cel puțin un hiperplan de sprijin H al sferei S astfel încît $F \subset H$. Prin urmare, orice față F a sferei S trebuie să satisfacă o egalitate de forma $f(x) = 1$, unde $f \in \sigma^*$. Vom studia mulțimea acestor funcționale $f \in \sigma^*$. În acest scop va fi utilă

L e m a 1.1. *Orice mulțime extremă a sferei S^* conține cel puțin un punct extrem al acestei sfere. Orice mulțime extremă nebanală a sferei S^* conține cel puțin două puncte extreme distincte ale acestei sfere.*

Demonstrație. Fie $\mathfrak{F}$ o mulțime extremă a sferei S^*. Atunci mulțimea $\mathfrak{F}$ este (vezi § 1) regulat convexă, deci, în baza teoremei lui Krein și Milman, conține cel puțin un punct extrem f. Deoarece $\mathfrak{F}$ este mulțime extremă a sferei S^* și f este punct extrem al lui $\mathfrak{F}$, rezultă că f este punct extrem al sferei S^*.

Fie $\mathfrak{F}$ o mulțime extremă nebanală a sferei S^*. Atunci ea este, cum am văzut, regulat convexă. Dacă mulțimea $\mathfrak{F}$ ar avea un singur punct extrem, atunci, ea fiind, în baza teoremei lui Krein și Milman, învelișul regulat convex al punctelor ei extreme și ținînd seama de faptul că mulțimile formate dintr-un singur punct

*) După cum reiese din unele trimiteri, denumirea de spațiu strict normat a fost introdusă de M. K r e i n în monografia (scrisă împreună cu N. I. A h i e z e r) despre teoria momentelor (1939); această monografie nu ne este accesibilă. Însăși spațiile strict normate au fost introduse, sub denumirea de « spații strict convexe » de J. A. C l a r k s o n în [7]. Unii autori numesc spațiile strict normate « spații cu sfera unitate strict convexă », iar K. T a t a r k i e w i c z le numește [29] « spații cu sfera unitate tare convexă ».

**) După cum reiese din unele trimiteri, acest criteriu a fost stabilit de M. K r e i n în monografia amintită, p. 178—179.

***) Poate să nu-l atingă în nici un punct.

sînt regulat convexe, ar rezulta că mulțimea $\mathfrak{F}$ este banală, în contradicție cu ipoteza. Prin urmare, mulțimea $\mathfrak{F}$ conține cel puțin două puncte extreme distincte f_1 și f_2. $\mathfrak{F}$ fiind prin ipoteză mulțime extremă a sferei S^*, f_1 și f_2 sînt puncte extreme ale sferei S^*.

Lema 1.1 este demonstrată.

În cele ce urmează vom folosi următoarele denumiri: Dacă există un singur hiperplan de sprijin care conține o mulțime convexă dată $M \subset \sigma$, atunci vom spune că M este o mulțime *monoplană*, iar dacă există mai multe hiperplane de sprijin ale sferei S care conțin mulțimea convexă $M \subset \sigma$, atunci vom spune că M este o mulțime *multiplană*. În particular, vom folosi termenii: față monoplană, față multiplană, punct monoplan *), punct multiplan. Orice mulțime convexă $M \subset \sigma$ este sau monoplană, sau multiplană. Vom spune că mulțimea regulat convexă $\mathfrak{K} \subset \sigma^*$ este *regulat monoplană*, dacă există un singur hiperplan regulat de sprijin al sferei S^* care trece prin $\mathfrak{K}$. Dacă există mai multe hiperplane regulate de sprijin ale sferei S^*, care conțin mulțimea regulat convexă $\mathfrak{K} \subset \sigma^*$, atunci vom spune că mulțimea $\mathfrak{K}$ este regulat *multiplană*. O mulțime regulat convexă $\mathfrak{K} \subset \sigma^*$ poate să nu fie nici regulat monoplană, nici regulat multiplană.

2. Teorema 1.1. *Dacă F_1 este o față a sferei S, atunci există un punct extrem f_1 al sferei S^*, astfel încît $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1\}$. Punctul extrem f_1 este unic dacă și numai dacă fața F_1 este monoplană.*

Demonstrație. Deoarece F_1 este o submulțime convexă a mulțimii σ și deoarece prin orice punct al sferei S trece cel puțin un hiperplan de sprijin al acestei sfere, mulțimea $\mathfrak{F}_1 = \{f \mid f(x) = 1$ pentru orice $x \in F_1, \|f\| = 1\}$ este nevidă. Fie $f \in \mathfrak{F}_1$. Deoarece pentru orice $x \in F_1$ avem $f(x) = 1$ și $\|x\| = 1$, rezultă că $F_1 \subseteq \{x \mid f(x) = 1, \|x\| = 1\}$. Mulțimea $\{x \mid f(x) = 1, \|x\| = 1\} \subset \sigma$ fiind convexă și F_1 fiind prin ipoteză o submulțime convexă maximală a mulțimii σ, rezultă că

$$F_1 = \{x \mid f(x) = 1, \|x\| = 1\} \text{ pentru orice } f \in \mathfrak{F}_1. \tag{1.1}$$

Arătăm că $\mathfrak{F}_1$ este o mulțime extremă a sferei S^*. Mulțimea $\mathfrak{F}_1$ este convexă. Într-adevăr, dacă $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 1$ penru orice $x \in F_1$ și $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$, atunci $\frac{f_1 + f_2}{2}(x) = 1$ pentru orice $x \in F_1$ și $\left\|\frac{f_1 + f_2}{2}\right\| = 1$, deoarece pe de o parte avem $\left\|\frac{f_1 + f_2}{2}\right\| \leqslant \frac{1}{2}\|f_1\| + \frac{1}{2}\|f_2\| \leqslant 1$, iar pe de altă parte pentru $x \in F_1$ avem $\left\|\frac{f_1 + f_2}{2}\right\| \geqslant \frac{f_1 + f_2}{2}(x) = 1$. Așadar, $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}_1$ implică $\frac{f_1 + f_2}{2} \in \mathfrak{F}_1$, adică mulțimea $\mathfrak{F}_1$ este convexă. Să presupunem acum că pentru un punct $f \in \mathfrak{F}_1$ avem $f = \frac{g + h}{2}$, unde $\|g\|, \|h\| \leqslant 1$. Atunci, deoarece $f \in \mathfrak{F}_1$, avem

$$1 = f(x) = \frac{g(x) + h(x)}{2} \text{ pentru orice } x \in F_1$$

și, deoarece $\|g\|, \|h\| \leqslant 1$, $F_1 \subset \sigma$, avem

$$g(x) \leqslant 1,\ h(x) \leqslant 1 \text{ pentru orice } x \in F_1.$$

De aceea $g(x) = 1$, $h(x) = 1$ pentru orice $x \in F_1$ și $\|g\| = \|h\| = 1$, deci $g \in \mathfrak{F}_1$, $h \in \mathfrak{F}_1$. Prin urmare $\mathfrak{F}_1$ este mulțime extremă a sferei S^*.

*) După cum a arătat S. Mazur [22], dacă E este un spațiu Banach separabil, mulțimea punctelor monoplane ale sferei S este o mulțime G_δ densă în σ.

În baza lemei 1.1 mulțimea $\mathfrak{F}_1$ conține cel puțin un punct extrem al sferei S^*.

Fața F_1 este sau monoplană, sau multiplană. Dacă fața F_1 este monoplană, atunci mulțimea $\mathfrak{F}_1$ este banală, deci constă dintr-un singur punct extrem f_1. Dacă fața F_1 nu este monoplană, atunci mulțimea $\mathfrak{F}_1$ este nebanală, deci în baza lemei 1.1 ea conține cel puțin două puncte extreme distincte ale sferei S^*.

Ținînd seama de relația (1.1), teorema 1.1 este demonstrată.

Observație. În decursul demonstrației teoremei 1.1 am văzut că pentru orice față F_1 a sferei S mulțimea $\mathfrak{F}_1 = \{ f \mid f(x) = 1$ pentru orice $x \in F_1, \| f \| = 1 \}$ este o mulțime extremă a sferei S^*. Prin aceeași metodă se poate arăta și următoarea proprietate mai generală: *Pentru orice mulțime nevidă* $M \subset \sigma$ *mulțimea*

$$\mathfrak{F}_1 = \{ f \mid f(x) = \text{pentru orice } x \in M, \| f \| = 1 \}$$

este o mulțime extremă a sferei S^*. *Mulțimea* $\mathfrak{F}_1$ *este nevidă dacă și numai dacă există o față* F *a sferei* S, *astfel încît* $M \subset F$.

Exemple simple ne arată că reciproca teoremei 1.1 nu este adevărată. Avem numai

Teorema 1.2. *Pentru orice punct* $f_1 \in \sigma^*$ *(deci în particular, pentru orice punct extrem al sferei* S^**), mulțimea* $F_1 = \{ x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1 \}$ *este o mulțime extremă* *) *a sferei* S.

Demonstrație. Deoarece $\| f_1 \| = 1$, mulțimea F_1 este intersecția mulțimii convexe $\{ x \mid f_1(x) = 1 \}$ cu mulțimea convexă S, deci mulțimea F_1 este convexă. Să presupunem că pentru un punct $x \in F_1$ avem $x = \frac{y+z}{2}$, unde $\| y \|, \| z \| \leqslant 1$. Atunci, deoarece $x \in F_1$, avem

$$1 = f_1(x) = \frac{f_1(y) + f_1(z)}{2}$$

și, deoarece $\| y \|, \| z \| \leqslant 1, \| f_1 \| = 1$, avem

$$f_1(y) \leqslant 1, \; f_1(z) \leqslant 1.$$

De aceea $f_1(y) = 1, f_1(z) = 1$ și $\| y \| = \| z \| = 1$, deci $y \in F_1, z \in F_1$. Prin urmare F_1 este mulțime extremă a sferei S, ceea ce era de demonstrat.

Consecință. Pentru orice mulțime nevidă $\mathfrak{F} \subset \sigma^*$ *mulțimea*

$$M_1 = \{ x \mid f(x) = 1 \text{ pentru orice } f \in \mathfrak{F}, \| x \| = 1 \}$$

este o mulțime extremă a sferei S.

Într-adevăr, M_1 este intersecția mulțimilor $\{ x \mid f(x) = 1, \| x \| = 1 \}$; acestea fiind, în baza teoremei 1.2, mulțimi extreme ale sferei S, mulțimea M_1 este o mulțime extremă a sferei S.

Mulțimea M_1 poate fi vidă chiar și atunci cînd mulțimea $\mathfrak{F}_1$ este convexă.

Observație. Deoarece orice hiperplan de sprijin H al sferei S are ecuația de forma $f(x) = 1$, unde $f \in \sigma^*$ și reciproc, din teorema 1.2 rezultă următoarea propoziție :

Intersecția **) *oricărui hiperplan de sprijin* H *al sferei* S *cu sfera* S *este o mulțime extremă a sferei* S.

Am regăsit astfel o propoziție a prof. Al. Ghika [12] ***).

Lema 1.2. *Mulțimea extremă* F_1 *din teorema* 1.2 *este nebanală dacă și numai dacă punctul* $f_1 \in \sigma^*$ *este regulat multiplan.*

---

*) Reamintim că și mulțimea vidă este o mulțime extremă a sferei S.

**) Reamintim că această intersecție poate fi vidă.

***) propoziția 2. În [12] propoziția este dată sub o formă mai generală.

Demonstrație Fie f_1 un punct regulat multiplan al sferei S^*. Atunci există două hiperplane regulate de sprijin distincte ale sferei S^* care conțin pe f_1,

$$\mathcal{H}_1 = \{ f \mid f(x_1) = 1 \} \quad \text{și} \quad \mathcal{H}_2 = \{ f \mid f(x_2) = 1 \},$$

unde $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, $x_1 \neq x_2$. Însă atunci evident $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_1$, deci mulțimea F_1 este nebanală.

Invers, fie $f_1 \in \sigma^*$ și fie mulțimea $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1\}$ nebanală: $x_1, x_2 \in F_1$, $x_1 \neq x_2$. Atunci hiperplanele regulate distincte $\mathcal{H}_1 = \{ f \mid f(x_1) = 1 \}$ și $\mathcal{H}_2 = \{ f \mid f(x_2) = 1 \}$ sprijină sfera S^* și conțin punctul f_1, adică f_1 este un punct regulat multiplan.

Lema 1.2 este demonstrată.

Deoarece spațiile strict normate sînt acele spații în care fiecare față deci și fiecare mulțime extremă a sferei S este o mulțime banală (vezi § 1), din lema 1.2 rezultă, în particular

Consecința 1. Spațiul Banach E este strict normat dacă și numai dacă sfera unitate S^* din spațiul adjunct E^* nu are nici un punct regulat multiplan.

Am regăsit astfel criteriul de strict normare al lui M.G. K r e i n, exprimat sub o formă geometrică.

Observăm că acest criteriu se poate întări. Anume, în baza teoremei 1.1, pentru orice față F_1 a sferei S există un punct extrem al sferei S^*, astfel, încît $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1\}$, deci, ținînd seama de faptul că spațiile strict normate sînt acele spații, în care fiecare față a sferei S este banală, precum și de lema 1.2, rezultă

Consecința 2. Spațiul Banach E este strict normat dacă și numai dacă sfera unitate S^* din spațiul adjunct E^* nu are nici un punct extrem regulat multiplan.

Acest criteriu de strict normare este nou și este într-adevăr o întărire a criteriului precedent, deoarece exemple simple ne arată că dacă spațiul E este strict normat, în general nu orice punct al sferei S^* este punct extrem al acestei sfere.

3. Am văzut că la orice față F_1 a sferei S îi corespunde cel puțin un punct extrem f_1 al sferei S^*, astfel încît $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1\}$, însă invers, dacă f_1 este un punct extrem oarecare al lui S^*, mulțimea corespunzătoare $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1\}$ nu totdeauna este o față a sferei S. Se pune deci întrebarea: *La ce puncte extreme f ale sferei S^* îi corespund fețe ale sferei S?* Răspunsul este

T e o r e m a 1.3. *Fie f_1 un punct extrem al sferei S^*. Pentru ca mulțimea $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1\}$ să fie o față a sferei S, este necesar și suficient să nu existe un punct extrem $f \neq f_1$ al sferei S^* și un element $x_0 \in E$, astfel încît*

$$\begin{cases} f_1(x) = 1, \ \|x\| = 1 \ \text{implică} \ f(x) = 1 \\ f(x_0) = 1, \ \|x_0\| = 1, \ f_1(x_0) \neq 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Demonstrație. Necesitatea. Să presupunem că nu este satisfăcută condiția, adică există un punct extrem $f \neq f_1$ al sferei S^* și un element $x_0 \in E$, astfel încît să avem (1.2). Aceasta înseamnă că

$$x \in F_1 \ \text{implică} \ x \in F = \{x \mid f(x) = 1, \|x\| = 1\}$$

$$x_0 \in F, \ x_0 \notin F_1,$$

adică $F_1 \subset F$, $F_1 \neq F$. Ținînd seama de faptul că $F \subset \sigma$ și de convexitatea mulțimii F, rezultă că F_1 nu este o submulțime convexă maximală a suprafeței sferei S, adică F_1 nu este o față a sferei S.

Suficiența. Dacă mulțimea convexă $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1\} \subset \sigma$ nu este o față a sferei S, atunci există o față F a sferei S astfel, încît $F_1 \neq F$, $F_1 \subset F$. Atunci deoarece

$$x \in F_1 \text{ implică } x \in F$$

și, deoarece în același timp $F_1 \neq F$, există un element $x_0 \in E$ astfel încît

$$x_0 \in F, \quad x_0 \notin F_1.$$

Pe de altă parte, F fiind o față a sferei S, în baza teoremei 1.1 există un punct extrem f al sferei S^* astfel încît $F = \{x \mid f(x) = 1, \| x \| = 1\}$; deoarece $F \neq F_1$, avem $f \neq f_1$. Prin urmare există un punct extrem $f \neq f_1$ al sferei S^* și un element $x_0 \in E$ astfel, încît să avem (1.2), deci condiția din teoremă nu este satisfăcută.

Teorema 1.3 este demonstrată.

C o r o l a r. *Fie f_1 un punct extrem al sferei S^*. Pentru ca mulțimea $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1\}$ să fie o față a sferei S, este suficient ca pentru orice punct extrem $f \neq f_1$ al sferei S^* să existe un element $x \in F_1$ astfel, încît $f(x) \neq 1$.*

Demonstrație. Să presupunem că mulțimea F_1 nu este o față a sferei S. Atunci, în baza teoremei 1.1, există un punct extrem $f \neq f_1$ al sferei S^* astfel, încît

$$x \in F_1 \text{ implică } f(x) = 1,$$

deci pentru acest f nu există nici un element $x \in F_1$ astfel, încît $f(x) \neq 1$. Corolarul este demonstrat.

Vom spune că punctul extrem f_1 al sferei S^* este un *punct extrem generator de față*, sau pe scurt, un *punct extrem generator*, dacă mulțimea $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1\}$ este o față a sferei S.

Exemple simple ne arată că condiția din corolarul de mai sus nu este necesară pentru ca punctul extrem f_1 să fie generator.

Observație. Am văzut că punctele extreme ale sferei S^* joacă un rol deosebit printre punctele lui σ^*. De aceea hiperplanele de sprijin ale sferei S corespunzătoare acestor puncte extreme au și ele o poziție specială, în comparație cu celelalte hiperplane de sprijin ale sferei S. Anume, hiperplanele de sprijin ale sferei S corespunzătoare punctelor extreme ale sferei S^* sînt hiperplanele de sprijin «extreme» într-un anumit sens, care generalizează noțiunea de «hiperplan tangent» introdusă de S. Mazur [22]. Nu intrăm în amănunte în cadrul lucrării de față.

4. Să vedem acum ce obținem aplicînd rezultatele precedente la cazul particular al spațiilor de tip C și al spațiilor de tip L.

L e m a 1.3. *Dacă E este un spațiu de tip C, atunci pentru orice punct extrem f_1 al sferei S^* mulțimea $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1\}$ este o față a sferei S.*

Demonstrație. Fie f_1 un punct extrem al sferei S^*. Atunci există (vezi § 1) un punct $t_1 \in Q$, astfel încît sau $f_1(x) = x(t_1)$ pentru orice $x \in C(Q)$ sau $f_1(x) = -x(t_1)$ pentru orice $x \in C(Q)$. Să presupunem primul caz, în al doilea raționamentul fiind analog. În baza corolarului de la teorema 1.3, este suficient să arătăm că pentru orice $\tau \in Q$, $\tau \neq t_1$ există o funcție $x(t) \in C(Q)$ astfel încît $x(t_1) = 1$, $\max_{t \in Q} |x(t)| = 1$ și $x(\tau) \neq \pm 1$. Deoarece spațiul Q, fiind spațiu Hausdorff bicompact, este normal, din lema mare a lui P.S. Urîson rezultă că există chiar o infinitate de astfel de funcții.

Lema 1.3 este demonstrată.

Cu alte cuvinte, dacă E este un spațiu de tip C, atunci orice punct extrem al sferei S^* este generator.

Pentru a putea stabili un rezultat similar pentru cazul spațiilor de tip L, este necesar să cunoaștem pentru aceste spații punctele extreme ale sferei S^*.

Lema 1.4. *E fiind un spațiu de tip L, o funcțională $f \in \sigma^*$ este punct extrem al sferei S^* dacă și numai dacă există o submulțime măsurabilă ω a mulțimii Ω astfel încît să avem pentru orice $x \in L(\Omega; m)$*

$$f(x) = \int_{\Omega} x(t)\, \beta_{\omega}(t)\, dm(t),$$

unde

$$\beta_{\omega}(t) = \begin{cases} +1 & \text{a.p.t. pe } \omega \\ -1 & \text{a.p.t. pe } \Omega - \omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Demonstrație. Necesitatea. Să presupunem că funcționala $f \in \sigma^*$ nu satisface condiția. Atunci

$$f(x) = \int_{\Omega} x(t)\, \alpha(t)\, dm(t), \quad \operatorname{ad\,max}_{\Omega} |\alpha(t)| = \|f\| = 1$$

și există o submulțime $\Sigma \subset \Omega$ cu $m(\Sigma) > 0$ și $m(\Omega - \Sigma) > 0$, astfel încît $|\alpha(t)| < 1$ a.p.t. pe Σ. Fie

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{a.p.t. pe } \Sigma \\ \alpha(t) & \text{a.p.t. pe } \Omega - \Sigma \end{cases}$$

$$\alpha_2(t) = \begin{cases} 2\alpha(t) - 1 & \text{a.p.t. pe } \Sigma \\ \alpha(t) & \text{a.p.t. pe } \Omega - \Sigma. \end{cases}$$

Atunci $f_1(x) = \int_{\Omega} x(t)\, \alpha_1(t)\, dm(t) \in \sigma^*$, $f_2(x) = \int_{\Omega} x(t)\, \alpha_2(t)\, dm(t) \in \sigma^*$,

$f_1 \neq f_2$ și $f = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$, deci f nu este punct extrem al sferei S^*.

Suficiența. Să presupunem că există o submulțime măsurabilă $\omega \subset \Omega$ astfel, încît pentru orice $x \in L(\Omega; m)$

$$f(x) = \int_{\Omega} x(t)\, \beta_{\omega}(t)\, dm(t)$$

și f nu este punct extrem al sferei S^*, adică $f = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$, unde $f_1, f_2 \in S^*$, $f_1 \neq f_2$.

Atunci există două funcții $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ cu $\operatorname{ad\,max}_{\Omega} |\alpha_1(t)| \leqslant 1$, $\operatorname{ad\,max}_{\Omega} |\alpha_2(t)| \leqslant 1$ astfel, încît pentru orice $x \in L(\Omega; m)$

$$f_1(x) = \int_{\Omega} x(t)\, \alpha_1(t)\, dm(t), \qquad f_2(x) = \int_{\Omega} x(t)\, \alpha_2(t)\, dm(t)$$

precum și o submulțime $\Sigma \subset \Omega$ cu $m(\Sigma) > 0$, astfel încît

$$\alpha_1(t) \neq \alpha_2(t) \text{ a.p.t. pe } \Sigma.$$

Atunci, deoarece

$$\beta_\omega(t) = \frac{\alpha_1(t)+\alpha_2(t)}{2} \text{ a.p.t. pe } \Omega,$$

rezultă că

$$\alpha_1(t) \neq \beta_\omega(t) \text{ și } \alpha_2(t) \neq \beta_\omega(t) \text{ a.p.t. pe } \Sigma.$$

Există o submulțime $\Sigma' \subset \Sigma$ cu $m(\Sigma') > 0$, astfel încît sau $\beta_\omega(t) = 1$ a.p.t. pe Σ', sau $\beta_\omega(t) = -1$ a.p.t. pe Σ'. Dacă $\beta_\omega(t) = 1$ a.p.t. pe Σ', atunci $\alpha_1(t) < 1$, $\alpha_2(t) < 1$ a.p.t. pe Σ', deci $\beta_\omega(t) = \frac{\alpha_1(t)+\alpha_2(t)}{2} < 1$ a.p.t. pe Σ', în contradicție cu ipoteza că $\beta_\omega(t) = 1$ a.p.t. pe Σ', iar dacă $\beta_\omega(t) = -1$ a.p.t. pe Σ', atunci $\alpha_1(t) > -1$, $\alpha_2(t) > -1$ a.p.t. pe Σ', deci $\beta_\omega(t) = \frac{\alpha_1(t)+\alpha_2(t)}{2} > -1$, a.p.t. pe Σ', în contradicție cu ipoteza că $\beta_\omega(t) = -1$ a.p.t. pe Σ'.

Lema 1.4 este demonstrată.

Acum putem demonstra

L e m a 1.5. *Dacă E este un spațiu de tip L, atunci pentru orice punct extrem f_1 al sferei S^* mulțimea $F_1 = \{ x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1 \}$ este o față a sferei S.*

Demonstrație. Fie f_1 un punct extrem al sferei S^*. Atunci în baza lemei 1.4 există o submulțime măsurabilă $\omega_1 \subset \Omega$, astfel încît $f_1(x) = \int_\Omega x(t)\beta_{\omega_1}(t)\,dm(t)$.

În baza corolarului de la teorema 1.3 este deci suficient să arătăm că pentru orice submulțime măsurabilă $\omega \subset \Omega$, $\omega \not\cong \omega_1$, $\omega \not\cong \Omega - \omega_1$*) există o funcție $x(t) \in L(\Omega; m)$, astfel încît $\int_\Omega x(t)\,\beta_{\omega_1}(t)\,dm(t) = 1$, $\int_\Omega |x(t)|\,dm(t) = 1$ și $\int_\Omega x(t)\,\beta_\omega(t)\,dm(t) \neq 1$. Or, o astfel de funcție este de exemplu $x(t) = \frac{1}{m(\Omega)}\beta_{\omega_1}(t)$.

Lema 1.5 este demonstrată.

Cu alte cuvinte, dacă E este un spațiu de tip L, atunci orice punct extrem al sferei S^* este generator.

Vom arăta acum că teoremele lui S. Eilenberg, respectiv R.E. Fullerton, asupra fețelor sferei unitate din spațiile de tip C respectiv din spațiile de tip L (vezi § 1) rezultă drept cazuri particulare din rezultatele noastre generale.

Dacă E este un spațiu de tip C, atunci, după cum am amintit (vezi § 1), $f \in \sigma^*$ este punct extrem al sferei S^* dacă și numai dacă există un $t_0 \in Q$ astfel încît sau $f(x) = x(t_0)$ pentru orice $x \in C(Q) = E$, sau $f(x) = -x(t_0)$ pentru orice $x \in C(Q)$. De aceea, în baza toremei 1.1 și a lemei 1.3 rezultă că mulțimea $F \subset \sigma$ este o față a sferei S dacă și numai dacă există un $t_0 \in Q$ și $\varepsilon = \pm 1$, astfel încît $F = \{x \mid x(t_0) = \varepsilon, \| x \| = 1\}$. Aceasta însă nu este altceva decît teorema lui S. Eilenberg.

Dacă E este un spațiu de tip L, atunci, în virtutea lemei 1.4 funcționala liniară $f \in \sigma^*$ este un punct extrem al sferei S^* dacă și numai dacă există o sub-

*) Prin $\cong$ notăm echivalența a două mulțimi adică faptul că ele diferă printr-o mulțime de măsură nulă.

mulțime măsurabilă $\omega \subset \Omega$ astfel, încît să avem $f(x) = \int_{\Omega} x(t)\,\beta_\omega(t)\,dm(t)$ pentru orice $x \in L(\Omega;m)$. De aceea, în baza teoremei 1.1 și a lemei 1.5 rezultă că fețele sferei S sînt mulțimile $F'_\omega = \{x \mid \int_{\Omega} x(t)\,\beta_\omega(t)\,dm(t) = 1, \int_{\Omega} |x(t)|\,dm(t) = 1\}$, unde ω este o submulțime măsurabilă a mulțimii Ω. Pentru a arăta că acest rezultat este echivalent cu teorema lui R. E. Fullerton, este suficient să arătăm că dacă

$$F'_\omega = \{x \mid \int_{\Omega} |x(t)|\,dm(t) = 1\,,\ \int_{\Omega} x(t)\,\beta_\omega(t)\,dm(t) = 1\}\,,$$

$$F''_\omega = \{x \mid \int_{\Omega} |x(t)|\,dm(t) = 1\,,\ x(t) \begin{matrix} > 0 \text{ a.p.t. pe } \omega \\ \leqslant 0 \text{ a.p.t. pe } \Omega - \omega \end{matrix}\},$$

atunci $F'_\omega = F''_\omega$.

Fie $x \in F''_\omega$. Atunci, notînd cu $\alpha_\omega(t)$ funcția caracteristică a mulțimii ω avem

$$\int_{\Omega} x(t)\,\beta_\omega(t)\,dm(t) = \int_{\Omega} x(t)\,\alpha_\omega(t)\,dm(t) - \int_{\Omega} x(t)\,\alpha_{\Omega-\omega}(t)\,dm(t) =$$

$$= \int_{\omega} |x(t)|\,dm(t) + \int_{\Omega-\omega} |x(t)|\,dm(t) = \int_{\Omega} |x(t)|\,dm(t) = 1,$$

deci $x \in F'_\omega$. Invers, dacă $x \in F'_\omega$, fie $x(t) > 0$ a.p.t. pe A, $x(t) \leqslant 0$ a.p.t. pe $\Omega - A$. Atunci, în baza ipotezei,

$$\int_{\Omega} |x(t)|\,dm(t) = 1 = \int_{\Omega} x(t)\,\beta_\omega(t)\,dm(t) = \int_{\Omega} x(t)\,\alpha_\omega(t)\,dm(t) -$$

$$- \int_{\Omega} x(t)\,\alpha_{\Omega-\omega}(t)\,dm(t) = \int_{\Omega} x(t)\,\alpha_{\omega\cap A}(t)\,dm(t) + \int_{\Omega} x(t)\,\alpha_{\omega\cap\Omega-A}(t)\,dm(t) -$$

$$- \int_{\Omega} x(t)\,\alpha_{\Omega-\omega\cap A}(t)\,dm(t) - \int_{\Omega} x(t)\,\alpha_{\Omega-\omega\cap\Omega-A}(t)\,dm(t) = \int_{\omega\cap A} |x(t)|\,dm(t) -$$

$$- \int_{\omega\cap\Omega-A} |x(t)|\,dm(t) - \int_{\Omega-\omega\cap A} |x(t)|\,dm(t) + \int_{\Omega-\omega\cap\Omega-A} |x(t)|\,dm(t)\,.$$

Din această egalitate rezultă că $m(\omega \cap \Omega - A) = m(\Omega - \omega \cap A) = 0$, deci $A \cong \omega$, adică $x \in F'_\omega$, ceea ce era de demonstrat.

5. Am văzut, în cele de mai înainte, că la orice față F_1 a sferei S îi corespunde cel puțin un punct extrem f_1 al sferei S^* astfel încît $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1\}$ și am văzut, pentru ce puncte extreme f_1 ale sferei S^* este mulțimea $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1\}$ o față a sferei S. Deoarece orice față a sferei S este sau monoplană, sau multiplană, se pune întrebarea, pentru ce puncte extreme (generatoare) f_1 este mulțimea F_1 o față monoplană a sferei S. Răspunsul este

Teorema 1.4. *Fie f_1 un punct extrem al sferei S^*. Pentru ca mulțimea $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1\}$ să fie o față monoplană a sferei S, este necesar și suficient ca pentru orice punct extrem $f \neq f_1$ al sferei S^* să existe un element $x \in F_1$, astfel încît $f(x) \neq 1$, adică,*

$$\mathfrak{F}_2 = \{f \mid f(x) = 1 \text{ pentru orice } x \in F_1, f \text{ punct extrem al sferei } S^*\} = \{f_1\}. \quad (1.4)$$

Demonstrație. Necesitatea. Să presupunem că mulțimea F_1 este o față monoplană a sferei S. Atunci, în baza teoremei 1.1 există exact un punct extrem f' al sferei S^*, astfel încît $F_1 = \{x \mid f'(x) = 1, \|x\| = 1\}$, adică $\mathfrak{F}_2 = \{f'\}$. Deoarece prin ipoteză f_1 este un punct extrem al sferei S^* și $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1\}$, rezultă că $f' = f_1$, deci $\mathfrak{F}_2 = \{f_1\}$.

Suficiența. Dacă avem (1.4), atunci, în baza corolarului de la teorema 1.3 mulțimea F_1 este o față a sferei S și prin urmare, în baza părții a doua a teoremei 1.1 și a ipotezei (1.4), ea este o față monoplană a sferei S.

Teorema 1.4 este demonstrată.

Observația 1. f_1 fiind un punct extrem al sferei S^*, pentru ca mulțimea $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1\}$ să fie o față monoplană a sferei S, este necesar și suficient să avem

$$\mathfrak{F}_1 = \{f \mid f(x) = 1 \text{ pentru orice } x \in F_1, \|f\| = 1\} = \{f_1\}. \quad (1.5)$$

Într-adevăr, mulțimea $\mathfrak{F}_1$ fiind o mulțime extremă a sferei S^* (vezi observația de la teorema 1.1), ea constă dintr-un singur punct extrem al sferei S^* dacă este banală și ea conține, în baza lemei 1.1, cel puțin două puncte extreme distincte ale sferei S^*, dacă este nebanală, deci *condiția (1.5) este echivalentă cu condiția (1.4).*

Observația 2. În timp ce partea a doua a teoremei 1.1 dă o condiție necesară și suficientă pentru ca o față a sferei S să fie monoplană, teorema 1.4 dă o condiție necesară și suficientă pentru ca o mulțime extremă oarecare a sferei S să fie o față monoplană a acestei sfere. Totodată teorema 1.4 este o consecință a teoremei 1.1, deoarece corolarul de la teorema 1.3, la care se face trimiterea în demonstrația teoremei 1.4, este și el o consecință a teoremei 1.1.

O clasă particulară importantă de fețe monoplane este aceea a fețelor perfecte. Vom spune că o față F a sferei S este *față perfectă*, dacă există un singur hiperplan care conține fața. Cu alte cuvinte, vom numi fața F a sferei S față perfectă a acestei sfere, dacă învelișul liniar închis al mulțimii F este un hiperplan. Evident, orice față perfectă este monoplană și nebanală, însă nu orice față monoplană nebanală este perfectă, după cum ne arată exemplul din figura 3.

Evident, o față F_1 a sferei S este neperfectă dacă și numai dacă există un hiperplan trecînd prin origine, care o conține. Rezultă că o față F_1 a sferei S este perfectă dacă și numai dacă nu există nici un $f \in E^*$, $f \neq \Phi$, astfel încît să avem $f(x) = 0$ pentru orice $x \in F_1$. Avem prin urmare

Teorema 1.5. *O față F_1 a sferei S este perfectă dacă și numai dacă pentru orice $f \in E^*$, $f \neq \Phi$ există un element $x \in F_1$ astfel încît $f(x) \neq 0$.*

În spațiile strict normate fiecare față a sferei S este o mulțime banală, deci nici o față a sferei S nu este perfectă. Vom arăta acum o categorie importantă de spații în care fiecare față a sferei unitate este perfectă.

Lema 1.6. *Dacă o față F a sferei unitate S împreună cu fața opusă $-F$ întinde sfera S, atunci fețele F și $-F$ sînt perfecte.*

Demonstrație. Să presupunem contrariul, și anume că una dintre cele două fețe, fie F, nu este perfectă. Atunci, în baza teoremei 1.5, există $f \in E^*$, $f \neq \Phi$, astfel încît $f(x) = 0$ pentru orice $x \in F$. Evident, $f(x) = 0$ și pentru

orice $x \in -F$. Deoarece fața F împreună cu $-F$ întinde sfera S, pentru orice $x \in S$ există $y \in F$, $z \in -F$ și λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, astfel încît $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$. Rezultă că $f(x) = 0$ pentru orice $x \in S$, deci și pentru orice $x \in E$, de unde $f = \Phi$, în contradicție cu ipoteza $f \neq \Phi$.

Lema 1.6 este demonstrată.

Din lema 1.6 rezultă următoarea

Consecință. În spațiile în care orice față a sferei unitate S împreună cu opusa ei întinde sfera S, fiecare față a sferei S este perfectă.

În particular, *în spațiile de tip C și în spațiile de tip L fiecare față a sferei unitate S este perfectă.*

În cele precedente am văzut pentru ce puncte extreme f_1 ale sferei S^* este mulțimea $F_1 = \{ x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1 \}$ o față a sferei S (teorema 1.3

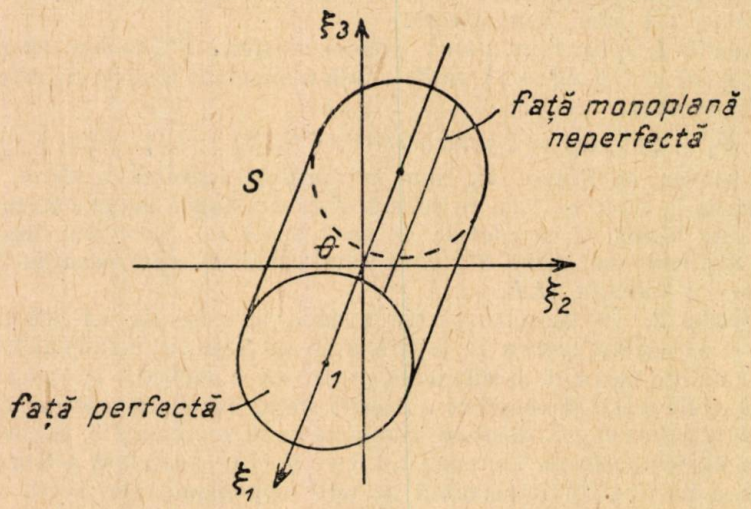

Fig. 3

și corolarul) și, mai departe, o față monoplană a acestei sfere (teorema 1.4). Se pune problema, pentru ce puncte extreme f_1 ale sferei S^* este mulțimea $F_1 = \{ x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1 \}$ o față perfectă a sferei S. Răspunsul este

Teorema 1.6 *Fie f_1 un punct extrem al sferei S^*. Pentru ca mulțimea $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1\}$ să fie o față perfectă a sferei S, este necesar și suficient să avem*

$$\mathfrak{F}_0 = \{ f \mid f(x) = 1 \text{ pentru orice } x \in F_1 \} = \{ f_1 \}. \tag{1.6}$$

Demonstrație. Necesitatea. Pentru orice $f \in \mathfrak{F}_0$ mulțimea $\{ x \mid f(x) = 1 \}$ este un hiperplan care conține mulțimea F_1 și invers, orice hiperplan care conține mulțimea F_1 are ecuația de forma $f(x) = 1$, unde $f \in \mathfrak{F}_0$. Prin urmare, dacă mulțimea F_1 este o față perfectă a sferei S, atunci mulțimea $\mathfrak{F}_0$ este banală. Deoarece prin ipoteză $f_1 \in \mathfrak{F}_0$, rezultă că $\mathfrak{F}_0 = \{ f_1 \}$.

Suficiența. Dacă este satisfăcută condiția (1.6), atunci, f_1 fiind prin ipoteză un punct extrem al sferei S^*, în virtutea corolarului de la teorema 1.3 mulțimea F_1 este o față a sferei S. Deoarece orice hiperplan care conține fața F_1 are ecuația de forma $f(x) = 1$, unde $f \in \mathfrak{F}_0$ și orice hiperplan $\{x \mid f(x) = 1\}$, unde

$f \in \mathcal{F}_0$, conține fața F_1, din ipoteza (1.6) rezultă că singurul hiperplan care conține fața F_1 este $\{ x \mid f_1(x) = 1 \}$, adică F_1 este o față perfectă a sferei S.

Teorema 1.6 este demonstrată.

Observație. Din cele precedente reiese că fiecărei mulțimi convexe F de pe suprafața sferei S (în particular, fiecărei mulțimi extreme deci și fiecărei fețe a sferei S) se atașează în mod natural următoarele trei mulțimi nevide din spațiul adjunct E^*:

$\mathcal{F}_2 = \bigcap_{x \in F} \{ f \mid f(x) = 1, f$ punct extrem al sferei $S^* \} \subset \sigma^*$ (vezi teorema 1.4),

$\mathcal{F}_1 = \bigcap_{x \in F} \{ f \mid f(x) = 1, \| f \| = 1 \} \subset \sigma^*$ (vezi teorema 1.1 și observația de la teorema 1.4),

$\mathcal{F}_0 = \bigcap_{x \in F} \{ f \mid f(x) = 1 \}$ (vezi teorema 1.5).

Avem $\mathcal{F}_0 \subset \sigma^*$ dacă și numai dacă mulțimea $\mathcal{F}_0$ este banală, prin urmare, dacă și numai dacă $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0$. (Aceasta este în același timp condiția necesară și suficientă pentru ca mulțimea F să fie o față perfectă a sferei S).

Între mulțimile $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_0$ avem evident relațiile

$$\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_0,$$

egalitatea $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$ fiind posibilă și în cazul $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_0$.

§ 3. Mulțimile de sprijin ale sferei unitate

1. În paragraful 2 am studiat fețele sferei unitate S dintr-un spațiu Banach oarecare E, cu ajutorul elementelor spațiului și a elementelor spațiului adjunct. Această metodă revine, în esență, la utilizarea hiperplanelor de sprijin ale sferei S prin considerarea feței F ca fiind intersecția sferei S cu acele hiperplane de sprijin ale sferei S care conțin fața F.

Generalizînd cele precedente, vom spune că o mulțime $M \subset \sigma$ este *o mulțime de sprijin a sferei* S (sau, pe scurt, o *mulțime de sprijin*), dacă există un hiperplan de sprijin H al sferei S care sprijină sfera S în mulțimea M (adică $H \cap S = M$; vezi § 1). În paragraful 2 am considerat fiecare față F a sferei S ca fiind o mulțime de sprijin a acestei sfere. În acest paragraf vom studia mulțimile de sprijin ale sferei S; unele rezultate din acest paragraf adîncesc și generalizează unele rezultate din paragraful 2.

Începem prin cîteva considerații pregătitoare.

Fie $\mathcal{F}$ o mulțime oarecare de puncte extreme neopuse (adică, astfel încît $f \in \mathcal{F}$ implică $-f \notin \mathcal{F}$) ale sferei S^*. Fiecărui element $x \in E$ îi corespunde o funcție continuă $X(f) \in C(\mathcal{F})$ definită astfel:

$$X(f) = f(x) \text{ pentru orice } f \in \mathcal{F}. \tag{1.7}$$

Fie $\mathfrak{M}$ o valoare medie oarecare definită în spațiul $\mathcal{F}$ (vezi § 1).

Dacă la fiecare element $x \in E$ *atașăm numărul*

$$m(x) = \mathfrak{M} \{ X(f) \} = \int_{\mathcal{F}} X(f) \, d\mu(e), \tag{1.8}$$

obținem o funcțională liniară $m \in E^*$ *cu următoarele proprietăți*:

1° *dacă* $f(x) \geqslant 0$ *pentru orice* $f \in \mathcal{F}$ *cu* $\mu(\{f\}) \neq 0$, *atunci* $m(x) \geqslant 0$;

2° *dacă* $f(x) = 1$ *pentru orice* $f \in \mathcal{F}$ *cu* $\mu(\{f\}) \neq 0$, *atunci* $m(x) = 1$,
3° $\| m \| \leqslant 1$; *dacă* $\mathcal{K}_{\mathcal{F}} \subset \sigma^*$, *atunci* $\| m \| = 1$.

Aceste proprietăți rezultă imediat din expresia (1.8), respectiv din teorema lui M. Krein și V. Șmulian (vezi § 1).

Un exemplu important este următorul:

$$\mathcal{F} = \{ f_1, \ldots, f_n \} \qquad (n \geqslant 1). \tag{1.9}$$

Avem atunci $m = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ și $\mu(\{ f_i \}) = \lambda_i$, $(i = 1, \ldots, n)$.

O proprietate a funcționalei liniare m, utilă în cele ce urmează, este

L e m a 1.7. *$\mathcal{F}$ fiind o mulțime oarecare de puncte extreme neopuse ale sferei S^* și $\mathfrak{M}$ fiind o valoare medie oarecare definită în $\mathcal{F}$, relațiile*

$$m(x_0) = 1, \quad \| x_0 \| \leqslant 1$$

implică

$$f(x_0) = 1 \text{ pentru orice } f \in \mathcal{F} \text{ cu } \mu(\{ f \}) \neq 0.$$

Demonstrație. Trebuie să arătăm că dacă $m(x_0) = 1$ și $| X_0(f) | \leqslant 1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, atunci $X_0(f) = 1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$ cu $\mu(\{f\}) \neq 0$. Să presupunem contrariul, că în ipotezele de mai sus există un $f_0 \in \mathcal{F}$ cu $\mu(\{f_0\}) \neq 0$, astfel încît $X_0(f_0) \neq 1$. Atunci avem sau $| X_0(f_0) | < 1$, sau $X_0(f) = -1$, deci, în baza teoremei lui A. A. Markov și a ipotezei $| X_0(f) | \leqslant 1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, rezultă

$$m(x_0) = \mathfrak{M}\{X_0(f)\} = \int_{\mathcal{F}} X_0(f)\, d\mu(e) = \int_{\mathcal{F} - \{f_0\}} X_0(f)\, d\mu(e) +$$

$$+ \mu(\{f_0\})\, X_0(f_0) < \mu(\mathcal{F} - \{f_0\}) + \mu(\{f_0\}) = 1,$$

în contradicție cu ipoteza $m(x_0) = 1$.

Lema 1.7 este demonstrată.

Proprietatea 3° a funcționalei m arată că, oricare ar fi mulțimea $\mathcal{F}$ cu $\mathcal{K}_{\mathcal{F}} \subset \sigma^*$ și cu valoarea medie $\mathfrak{M}$ definită în $\mathcal{F}$, avem $m \in \sigma^*$. Vom arăta acum că variind mulțimea $\mathcal{F}$ și valoarea medie $\mathfrak{M}$ în toate modurile posibile, obținem astfel *toate* elementele lui σ^*, adică

L e m a 1.8. *Pentru orice funcțională $\varphi \in \sigma^*$ există o mulțime $\mathcal{F}$ de puncte extreme neopuse ale sferei S^*, cu $\mathcal{K}_{\mathcal{F}} \subset \sigma^*$ și o valoare medie $\mathfrak{M}$ definită în $\mathcal{F}$ astfel încît $\varphi = m$, adică astfel încît*

$$\varphi(x) = m(x) = \mathfrak{M}\{X(f)\} \text{ pentru orice } x \in E.$$

Demonstrație. Fie Γ aceea față a sferei S^* care conține pe φ. Fiind o mulțime extremă a sferei S^*, Γ este o mulțime regulat convexă de elemente neopuse și punctele extreme ale lui Γ sînt puncte extreme ale sferei S^*. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea tuturor punctelor extreme ale lui Γ. Atunci $\mathcal{F}$ este o mulțime de puncte extreme neopuse ale sferei S^* și, deoarece în baza teoremei lui M. Krein și D. Milman (vezi § 1) $\mathcal{K}_{\mathcal{F}} = \Gamma$, avem $\mathcal{K}_{\mathcal{F}} \subset \sigma^*$. Deoarece prin ipoteză $\varphi \in \Gamma$, avem $\varphi \in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$; prin urmare, în virtutea teoremei lui M. Krein și V. Șmulian există o valoare medie $\mathfrak{M}$ definită în $\mathcal{F}$ astfel încît să avem $\varphi = m$.

Lema 1.8 este demonstrată.

Observație. Exemple simple ne arată că mulțimea $\mathfrak{F}$ și valoarea medie $\mathfrak{M}$, deci și funcționala liniară m, din lema 1.8, nu sînt, în general, univoc determinate.

2. Ne propunem să rezolvăm acum problema următoare:
Fie $\Pi = \{x \mid \varphi(x) = 1\}$ *un hiperplan de sprijin oarecare al sferei* S. *Să se exprime mulțimea de sprijin* $\Pi \cap S = \{x \mid \varphi(x) = 1, \|x\| = 1\}$, *utilizînd punctele extreme ale sferei* S^*.

Din proprietatea 3° a funcționalei liniare m rezultă că, dacă $\mathfrak{K}_{\mathfrak{F}} \subset \sigma^*$, atunci hiperplanul $H = \{x \mid m(x) = 1\}$ este un hiperplan de sprijin al sferei S. Lema 1.8 ne asigură că, variind mulțimea $\mathfrak{F}$ și valoarea medie $\mathfrak{M}$ în toate modurile posibile, obținem astfel *toate* hiperplanele de sprijin ale sferei S. Rămîne deci să rezolvăm problema, care este mulțimea de sprijin $H \cap S = \{x \mid m(x) = 1, \|x\| = 1\}$. Avem

Teorema 1.7. *$\mathfrak{F}$ fiind o mulțime oarecare de puncte extreme neopuse ale sferei S^* și $\mathfrak{M}$ fiind o valoare medie oarecare definită în F, astfel încît*

$$\bigcap_{\substack{f \in \mathfrak{F} \\ \mu(\{f\}) \neq 0}} \{x \mid f(x) = 1, \|x\| = 1\} \neq 0, \tag{1.10}$$

hiperplanul $H = \{x \mid m(x) = 1\}$ *sprijină sfera* S *în mulțimea* (1.10).

Demonstrație. Să notăm pentru prescurtare mulțimea (1.10) cu M_0 și fie $x_0 \in M_0$. Atunci $f(x_0) = 1$, $\|x_0\| = 1$ pentru orice $f \in \mathfrak{F}$ cu $\mu(\{f\}) \neq 0$, de unde, în baza proprietății 2°, $m(x_0) = 1$, $\|x_0\| = 1$, deci $x_0 \in H \cap S$. Prin urmare $M_0 \subseteq H \cap S$. Invers, fie acum $x \in H \cap S$. Atunci $m(x) = 1$ și $\|x\| = 1$, deci în baza lemei 1.7 rezultă că $f(x) = 1$ pentru orice $f \in \mathfrak{F}$ cu $\mu(\{f\}) \neq 0$, adică $x \in M_0$. Prin urmare $H \cap S \subseteq M_0$ și, în concluzie, $H \cap S = M_0$. Deoarece, prin ipoteză $0 \neq M_0 \subset \sigma$, rezultă că hiperplanul H sprijină sfera S în mulțimea M_0.

Teorema 1.7 este demonstrată.

Observația 1. În teorema 1.7 nu am presupus $\mathfrak{K}_{\mathfrak{F}} \subset \sigma^*$.

Observația 2. Pentru cazul particular (1.9) obținem următoarea propoziție: *$f_1, \ldots, f_n$ fiind puncte extreme neopuse oarecare ale sferei S^* și $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ fiind numere nenegative cu* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, *astfel încît*

$$\bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{x \mid f_i(x) = 1, \|x\| = 1\} \neq 0,$$

hiperplanul $H = \{x \mid (\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n)(x) = 1\}$ *sprijină sfera* S *în mulțimea*

$$\bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{x \mid f_i(x) = 1, \|x\| = 1\}.$$

Teorema 1.7′. *$\mathfrak{F}$ fiind o mulțime oarecare de puncte extreme neopuse ale sferei S^* și $\mathfrak{M}$ fiind o valoare medie oarecare definită în $\mathfrak{F}$, dacă mulțimea în care hiperplanul $H = \{x \mid m(x) = 1\}$ sprijină sfera S, este nevidă, atunci și mulțimea* (1.10) *este nevidă și hiperplanul H sprijină sfera S în mulțimea* (1.10).

Demonstrație. Fie $x_0 \in H \cap S$ și să notăm pentru prescurtare mulțimea (1.10) cu M_0. Atunci $m(x_0) = 1$ și $\|x_0\| = 1$, deci în baza lemei 1.7 rezultă că $f(x_0) = 1$ pentru orice $f \in \mathfrak{F}$ cu $\mu(\{f\}) \neq 0$, adică $x_0 \in M_0$. Prin urmare $H \cap S \subseteq M_0 \neq 0$. Invers, fie acum $x \in M_0$. Atunci $f(x_0) = 1$, $\|x_0\| = 1$ pentru orice $f \in \mathfrak{F}$ cu $\mu(\{f\}) \neq 0$, de unde, în baza proprietății 2°, $m(x_0) = 1$, $\|x_0\| = 1$, deci $x_0 \in H \cap S$. Prin urmare $M_0 \subseteq H \cap S$ și, în concluzie, $H \cap S = M_0$. Deoarece $0 \neq M_0 \subset \sigma$, rezultă că hiperplanul H sprijină sfera S în mulțimea M_0.

Teorema 1.7′ este demonstrată.

Observația 1. În teorema 1.7′ nu am presupus $\mathcal{K}_{\mathcal{F}} \subset \sigma^*$.

Observația 2. Pentru cazul particular (1.9) obținem următoarea propoziție: *Dacă* $f_1, \ldots, f_n$ *sînt puncte extreme neopuse oarecare ale sferei* S^* *și* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sînt numere nenegative cu* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, *astfel încît mulțimea în care hiperplanul* $H = \{ x \mid (\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n)(x) = 1 \}$ *sprijină sfera S, să fie nevidă, atunci și mulțimea*

$$\bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{ x \mid f_i(x) = 1, \| x \| = 1 \}$$

este nevidă și hiperplanul H sprijină sfera S în această mulțime.

Fie acum $\Pi = \{x \mid \varphi(x) = 1\}$ un hiperplan de sprijin oarecare al sferei S. Pentru a exprima mulțimea de sprijin $\Pi \cap S$ utilizînd punctele extreme ale sferei S^*, nu avem decît să luăm o mulțime $\mathcal{F}$ cu $\mathcal{K}_{\mathcal{F}} \subset \sigma^*$ și o valoare medie $\mathfrak{M}$ cu proprietatea $\varphi = m$ (ceea ce este posibil, în baza lemei 1.8) și, în virtutea teoremei 1.7′, mulțimea în care hiperplanul Π sprijină sfera S va fi

$$\Pi \cap S = \bigcap_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ \mu(\{f\}) \neq 0}} \{ x \mid f(x) = 1, \| x \| = 1 \}.$$

Mulțimea $\mathcal{F}$ și valoarea medie $\mathfrak{M}$ nu sînt, în general, univoc determinate (vezi observația de la lema 1.8); însă orice mulțime $\mathcal{F}$ și valoare medie $\mathfrak{M}$ cu proprietatea din lema 1.8 am considera, intersecția $\bigcap_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ \mu(\{f\}) \neq 0}} \{x \mid f(x) = 1, \| x \| = 1\}$ ne dă aceeași mulțime $\Pi \cap S$.

3. Fie $M \subset \sigma$ o mulțime de sprijin oarecare nevidă a sferei S. Ne propunem să rezolvăm acum problema următoare, reciprocă celei precedente: *Care este ecuația hiperplanelor H care sprijină sfera S în mulțimea M?* Răspunsul este

Teorema 1.8. *Dacă* $M \subset \sigma$ *este o mulțime de sprijin nevidă a sferei S, orice hiperplan H care spirjină sfera S în mulțimea M are ecuația de forma* $m_2(x) = 1$, *unde* $\mathfrak{M}_2$ *este o valoare medie definită în mulțimea**) $\mathcal{F}_2 = \{ \mid f(x) = 1$ *pentru orice* $x \in M$, f *punct extrem al sferei* $S^* \}$.

Demonstrație. Fie $H = \{x \mid g(x) = 1\}$, unde $g \in \sigma^*$, un hiperplan care sprijină sfera S în mulțimea M, adică $M = \{x \mid g(x) = 1, \| x \| = 1\}$ și să presupunem că nu există nici o valoare medie $\mathfrak{M}_2$ definită în $\mathcal{F}_2$, astfel încît să avem $g = m_2$. Deoarece $g \subset \sigma^*$, în baza acestei ipoteze și a lemei 1.8, rezultă că există o mulțime $\mathcal{F}$ de puncte extreme neopuse ale sferei S^*, o funcțională liniară $\varphi \in \mathcal{F}$, $\varphi \notin \mathcal{F}_2$ și o valoare medie $\mathfrak{M}$ definită în mulțimea $\mathcal{F}$, astfel încît $\mu(\{\varphi\}) \neq 0$ și $g(x) = \mathfrak{M}\{X(f)\}$ pentru orice $x \in E$, unde cu $X(f)$ am notat funcția continuă (1.7).

Fie $x_0 \in M$. În baza lemei 1.7 relațiile $g(x_0) = 1$, $\| x_0 \| = 1$ implică $f(x_0) = 1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$ cu $\mu(\{f\}) \neq 0$; deoarece $\varphi \in \mathcal{F}$ și $\mu(\{\varphi\}) \neq 0$, rezultă că $\varphi(x_0) = 1$. Așadar, φ este un punct extrem al sferei S^*, $\varphi(x_0) = 1$ pentru orice $x_0 \in M$ și, prin ipoteză, $\varphi \notin \mathcal{F}_2$. Aceasta însă contrazice definiția mulțimii $\mathcal{F}_2$.

Teorema 1.8 este demonstrată.

---

*) Deoarece există o față F a sferei S astfel încît $M \subseteq F$, mulțimea $\mathcal{F}_2$ este, în baza teoremei 1.1, nevidă. De altfel, amintim că am folosit mulțimea $\mathcal{F}_2$ și în paragraful 1 (vezi teorema 1.4).

Observația 1. Fie $\mathcal{F}'$ mulțimea acelor $f \in \mathcal{F}_2$, pentru care $\mu_2(\{f\}) \neq 0$. Atunci, în baza lemei 1.8 rezultă că hiperplanul $H = \{x \mid m_2(x) = 1\}$ din teorema 1.8 sprijină sfera S în mulțimea $\bigcap_{f \in \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}'} \{x \mid f(x) = 1, \|x\| = 1\} = M = \bigcap_{f \in \mathcal{F}_2} \{x \mid f(x) = 1, \|x\| = 1\}$. Totuși, cum ne arată exemple simple, nu putem afirma că $\mathcal{F}' = 0$ (adică nu putem afirma că $\mu_2(\{f\}) \neq 0$ pentru orice $f \in \mathcal{F}_2$).

Observația 2. Reciproca teoremei 1.8 nu este adevărată: după cum arată exemple simple, nu orice hiperplan cu ecuația $m_2(x) = 1$, unde $\mathfrak{M}_2$ este o valoare medie definită în mulțimea $\mathcal{F}_2$, sprijină sfera S în mulțimea dată M. În general, dacă $H = \{x \mid m_2(x) = 1\}$, atunci $H \cap S = \bigcap_{f \in \mathcal{F} - \mathcal{F}'} \{x \mid f(x) = 1, \|x\| = 1\} \supseteq \supseteq \bigcap_{f \in \mathcal{F}_2} \{x \mid f(x) = 1, \|x\| = 1\} = M$.

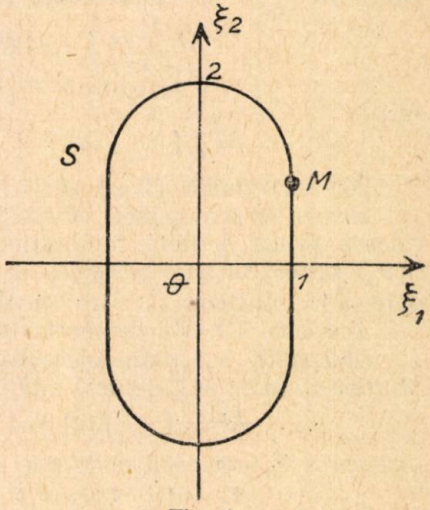

Fig. 4

Observația 3. Pentru cazul particular (1.9), din teorema 1.8 obținem următoarea propoziție: *Dacă $M \subset \sigma$ este o mulțime de sprijin nevidă a sferei S și dacă $\mathcal{F}_2 = \{f_1, \ldots, f_n\}$ este mulțimea tuturor punctelor extreme f ale sferei S^* cu proprietatea că $x \in M$ implică $f(x) = 1$, atunci orice hiperplan H care sprijină sfera S în mulțimea M are ecuația de forma $(\lambda f_1 + \ldots + \lambda_n f_n)(x) = 1$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.*

4. Din teorema 1.2 rezultă, cum am văzut în paragraful 2, că *fiecare mulțime de sprijin a sferei S este o mulțime extremă a acestei sfere.*

Reciproca acestei propoziții nu este adevărată. Într-adevăr, dacă luăm drept spațiu E de exemplu, planul în care sfera unitate S este aceea din figura 4 și luăm drept mulțime $M \subset \sigma$ punctul $x = \{1,1\}$ al acestui spațiu, atunci M este o mulțime extremă a sferei S, dar nu este mulțime de sprijin a acestei sfere.

În orice caz, fiecare mulțime extremă a sferei S este conținută într-o mulțime de sprijin a acestei sfere (de exemplu într-o față).

Se pune problema, ce mulțimi nevide (extreme, în baza teoremei 1.2) $M \subset \sigma$ sînt mulțimi de sprijin ale sferei S. Un criteriu necesar și suficient este

Teorema 1.9. *Mulțimea nevidă $M \subset \sigma$ este o mulțime de sprijin a sferei S dacă și numai dacă*

$$M = \{x \mid f(x) = 1 \text{ pentru orice } f \in \mathcal{F}_2, \|x\| = 1\}, \tag{1.11}$$

unde am notat cu $\mathcal{F}_2$ mulțimea

$$\mathcal{F}_2 = \{f \mid f(x) = 1 \text{ pentru orice } x \in M, f \text{ punct extrem al sferei } S^*\} \tag{1.12}$$

Demonstrație. Fie M o mulțime nevidă oarecare de pe suprafața σ a sferei S și fie f un element oarecare al mulțimii $\mathcal{F}_2$. Deoarece în baza definiției mulțimii $\mathcal{F}_2$ pentru orice $x \in M$ avem $f(x) = 1$ și $\|x\| = 1$, rezultă că

$$M \subseteq \{x \mid f(x) = 1 \text{ pentru orice } f \in \mathcal{F}_2, \|x\| = 1\}. \tag{1.13}$$

Fie acum M o mulțime de sprijin nevidă a sferei S. Atunci mulțimea

$$\mathfrak{F}_1 = \{f \mid f(x) = 1 \text{ pentru orice } x \in M,\ \|f\| = 1\}$$

este nevidă și $\mathfrak{F}_2$ este mulțimea acelor puncte extreme ale sferei S^*, care aparțin mulțimii $\mathfrak{F}_1$; deoarece $\mathfrak{F}_1$ este o mulțime regulat convexă și $\mathfrak{F}_2$ coincide cu mulțimea punctelor extreme ale mulțimii $\mathfrak{F}_1$ (vezi § 1), mulțimea $\mathfrak{F}_2$ este, în baza teoremei lui M. Krein și D. Milman, nevidă. M fiind prin ipoteză o mulțime de sprijin a sferei S, fie $H = \{x \mid g(x) = 1\}$ un hiperplan care sprijină sfera S în mulțimea M. În baza teoremei 1.8 rezultă că $g = m_2$, unde $\mathfrak{M}_2$ este o valoare medie definită în mulțimea $\mathfrak{F}_2$. Prin urmare, în baza teoremei 1.7, mulțimea M în care hiperplanul H sprijină sfera S, este egală cu

$$M = \bigcap_{\substack{f \in \mathfrak{F}_2 \\ \mu_2(\{f\}) \neq 0}} \{x \mid f(x) = 1,\ \|x\| = 1\},$$

deci

$$M \supseteq \{x \mid f(x) = 1 \text{ pentru orice } f \in \mathfrak{F}_2\ \|x\| = 1\}. \tag{1.14}$$

Din incluziunile (1.13) și (1.14) rezultă egalitatea (1.11).

Invers, să presupunem că mulțimea $M \subset \sigma$ satisface relația (1.11). Fie $\mathfrak{M}_2$ o valoare medie definită în mulțimea $\mathfrak{F}_2$, astfel încît $\mu_2(\{f\}) \neq 0$ pentru orice $f \in \mathfrak{F}_2$. Atunci, în baza teoremei 1.7, hiperplanul $H = \{x \mid m_2(x) = 1\}$ sprijină sfera S în mulțimea (1.11), deci M este o mulțime de sprijin a sferei S.

Teorema 1.9 este demonstrată.

Observație. Se poate demonstra și următorul criteriu, echivalent cu (1.11): *Mulțimea nevidă $M \subset \sigma$ este o mulțime de sprijin a sferei S dacă și numai dacă*

$$M = \{x \mid f(x) = 1 \text{ pentru orice } f \in \mathfrak{F}_1,\ \|x\| = 1\},$$

unde prin $\mathfrak{F}_1$ am notat mulțimea

$$\mathfrak{F}_1 = \{f \mid f(x) = 1 \text{ pentru orice } x \in M,\ \|f\| = 1\}.$$

5. În sfîrșit, observăm că rezultatele din acest capitol asupra sferei unitate $S = S(0, 1)$ se extind cu ușurință pentru sferele oarecare $S(x_0, r)$ din spațiul E. De exemplu teorema 1.1 se extinde astfel: *Dacă F_1 este o față a sferei $S(x_0, r)$ atunci există un punct extrem f_1 al sferei unitate S^* astfel încît $F_1 = \{x \mid f_1(x - x_0) = r,\ \|x - x_0\| = r\}$. Punctul extrem f_1 este unic dacă și numai dacă fața F_1 este monoplană.* Celelalte rezultate din lucrare se extind în mod analog.

CAPITOLUL II

REZOLVAREA PROBLEMEI UNICITĂȚII POLINOMULUI DE CEA MAI BUNĂ APROXIMAȚIE ÎN SPAȚII BANACH OARECARE

Introducere

Fie E un spațiu liniar normat oarecare, fie

$$x_1, \ldots, x_n \quad (1 \leqslant n < \infty) \tag{2.1}$$

n elemente liniar independente din E și fie x un element oarecare din E. Vom numi *polinom* orice combinație liniară

$$p = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \tag{2.2}$$

a elementelor (2.1). Vom numi *cea mai bună aproximație a elementului x prin polinoamele* (2.2) distanța elementului x de la mulțimea V_n a tuturor polinoamelor (2.2), adică numărul

$$\mu_n(x) = \rho(x, V_n) = \inf_{p \in V_n} \rho(x, p) = \inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \| x - \alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_n x_n \|. \quad (2.3)$$

În sfîrșit, vom numi *polinom de cea mai bună aproximație al elementului x* orice polinom q cu proprietatea

$$\| x - q \| = \mu_n(x). \quad (2.4)$$

După cum se știe [1], pentru orice element $x \in E$ *există* cel puțin un polinom de cea mai bună aproximație.

Problema unicității polinomului de cea mai bună aproximație este următoarea: *Ce condiții trebuie să satisfacă elementele* (2.1), *pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur polinom de cea mai bună aproximație?*

Problema unicității polinomului de cea mai bună aproximație prezintă un interes teoretic considerabil; aceasta este explicația faptului că în cei 50 de ani care au trecut de la primele rezultate obținute, o serie de matematicieni, printre care E. Borel, M. Fréchet, L. Tonelli, A. Haar, N. I. Ahiezer, M. G. Krein, A. N. Kolmogorov și alții, s-au ocupat de rezolvarea ei pentru diferite cazuri particulare.

În același timp, problema are importanță și în ceea ce privește aplicațiile practice; este suficient să amintim ca exemplu problema unicității aproximării minimale a unui sistem de ecuații liniare incompatibile, de care s-au ocupat S. I. Zuhoviți ki [33] și N. I. Ahiezer [1].

Singura încercare de a rezolva problema unicității polinomului de cea mai bună aproximație în spații Banach oarecare, a fost făcută în 1952 de K. Tatarkiewicz [30]. Soluția propusă de el nu este lipsită de interes, în special pentru forma sa geometrică, însă nu poate fi considerată ca satisfăcătoare din punctul de vedere al utilității practice, deoarece condițiile necesare și suficiente pe care le dă (vezi § 1) nu redau unele rezultate particulare cunoscute importante, cum ar fi de exemplu teorema lui A. Haar (vezi § 1).

În capitolul de față ne propunem să rezolvăm problema unicității polinomului de cea mai bună aproximație pentru cazul cînd E este un spațiu Banach oarecare, dînd condiții necesare și suficiente din care se regăsesc toate rezultatele particulare cunoscute și se obțin și rezultate particulare noi. În acest scop vom folosi, spre deosebire de K. Tatarkiewicz, atît elementele spațiului, cît și elementele spațiului adjunct; în capitolul I am arătat că această metodă este utilă pentru probleme în care intervine în mod esențial sfera unitate a spațiului.

Capitolul de față este împărțit în patru paragrafe. În paragraful 1 se dă un scurt istoric al problemei unicității polinomului de cea mai bună aproximație, paragraful 2 este consacrat rezolvării acestei probleme, paragraful 3 se ocupă cu cazul $n = 1$, iar paragraful 4 este consacrat unei generalizări a problemei.

Noțiunile și proprietățile cunoscute din analiza funcțională, de care vom avea nevoie în decursul capitolului de față, sînt reamintite în capitolul I, paragraful 1. Pe lîngă acestea, în capitolul de față vom utiliza și o serie de rezultate noi din analiza funcțională, pe care le-am obținut în capitolul I, paragrafele 2, 3, precum și în lucrările [27] și [28].

§ 1. Scurt istoric al problemei unicității polinomului de cea mai bună aproximație

În acest paragraf vom da un scurt istoric al problemei unicității pol. de c.m.b.a.*), fără să ne ocupăm de diversele generalizări ale ei și de diversele probleme înrudite. În această privință menționăm numai interesanta generalizare a problemei existenței pol. de c.m.b.a. și rezolvarea acestei probleme, date de acad. M. N i c o l e s c u în [24]; vom reveni asupra acestora în paragraful 3. De asemenea, prof. T. P o p o v i c i u are mai multe lucrări importante în legătură cu problema caracterizării pol. de c.m.b.a. în anumite spații particulare.

Pentru spațiile particulare pe care le vom considera în decursul capitolului de față, vom folosi următoarele notații: Vom nota prin $C(<a, b>)$ spațiul tuturor funcțiilor continue pe segmentul $<a, b>$, prin $C(\mathfrak{M})$ spațiul tuturor funcțiilor continue pe $\mathfrak{M}$, unde $\mathfrak{M}$ este o mulțime mărginită închisă oarecare dintr-un spațiu euclidian de dimensiune oarecare k, iar prin $C_{2\pi}$ spațiul tuturor funcțiilor continue pe axa reală și având perioada 2π, toate cu normarea obișnuită. Mai departe, vom nota prin L_C^p $(<a, b>)$, $(p \geqslant 1)$ spațiul tuturor funcțiilor continue pe segmentul $<a, b>$, cu norma $\| x \| = \left\{ \int_a^b | x(t) |^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$, iar prin $L_{C_{2\pi}}$ $(0, 2\pi)$ spațiul tuturor funcțiilor continue pe intervalul $(0, 2\pi)$ și având perioada 2π, cu norma $\| x \| = \int_0^{2\pi} | x(t) | dt$. În sfîrșit, vom nota prin $L^p(<a, b>)$ $(p \geqslant 1)$ spațiul tuturor funcțiilor cu a p — a putere integrabilă pe segmentul $<a, b>$.

În toată generalitatea ei, problema unicității pol. de c.m.b.a. a fost pusă în 1940 de N. I. A h i e z e r [1]**). Cu mult înainte însă, au fost obținute o serie de rezultate particulare.

În 1905, folosind o teoremă a lui P. L. Cebîșev, E. B o r e l [6] demonstrează unicitatea pol. de c.m.b.a. pentru cazul particular $E = C(<a, b>)$, $x_1(t) \equiv 1$, $x_2(t) = t, \ldots, x_n(t) = t^{n-1}$.

În 1907 M. F r é c h e t [10] arată prin aceeași metodă unicitatea pol. de c.m.b.a. pentru cazul particular $E = C_{2\pi}$, $x_1(t) \equiv 1$, $x_2(t) = \cos t$, $x_3(t) = \sin t, \ldots, x_{n-1}(t) = \cos vt$, $x_n(t) = \sin vt$.

Tot în anul 1907 J. W. Y o u n g [34] demonstrează, pentru cazul particular $E = C(<a, b>)$, următoarea teoremă: Dacă funcțiile (2.1) se bucură de proprietatea că orice polinom (2.2) are cel mult $n - 1$ rădăcini pe segmentul $<a, b>$, unde orice rădăcină în care polinomul nu-și schimbă semnul este socotită de două ori, atunci orice funcție $x(t) \in C(<a, b>)$ are un singur pol. de c.m.b.a. J. W. Y o u n g observă că teorema lui conține drept caz particular teoremele lui E. Borel și M. Fréchet, precum și alte cazuri particulare.

În 1908 L. T o n e l l i [31] arată neunicitatea pol. de c.m.b.a. pentru cazul particular $E = C(\mathfrak{M})$, unde $\mathfrak{M}$ este o mulțime mărginită închisă din planul euclidian și $x_1(t, s) \equiv 1$, $x_2(t, s) = t$, $x_3(t, s) = s$, $x_4(t, s) = t.s, \ldots, x_{n-2}(t, s) = s^{v-1}.t$, $x_{n-1}(t, s) = t^v$, $x_n(t, s) = s^v$.

---

*) În decursul capitolului de față, în loc de polinom de cea mai bună aproximație vom scrie prescurtat pol. de c.m.b.a., cu excepția cazului cînd aceste cuvinte figurează într-un enunț.

**) Cartea [1] nu ne este accesibilă; afirmațiile referitoare la ea le facem în baza recenziei lui V. L. G o n c i a r o v din Usp. Mat. Nauk, t. I, 1946, p. 265—266.

În 1913 G. Pólya [25] demonstrează unicitatea pol. de c.m.b.a. pentru cazul particular $E = L_C^{2k}(0,1)$, $x_1(t) \equiv 1$, $x_2(t) = t, \ldots, x_n(t) = t^{n-1}$.

În anul 1918 A. Haar [14] pune problema condițiilor necesare și suficiente ale unicității pol. de c.m.b.a. pentru cazul particular $E = C(\mathfrak{M})$, unde $\mathfrak{M}$ este o mulțime mărginită închisă oarecare dintr-un spațiu euclidian de dimensiune oarecare k și rezolvă această problemă cu o metodă ingenioasă, obținînd următoarea teoremă importantă: *Atunci și numai atunci există pentru orice funcție* $x(t) \in C(\mathfrak{M})$ *un singur pol. de c.m.b.a., cînd orice polinom* (2.2) *are cel mult* $n-1$ *rădăcini distincte pe* $\mathfrak{M}$. După cum subliniază A. Haar, această condiție necesară și suficientă este mai puțin restrictivă decît condiția suficientă a lui J. W. Young. Alte demonstrații ale teoremei lui A. Haar au fost date ulterior de D. V. Widder, N. I. Ahiezer și alții.

În 1921 D. Jackson [15], generalizînd rezultatul lui G. Pólya [25], demonstrează unicitatea pol. de c.m.b.a. pentru cazul particular $E = L_C^p(<a, b>)$, $p > 1$, oricare ar fi sistemul liniar independent (2.1).

Tot în anul 1921, D. Jackson [16] demonstrează unicitatea pol. de c.m.b.a. pentru cazul particular $E = L_C(<a, b>)$, $x_1(t) \equiv 1$, $x_2(t) = t, \ldots$ $\ldots, x_n(t) = t^{n-1}$ și menționează că unicitatea pol. de c.m.b.a. se poate demonstra cu aceeași metodă și pentru cazul particular $E = L_{C_{2\pi}}(0, 2\pi)$, $x_1(t) \equiv 1$, $x_2(t) = \cos t$, $x_3(t) = \sin t, \ldots, x_{n-1}(t) = \cos vt$, $x_n(t) = \sin vt$. În aceeași lucrare el arată, printr-un exemplu, că dacă $E = L_C(<a, b>)$ și (2.1) sînt funcții continue oarecare liniar independente, atunci pol. de c.m.b.a. nu este, în general, unic.

În 1926 S. Bernstein [5] introduce pentru sistemele (2.1) de funcții continue pe un segment $<a, b>$ care satisfac condiția lui A. Haar denumirea de « sisteme Cebîșev » și subliniază importanța acestor sisteme. Totodată el dă o altă demonstrație a suficienței condiției lui A. Haar pentru cazul particular $\mathfrak{M} = <a, b>$.

Problema unicității pol. de c.m.b.a. este reluată în 1940 de N. I. Ahiezer [1], care îi acordă mare atenție. N. I. Ahiezer este primul care pune problema unicității pol. de c.m.b.a. pentru cazul general cînd E este un spațiu liniar normat oarecare și chiar un spațiu liniar normat oarecare cu scalari complecși. Mai departe, N. I. Ahiezer dă următoarea interpretare geometrică a problemei unicității pol. de c.m.b.a.: Ce condiții trebue să satisfacă mulțimea V_n a tuturor polinoamelor (2.2) — care formează un subspațiu liniar de dimensiune n al spațiului E —, pentru ca la orice punct $x \in E$ să existe un singur punct $p \in V_n$ care este la distanța cea mai mică de la punctul dat x. Deși pune problema unicității pol. de c.m.b.a. și dă o interpretare geometrică a acestei probleme, N. I. Ahiezer nu rezolvă problema pentru cazul general, ci numai în cîteva cazuri particulare. Astfel, generalizînd rezultatele amintite ale lui G. Pólya și D. Jackson, N. I. Ahiezer demonstrează unicitatea pol. de c.m.b.a. pentru cazul particular cînd E este un spațiu strict normat oarecare (vezi capitolul I, § 1) și (2.1) sînt elemente oarecare liniar independente. De asemenea, N. I. Ahiezer dă o nouă demonstrație a teoremei lui A. Haar. În sfîrșit, generalizînd teorema lui D. Jackson, N. I. Ahiezer demonstrează unicitatea pol. de c.m.b.a. pentru cazul cînd $E = L_C(<a, b>)$ și (2.1) este un sistem Cebîșev oarecare.

În 1948 A. N. Kolmogorov [17] extinde rezultatul lui A. Haar la spațiul tuturor funcțiilor complexe continue definite pe o mulțime închisă compactă K (din planul complex) care conține cel puțin $n+1$ puncte distincte,

norma fiind cea obişnuită şi anume demonstrează teorema următoare: Atunci şi numai atunci există pentru orice funcţie complexă $x(t)$ continuă pe K un singur pol. de c.m.b.a., cînd orice polinom (2.2) (cu coeficienţi complecşi) are cel mult $n-1$ zeruri pe K.

În anul 1952 apare lucrarea [30] a lui K. T a t a r k i e w i c z, care înseamnă încă un pas înainte spre rezolvarea problemei unicităţii pol. de c.m.b.a., datorită punctului de vedere geometric prin care priveşte această problemă. K. T a t a r k i e w i c z numeşte *proiecţie a elementului x pe mulţimea V_n* mulţimea nevidă *)

$$A_n^{\square}(x) = S(x, \mu_n(x)) \cap V_n = \sigma(x, \mu_n(x)) \cap V_n \qquad (2.5)$$

(pentru notaţiile $S(x, \mu_n(x))$, $\sigma(x, \mu_n(x))$ vezi cap. I, § 1). Atunci problema unicităţii pol. de c.m.b.a. revine la problema următoare: în ce condiţii conţin mulţimile $A_n(x)$ pentru orice $x \in E$ un singur element? Sau: în ce condiţii nu conţine suprafaţa sferelor $S(x, \mu_n(x))$ segmente făcînd parte din mulţimi $A_n(x)$?

Pornind de la acest punct de vedere, K. T a t a r k i e w i c z obţine următoarea completare a teoremei lui N. I. Ahiezer despre unicitatea pol. de c.m.b.a. în spaţiile strict normate: pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur pol. c.m.b.a., oricare ar fi sistemul liniar independent (2.1), este nu numai suficient, dar şi necesar ca spaţiul E să fie strict normat.

Tot în lucrarea [30] K. T a t a r k i e w i c z încearcă să rezolve problema unicităţii pol. de c.m.b.a. pentru cazul general al spaţiilor Banach oarecare, demonstrînd următoarea teoremă: *Pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur pol. de c.m.b.a. este necesar şi suficient ca nici o direcţie a proiecţiei lui x pe V_n să nu fie conţinută în nici un unghi de aditivitate care corespunde unei direcţii fundamentale a lui V_n*. Nu vom reaminti aici noţiunile « direcţie a proiecţiei », « unghi de aditivitate » şi « direcţie fundamentală », introduse de K. T a t a r k i e w i c z în [30]. Observăm însă, că în definiţiile acestor noţiuni se utilizează numai elementele spaţiului iniţial E şi, prin urmare, teorema de mai sus a lui K. Tatarkiewicz utilizează numai elementele spaţiului E. Or, de exemplu, în teorema lui A. Haar joacă un rol esenţial noţiunea de « valoare a unei funcţii continue într-un punct », care evident nu se poate exprima numai cu ajutorul elementelor spaţiului funcţiilor continue; rezultă că teorema lui K. Tatarkiewicz nu redă, pentru cazul particular $E = C(\mathfrak{M})$, importanta teoremă a lui A. Haar, ci o altă teoremă, care, după cum se vede uşor, nu este utilă din punct de vedere practic nici pentru mulţimile $\mathfrak{M}$ cele mai simple. De aceea teorema lui K. Tatarkiewicz nu poate fi considerată ca o rezolvare a problemei unicităţii pol. de c.m.b.a.; ea este de fapt o transformare geometrică aproape imediată a condiţiilor problemei.

În ce priveşte stadiul actual al problemei, putem afirma în concluzie că problema unicităţii pol. de c.m.b.a. în spaţii Banach oarecare este încă nerezolvată; această constatare este făcută de altfel şi în cărţile recente [20] şi [13].

---

*) Demonstraţia nevidităţii mulţimii $A_n(x)$, dată de K. T a t a r k i e w i c z [30] este greşită, deoarece în ea se afirmă şi se utilizează compacticitatea mulţimii V_n; ori, mulţimea V_n nu este compactă. Mulţimea $A_n(x)$ este totdeauna nevidă, în baza teoremei lui N. I. A h i e z e r despre existenţa pol. c.m.b.a.

§ 2. Rezolvarea problemei

1. După cum am arătat în paragraful 1, cauza faptului că soluția problemei unicității pol. de c.m.b.a., propusă de K. Tatarkiewicz în [30], nu este utilă din punct de vedere practic, constă în aceea că ea utilizează *numai* elementele spațiului inițial. În acest paragraf ne propunem să rezolvăm problema unicității pol. de c.m.b.a. utilizînd *atît elementele spațiului inițial, cît și elementele spațiului adjunct.*

Problema unicității pol. de c.m.b.a. are, cum am văzut în paragraful 1, următoarea interpretare geometrică: *În ce poziție trebuie să fie* varietatea liniară închisă*) V_n, pentru ca proiecția oricărui element $x \in E$ pe V_n să fie o mulțime banală? În baza definiției noțiunii de proiecție, această problemă revine la rîndul ei la problema, dacă anumite mulțimi convexe de pe suprafața sferelor $S(x, \mu_n(x))$, sau, ceea ce este același lucru, dacă anumite mulțimi convexe de pe suprafața sferei unitate S a spațiului E constau dintr-un singur element sau din mai multe elemente. De aceea, pentru a putea rezolva problema unicității pol. de c.m.b.a., este necesar un studiu prealabil al suprafeței sferei unitate dintr-un spațiu Banach oarecare; acest studiu l-am făcut în capitolul I.

În acest paragraf vom rezolva problema unicității pol. de c.m.b.a. cu metoda următoare: Vom căuta condiții geometrice necesare și suficiente pentru ca proiecția oricărui element $x \in E$ pe mulțimea V_n să fie banală, astfel încît în loc de sferele $S(x, \mu_n(x))$ să intervină sfera unitate S a spațiului E. Vom transforma apoi aceste condiții astfel încît să intervină în ele hiperplanele de sprijin ale sferei S. Soluția problemei unicității pol. de c.m.b.a. nu va fi altceva, decît *transpunerea în limbaj analitic*, cu ajutorul rezultatelor din capitolul I precum și din [27], [28], a acestor condiții și punerea lor sub o formă analitică convenabilă pentru aplicațiile practice.

Prin urmare, spre deosebire de K. Tatarkiewicz, care folosește numai metode geometrice, vom folosi o îmbinare a unor metode geometrice, mai simple decît cele folosite de K. Tatarkiewicz, cu metode analitice.

În sfîrșit, vom arăta că aplicînd teoremele noastre generale în diverse spații Banach concrete, se regăsesc cu ușurință toate teoremele cunoscute și se obțin și teoreme noi.

2. Se vede cu ușurință că, pentru ca proiecția oricărui element $x \in E$ pe varietatea liniară $V_n = [0, x_1, \ldots, x_n]$ să fie banală, este necesar și suficient ca *translatînd varietatea liniară V_n astfel încît varietatea liniară V_n' obținută prin această translație să sprijine sfera unitate S, intersecția***) $V_n' \cap S$ să fie banală.*

Pentru a putea exprima acest criteriu în limbaj analitic, utilizînd și elementele spațiului adjunct, îl vom transforma astfel încît să intervină hiperplanele de sprijin ale sferei S. În baza teoremei lui S. Mazur (vezi capitolul I, § 1) dacă o varietate liniară V sprijină sfera S, atunci există un hiperplan H care conține varietatea liniară V și sprijină sfera S. De aceea, dacă varietatea liniară V_n' sprijină sfera S, atunci mulțimea $V_n' \cap S$ este banală dacă și numai dacă

---

*) Reamintim că prin V_n am notat mulțimea tuturor polinoamelor. Deoarece aceasta nu este altceva decît cea mai mică varietate liniară închisă care conține elementele $0, x_1, \ldots, x_n$ vom nota uneori $V_n = [0, x_1, \ldots, x_n]$.

**) În baza teoremei despre existența pol. de c.m.b.a. (vezi § 1), această intersecție este sigur nevidă.

pentru orice hiperplan de sprijin $H \supset V'_n$ al sferei S mulțimea $(H \cap S) \cap V'_n$ este banală.

Prin urmare avem

L e m a 2.1. *Pentru ca proiecția oricărui element $x \in E$ pe varietatea liniară V_n să fie banală, este necesar și suficient ca translatînd varietatea liniară V_n astfel încît varietatea liniară V'_n obținută prin această translație să sprijine sfera S, să nu existe nici un hiperplan de sprijin H al sferei S cu proprietățile*

(A) $H \supset V'_n$;

(B) $H \cap S$ *conține două puncte distincte ale mulțimii* V'_n .

Vom rezolva problema unicității pol. de c.m.b.a. transpunînd în limbaj analitic lema 2.1. și anume, vom demonstra

T e o r e m a 2.1. *Pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur polinom de cea mai bună aproximație, este necesar și suficient ca, $\mathfrak{F}$ fiind o mulțime oarecare de puncte extreme neopuse ale sferei S^*, să nu existe nici o valoare medie $\mathfrak{M}$ definită în $\mathfrak{F}$ astfel încît**)

$$(A_1)\quad m(x_i) = 0 \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$(B_1)\quad \text{pentru un } p_0 \in V_n = [0, x_1, \ldots, x_n],\ p_0 \neq 0,$$

$$\bigcap_{\substack{f \in \mathfrak{F} \\ \mu(\{f\}) \neq 0}} \{ x \mid f(x) = 1,\ \| x \| = 1,\ \| x + p_0 \| = 1 \} \neq 0.$$

Demonstrație. Necesitatea. Să presupunem că nu este satisfăcută condiția din teoremă, adică există o mulțime $\mathfrak{F}$ și o valoare medie $\mathfrak{M}$ definită în $\mathfrak{F}$ astfel încît să avem (A_1) și în același timp mulțimea din (B_1) să conțină un element x_0. Deoarece prin ipoteză $x_0 \in \bigcap_{\substack{f \in \mathfrak{F} \\ \mu(\{f\}) \neq 0}} \{x \mid f(x) = 1,\ \| x_0 \| = 1\}$, în baza teoremei 1.7 rezultă că hiperplanul $H = \{x \mid m(x) = 1\}$ sprijină sfera S și $x_0 \in H \cap S$. Pe de altă parte, deoarece prin ipoteza (A_1) varietatea liniară V_n este paralelă cu hiperplanul H, rezultă că $x_0 + V_n \subseteq H$, deci $\| x_0 + p \| \geqslant 1$ pentru orice polinom $p \in V_n$. Deoarece în același timp prin ipoteza (B_1) $\| x_0 \| = \| x_0 + p_0 \| = 1$, rezultă că polinomul $0 = 0.x_1 + \ldots + 0.x_n$ și polinomul $p_0 \neq 0$ sînt pol. de c.m.b.a. ale elementului $-x_0$.

Suficiența. Să presupunem că pol. de c.m.b.a. nu este unic pentru orice element $x \in E$. În acest caz există un element $x_0 \in E$ cu $\| x_0 \| = 1$, astfel încît $-x_0$ are două pol. de c.m.b.a., anume 0 și $p_0 \neq 0$. Într-adevăr, dacă p_1 și $p_2 \neq p_1$ sînt pol. de c.m.b.a. ale unui element $y_0 \in E$, atunci 0 și $p_2 - p_1$ sînt pol. de c.m.b.a. ale elementului $y_0 - p_1$, deci 0 și $p_0 = \dfrac{p_2 - p_1}{\| y_0 - p_1 \|}$ sînt pol. de c.m.b.a. ale elementului $-x_0 = \dfrac{y_0 - p_1}{\| y_0 - p_1 \|}$.

Fie, deci, 0 și $p_0 \neq 0$ pol. de c.m.b.a. ale elementului $-x_0 \in E$, $\| x_0 \| = 1$. Atunci varietatea liniară V_n sprijină sfera $S(-x_0, 1)$ într-o mulțime nebanală care conține elementele 0 și p_0, deci varietatea liniară $x_0 + V_n$ sprijină sfera unitate $S = S(0, 1)$ într-o mulțime nebanală $(x_0 + V_n) \cap S$, care conține elementele x_0 și $x_0 + p_0$. În baza teoremei lui S. Mazur rezultă că există un

*) Pentru semnificația literelor $\mathfrak{M}$ și m vezi capitolul I, § 3.

hiperplan H care conține varietatea liniară $x_0 + V_n$ și sprijină sfera S într-o mulțime nebanală $M = H \cap S \supseteq (x_0 + V_n) \cap S \ni x_0$, $x_0 + p_0$. Fie $\mathfrak{F}$ mulțimea tuturor punctelor extreme f ale sferei S^* cu proprietatea că $x \in M$ implică $f(x) = 1$*); evident $\mathfrak{F}$ este o mulțime de elemente neopuse. Din teorema 1.8 rezultă că există o valoare medie $\mathfrak{M}$ definită în $\mathfrak{F}$ astfel încît $H = \{x \mid m(x) = 1\}$. În baza incluziunilor $0, x_1, \ldots, x_n \in V_n$, $x_0 + V_n \subseteq H$

$$(A_1) \qquad m(x_i) = m(x_0 + x_i) - m(x_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pe de altă parte, în baza teoremei 1.7′, mulțimea de sprijin M este $\bigcap_{\substack{f \in \mathfrak{F} \\ \mu(\{f\}) \neq 0}} \{x \mid f(x) = 1, \| x \| = 1\}$. Deoarece $x_0 \in M$, $x_0 + p_0 \in M$, rezultă

$$(B_1) \qquad x_0 \in \bigcap_{\substack{f \in \mathfrak{F} \\ \mu(\{f\}) \neq 0}} \{x \mid f(x) = 1, \| x \| = 1, \| x + p_0 \| = 1\},$$

deci condiția din teoremă nu este satisfăcută.

Teorema 2.1 este demonstrată.

Observația 1. La aplicarea teormei 2.1 nu este necesar să cercetăm toate mulțimile $\mathfrak{F}$ de puncte extreme neopuse ale sferei S^* și toate elementele $p_0 \in V_n$ ci ajunge, evident, să ne mărginim la acele mulțimi $\mathfrak{F}$ cu $\mathfrak{K}_{\mathfrak{F}} \subset \sigma^*$ pentru care mulțimea $\bigcap_{\substack{f \in \mathfrak{F} \\ \mu(\{f\}) \neq 0}} \{x \mid f(x) = 1, \| x \| = 1\}$ este nevidă și nebanală și la elemen-

tele $p_0 \in V_n$ cu norma $\| p_0 \| \leqslant 2$ (deoarece $\| p_0 \| \leqslant \| x \| + \| x + p_0 \| = 1 + 1 = 2$).

Observația 2. Teorema 2.1 se poate enunța și sub următoarea formă afirmativă. *Pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur pol. de c.m.b.a., este necesar și suficient ca pentru orice mulțime $\mathfrak{F}$ de puncte extreme neopuse ale sferei S^*, orice valoare medie $\mathfrak{M}$ definită în $\mathfrak{F}$ cu proprietatea $m(x_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$ **) și orice $p_0 \in V_n$ să avem*

$$\bigcap_{\substack{f \in \mathfrak{F} \\ \mu(\{f\}) \neq 0}} \{x \mid f(x) = 1, \| x \| = 1, \| x + p_0 \| = 1\} = 0.$$

Am preferat să enunțăm teorema 2.1 sub formă negativă, deoarece aceasta va fi mai convenabilă pentru cele ce urmează.

3. Teorema 2.1 se poate pune sub o formă în care să nu mai intervină explicit valoarea medie $\mathfrak{M}$ și mulțimea $\mathfrak{F}' = \{f \mid f \in \mathfrak{F}, \mu(\{f\}) \neq 0\}$. Anume, avem

Teorema 2.1′. *Pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur polinom de cea mai bună aproximație, este necesar și suficient să nu existe o mulțime $\mathfrak{F}$ de puncte extreme neopuse ale sferei S^* având proprietățile*

$$(A'_1) \qquad f_0(x_i) = 0 \text{ pentru un } f_0 \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{F}};$$

$$(B'_1) \qquad \text{pentru un } p_0 \in V_n, p_0 \neq 0$$

$$\bigcap_{f \in \mathfrak{F}} \{x \mid f(x) = 1, \| x \| = 1, \| x + p_0 \| = 1\} \neq 0.$$

Demonstrație. Necesitatea. Să presupunem că nu este îndeplinită condiția din teoremă, adică există o mulțime $\mathfrak{F}$ de puncte extreme neopuse ale sferei

*) Mulțimea $\mathfrak{F}$ este sigur nevidă (vezi cap. I, trimiterea de la teorema 1.8). Menționăm că în capitolul I am notat această mulțime $\mathfrak{F}$ cu $\mathfrak{F}_2$.

**) În baza teoremei lui S. Mazur și a lemei 1.8, pentru cel puțin o mulțime $\mathfrak{F}$ există o astfel de valoare medie $\mathfrak{M}$.

S^*, astfel încît să avem (A'_1) și în același timp mulțimea din (B'_1) să conțină un element x_0. Atunci, în baza teoremei lui M. Krein și V. Șmulian (vezi [17], § 1) există o valoare medie $\mathfrak{M}$ definită în mulțimea $\mathfrak{F}$ astfel, încît $f_0 = m$, deci avem (A_1) și din incluziunea evidentă

$$\bigcap_{\substack{f \in \mathfrak{F} \\ \mu(\{f\}) \neq 0}} \{x \mid f(x) = 1,\ \|x\| = 1,\ \|x + p_0\| = 1\} \supseteq \bigcap_{f \in \mathfrak{F}} \{x \mid f(x) = 1,$$
$$\|x\| = 1,\ \|x + p_0\| = 1\}$$

rezultă că x_0 aparține și mulțimii din condiția (B_1). Prin urmare, condiția din teorema 2.1 nu este satisfăcută, deci în baza acestei teoreme rezultă că elementul $-x_0$ are două pol. de c.m.b.a. (anume θ și $p_0 \neq \theta$).

Suficiența. Să presupunem că pol. de c.m.b.a. nu este unic pentru orice $x \in E$. Atunci condiția din teorema 2.1 nu este îndeplinită, adică există o mulțime $\mathfrak{F}$ de puncte extreme neopuse ale sferei S^* și o valoare medie $\mathfrak{M}$ definită în $\mathfrak{F}$, astfel încît să avem (A_1) și mulțimea din condiția (B_1) să conțină un element x_0. Atunci $\mathfrak{F}' = \{f \mid f \in \mathfrak{F},\ \mu(\{f\}) \neq 0\}$ este evident o mulțime de puncte extreme neopuse ale sferei S^* cu proprietatea

$$(B'_1) \qquad x_0 \in \bigcap_{f \in \mathfrak{F}'} \{x \mid f(x) = 1,\ \|x\| = 1,\ \|x + p_0\| = 1\}.$$

Mai departe, deoarece $\mathfrak{M}$ este o valoare medie și în $\mathfrak{F}'$, în virtutea teoremei amintite a lui M. Krein și V. Șmulian avem $m \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{F}'}$, de unde, în baza ipotezei,

$$(A'_1) \qquad m(x_i) = 0\ ,\ i = 1, \ldots, n,\quad m \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{F}'},$$

deci condiția din teoremă nu este îndeplinită.

Teorema 2.1′ este demonstrată.

În ce privește suficiența condiției teoremei 2.1′ menționăm că ea se poate demonstra și direct, prin același raționament ca suficiența condiției teoremei 2.1, aplicînd în loc de teorema 1.7 teorema 1.9.

Observația 1. Observația 1 de la teorema 2.1 este valabilă și pentru teorema 2.1′. Observația 2, cu modificarea corespunzătoare a enunțului teoremei, este de asemenea valabilă și pentru teorema 2.1′.

Observația 2. Dacă pol. de c.m.b.a. nu este unic pentru orice $x \in E$, atunci, $\mathfrak{F}$ fiind mulțimea de puncte extreme neopuse ale sferei S^* considerată în demonstrația suficienței condiției teoremei 2.1 *(sau* 2.1′*), elementul $p_0 \in V_n$ de acolo are proprietatea că $f(p_0) = 0$ pentru orice $f \in \mathfrak{F}$.*

Într-adevăr, incluziunile x_0, $x_0 + p_0 \in M$ (vezi demonstrația suficienței condiției teoremei 2.1 — sau 2.1′ —) implică $f(x_0) = 1$, $f(x_0 + p_0) = 1$ pentru orice $f \in \mathfrak{F}$, prin definiția mulțimii $\mathfrak{F}$.

În baza acestei observații avem următoarea condiție suficientă pentru unicitatea pol. de c.m.b.a.: Pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur pol. de c.m.b.a., este suficient ca pentru orice mulțime $\mathfrak{F}$ de puncte extreme neopuse ale sferei S^* și orice $p_0 \in V_n$ să existe un $f_0 \in \mathfrak{F}$ astfel încît $f_0(p_0) \neq 0$. Considerînd, în particular, mulțimile $\mathfrak{F}$ banale, această condiție înseamnă că pentru orice punct extrem f_0 al sferei S^* trebuie să avem $f_0(p_0) \neq 0$. De aceea pentru cazul $n > 1$ această condiție nu este convenabilă, ea cere prea mult.

Adîncind observația 1 de la teorema 2.1 (sau 2.1′) avem

L e m a 2.2. *Dacă polinomul de cea mai bună aproximație nu este unic pentru orice $x \in E$, mulțimea $\mathfrak{F}$ de puncte extreme neopuse ale sferei S^* considerată*

în demonstrația suficienței condiției teoremei 2.1 *(sau* 2.1′*) conține numai puncte extreme regulat multiplane ale sferei* S^*.

Demonstrație. Să presupunem că pol. de c.m.b.a. nu este unic pentru orice $x \in E$, adică există un element $x_0 \in E$ cu $\| x_0 \| = 1$, astfel încît $-x_0$ are două pol. de c.m.b.a., anume 0 și $p_0 \neq 0$. Atunci, cum am văzut în demonstrația suficienței condiției teoremei 2.1, există un hiperplan H care conține varietatea liniară $x_0 + V_n$ și sprijină sfera S într-o mulțime nebanală $M = H \cap S \supseteq (x_0 + V_n) \cap S \ni x_0, x_0 + p_0$. Notînd, ca în demonstrația suficienței condiției teoremei 2.1, prin $\mathfrak{F}$ mulțimea tuturor punctelor extreme f ale sferei S^* cu proprietatea că $x \in M$ implică $f(x) = 1$, rezultă că pentru orice $x \in M$ avem

$$f(x_0) = 1, \quad f(x_0 + p_0) = 1, \quad \text{unde } \| x_0 \| = 1, \ \| x_0 + p_0 \| = 1 \text{ și } p_0 \neq 0,$$

adică fiecare $f \in \mathfrak{F}$ este un punct regulat multiplan.

Lema 2.2 este demonstrată.

Consecința 1. Dacă spațiul E *este strict normat, atunci pentru orice* n *elemente* (2.1) *liniar independente, fiecare element* $x \in E$ *are un singur pol. de c.m.b.a.*

Într-adevăr, dacă spațiul E este strict normat, atunci, în baza criteriului de strict normare din capitolul I (vezi consecința 2 a lemei 1.2), nici un punct extrem al sferei S^* nu este regulat multiplan. Prin urmare, în baza lemei 2.2 și a teoremei 2.1 rezultă că, oricare ar fi elementele liniar independente (2.1), orice element $x \in E$ are un singur pol. de c.m.b.a., ceea ce era de arătat.

Consecința 1 nu este altceva, decît teorema lui N. I. Ahiezer despre unicitatea pol. de c.m.b.a. în spațiile strict normate (vezi § 1). Aici am obținut-o ca o aplicație a teoremei 2.1 (sau 2.1′) însă numai pentru spațiile Banach strict normate; pentru spații strict normate oarecare ea rezultă imediat din lema 2.1, care este valabilă pentru spații liniare normate oarecare.

Consecința 2. Dacă spațiul E *nu este strict normat, atunci în enunțul teoremelor* 2.1 *și* 2.1′ *ajunge să figureze numai mulțimile* $\mathfrak{F}$ *de puncte extreme regulat multiplane neopuse ale sferei* S^*.

Această proprietate va fi valabilă și pentru rezultatele ce urmează; de aceea nu o vom mai menționa de fiecare dată.

4. Din punctul de vedere al aplicațiilor practice teorema 2.1 nu este îndeajuns de comodă, deoarece la aplicarea ei avem de examinat prea multe mulțimi $\mathfrak{F}$ de puncte extreme neopuse ale sferei S^* și valori medii $\mathfrak{M}$ definite în aceste mulțimi $\mathfrak{F}$. De asemenea, la aplicarea teoremei 2.1′ avem de examinat prea multe mulțimi $\mathfrak{F}$ de puncte extreme neopuse ale sferei S^*. În baza teoremelor 2.1, 2.1′ și utilizînd și faptul că varietatea liniară V_n este de dimensiune n (de fapt în teoremele 2.1 și 2.1′ nu am utilizat această proprietate), acest inconvenient se poate înlătura. Anume, vom demonstra

T e o r e m a 2.2. *Pentru ca orice element* $x \in E$ *să aibă un singur polinom de cea mai bună aproximație, este necesar și suficient ca,* $f_1, \ldots, f_n$ *fiind puncte extreme oarecare neopuse**) *ale sferei* S^*, *să nu existe numere* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *cu* $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1$, *avînd proprietățile:*

$$(A_2) \quad (\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n)(x_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n;$$

(B_2) *pentru un* $p_0 \in V_n = [0, x_1, \ldots, x_n]$, $p_0 \neq 0$,

$$\bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{ x \mid f_i(x) = \operatorname{sgn} \lambda_i, \ \| x \| = 1, \ \| x + p_0 \| = 1 \} \neq 0.$$

*) Deoarece spațiul E are prin ipoteză dimensiunea $\geqslant n$, sfera S^* are (vezi [28], corolarul C) al teoremei 2) cel puțin n puncte extreme neopuse.

Demonstrație. Condiția din teorema 2.2 este echivalentă cu următoarea: $f_1, \ldots, f_n$ *fiind puncte extreme neopuse oarecare ale sferei* S^*, *să nu existe numere* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ *cu* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, *avînd proprietățile:*

$$(\bar{A}_2) \quad (\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n)(x_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

$$(\bar{B}_2) \quad \textit{pentru un } p_0 \in V_n = [0, x_1, \ldots, x_n],\ p_0 \neq 0,$$

$$\bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{ x \mid f_i(x) = 1, \| x \| = 1, \| x + p_0 \| = 1 \} \neq 0.$$

Într-adevăr, dacă punctele extreme neopuse $f_1, \ldots, f_n$ ale sferei S^* și numerele $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ au proprietățile $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $(\bar{A}_2)$, $(\bar{B}_2)$, atunci avem evident și $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1$, (A_2), (B_2); invers, dacă punctele extreme neopuse $f_1', \ldots, f_n'$ ale sferei S^* și numerele $\lambda_1', \ldots, \lambda_n'$ au proprietățile $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i'| = 1$, (A_2), (B_2) atunci pentru

$$f_i = \begin{cases} f_i' & \text{dacă } \lambda_i \geqslant 0 \\ -f_i' & \text{dacă } \lambda_i < 0 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$

care sînt și ele puncte extreme neopuse ale sferei S^* și pentru numerele

$$\lambda_i = |\lambda_i'| \geqslant 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

avem $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $(\bar{A}_2)$, $(\bar{B}_2)$.

De aceea, în loc de necesitatea și suficiența condiției din teorema 2.2 vom demonstra necesitatea și suficiența acestei condiții.

Necesitatea condiției rezultă imediat din prima parte a teoremei 2.1 luînd în particular $\mathfrak{F} = \{ f_1, \ldots, f_n \}$ (vezi (1.9)).

Suficiența. Să presupunem mai întîi că E este un spațiu oarecare de dimensiune $n + 1$ și pol. de c.m.b.a. nu este unic pentru orice $x \in E$. În virtutea teoremei 2.1 există atunci o mulțime $\mathfrak{F}$ de puncte extreme neopuse ale sferei S^* și o valoare medie $\mathfrak{M}$ definită în $\mathfrak{F}$ astfel, încît să avem (A_1) și (B_1). Deoarece, prin ipoteză, spațiul E este de dimensiune $n + 1$, deci orice $n + 1$ hiperplane $f_1(x) = 1, \ldots, f_{n+1}(x) = 1$ neparalele două cîte două se intersectează totdeauna într-un punct, din (B_1) rezultă că mulțimea $\mathfrak{F}$ constă din cel mult n puncte adică

$$\mathfrak{F} = \{ f_1, \ldots, f_k \}, \text{ unde } 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.6}$$

Prin urmare, ținînd seama de faptul că în baza teoremei lui A. A. Markov pentru orice valoare medie $\mathfrak{M}$ definită în mulțimea (2.6) funcționala corespunzătoare m este de forma $m = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ (vezi cap. I, § 1 și § 3), din (A_1) și (B_1) rezultă că pentru aceste numere $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ avem

$$(\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k)(x_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{ x \mid f_i(x) = 1, \| x \| = 1, \| x + p_0 \| = 1 \} \neq 0, \quad 0 \neq p_0 \in V_n.$$

Alegînd punctele extreme $f_{k+1}, \ldots, f_n$ ale sferei S^* astfel încît elementele $f_1, \ldots, f_n \in \sigma^*$ să fie distincte și neopuse *), și punînd $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, rezultă că avem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ și (A_2), (B_2). Astfel suficiența condiției, în cazul cînd E este un spațiu oarecare de dimensiune $n+1$, este demonstrată.

Fie acum E un spațiu Banach oarecare. Să presupunem că pol. de c.m.b.a. nu este unic pentru orice $x \in E$. Atunci, considerînd subspațiul $E_{n+1} \subset E$ de dimensiune $n+1$ determinat de elementele $\theta, x_1, \ldots, x_n, x_0$, în baza celor precedente rezultă că există n puncte extreme neopuse $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ale sferei S^*_{n+1} și n numere $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ astfel, încît

$$(\lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_n \varphi_n)(x_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{x \mid \varphi_i(x) = 1, \ \| x \| = 1, \ \| x + p_0 \| = 1\} \neq 0, \ p_0 \in V_n, \ p_0 \neq \theta.$$

Funcționalele liniare $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se pot însă extinde pe tot spațiul E cu păstrarea normei, astfel încît extensiunile lor $f_1, \ldots, f_n$ să fie puncte extreme (evident neopuse) ale sferei S^* (vezi [27], teorema 5). Atunci avem

$$(\bar{A}_2) \qquad (\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n)(x_i) = 0, \ i = 1, \ \ldots, \ n$$

$$(\bar{B}_2) \qquad \text{pentru un } p_0 \in V_n, \ p_0 \neq \theta,$$

$$\bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{x \mid f_i(x) = 1, \ \| x \| = 1, \ \| x + p_0 \| = 1\} \neq 0$$

deci condiția teoremei 2.2 nu este satisfăcută.

Teorema 2.2 este demonstrată.

Observație. Din punct de vedere geometric, teorema 2.2 înseamnă că, în loc de a examina toate hiperplanele de sprijin H ale sferei S, cum cere lema 2.1, ajunge să examinăm numai acele hiperplane de sprijin ale sferei S care au ecuația de forma $\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x) = 1$, $\sum_{i=1}^{u} |\lambda_i| = 1$, unde $f_1, \ldots, f_n$ sînt puncte extreme neopuse ale sferei S^*; acestea sprijină sfera S în mulțimile

$$\bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{x \mid f_i(x) = \operatorname{sgn} \lambda_i, \ \| x \| = 1\}.$$

Ca și teorema 2.1, teorema 2.2 se poate pune sub următoarea formă echivalentă:

T e o r e m a 2.2′. *Pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur polinom de cea mai bună aproximație, este necesar și suficient să nu existe k puncte extreme neopuse ale sferei S^*, unde $1 \leqslant k \leqslant n$, avînd proprietățile*

$$(A'_2) \qquad (\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k)(x_i) = 0, \text{ unde } \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| = 1,$$

$$(B'_2) \qquad \textit{pentru un } p_0 \in V_n, \ p_0 \neq \theta,$$

$$\bigcap_{i=1}^{k} \{x \mid f_i(x) = \operatorname{sgn} \lambda_i, \ \| x \| = 1, \ \| x + p_0 \| = 1\} \neq 0.$$

*) Vezi trimiterea de la enunțul teoremei 2.2.

5. Din teorema 2.2 rezultă în mod imediat următoarea

Consecință. Pentru ca orice element $x \in E$ *să aibă un singur polinom de cea mai bună aproximație, este suficient ca,* $f_1, \ldots, f_n$ *fiind puncte extreme oarecare neopuse* *) *ale sferei* S^*, *să nu existe numere* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *cu* $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \neq 0$, *astfel încît*

$$(A_2) \qquad (\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n)(x_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n .$$

Observația 1. Această propoziție se poate demonstra și direct, fără utilizarea teoremei de extensiune din [27], pe care am folosit-o în demonstrația teoremei 2.2.

Observația 2. Condiția din consecința de mai sus *nu este, în general,* necesară pentru unicitatea pol. de c.m.b.a. Într-adevăr, fie de exemplu $E = l_3$ (vezi fig. 2, *b*), $n = 2$ și $V_2 = [0, x_1, x_2,]$ = un plan de coordonate (oarecare). Atunci condiția din consecința de mai sus nu este satisfăcută, dar pol. de c.m.b.a. al oricărui element $x \in E$ este unic.

Observația 3. Condiția din consecința de mai sus este, evident, echivalentă cu oricare din următoarele două:

a) *pentru orice polinom* $p_0 \in V_n = [0, x_1, \ldots, x_n]$ *sfera* S^* *să aibă cel mult* $n-1$ *puncte extreme neopuse* $f_1, \ldots, f_{n-1}$ *astfel, încît* $f_1(p_0) = \ldots = f_{n-1}(p_0) = 0$

b) $f_1, \ldots, f_n$ *fiind puncte extreme oarecare neopuse ale sferei* S^*, *să avem*

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_n(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ f_1(x_n) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Ca o aplicație a teoremei 2.2 vom arăta acum un caz particular important în care condiția suficientă din consecința de mai sus este în același timp și necesară pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur pol. de c.m.b.a., și anume vom demonstra următoarea generalizare a teoremei lui A. Haar (vezi § 1):

T e o r e m a 2.3. *Dacă* E *este un spațiu de tip* C, $E = C(Q)$, *atunci, pentru ca orice funcție* $x(t) \in C(Q)$ *să aibă un singur polinom de cea mai bună aproximație, este necesar și suficient ca funcțiile* (2.1) *să formeze un sistem Cebîșev.*

Demonstrație. Suficiența. Deoarece punctele extreme f ale sferei $S^* \subset C(Q)^*$ sînt funcționalele de forma $f(x) = x(\tau)$ și $f(x) = -x(\tau)$, unde τ este un punct fix din spațiul Q (vezi cap. I, § 1), condiția din teorema 2.3 cere ca pentru nici un $p_0 \in V_n$, $p_0 \neq 0$ să nu existe n puncte extreme neopuse $f_1, \ldots, f_n$ ale sferei S^*, astfel încît să avem $f_1(p_0) = \ldots = f_n(p_0) = 0$. Prin urmare, în baza observației 3 de la consecința teoremei 2.2, condiția din teorema 2.3 este echivalentă cu condiția din consecința teoremei 2.2 și de aceea, în baza acestei consecințe, ea este suficientă pentru ca orice funcție $x(t) \in E$ să aibă un singur pol. de c.m.b.a.

Necesitatea. Să presupunem că nu este satisfăcută condiția din teorema 2.3. Atunci există un polinom $p_0 \in V_n$ și n puncte $t_1, \ldots, t_n \in Q$, astfel încît $p(t_1) = \ldots = p(t_n) = 0$; putem considera fără să restrîngem generalitatea că $\| p \| \leqslant 1$. Atunci și sistemul de ecuații transpus

$$(A_2) \qquad \lambda_1 x_i(t_1) + \ldots + \lambda_n x_i(t_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

*) Vezi trimiterea de la teorema 2.2.

are soluție netrivială $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, deci și o soluție $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ cu $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1$.

Deoarece spațiul Q, fiind spațiu Hausdorff bicompact, este normal, și deoarece orice mulțime finită din Q este închisă, din lema mare a lui P.S. Urîson rezultă că există o funcție $y_0(t) \in C(Q)$ cu proprietățile*):

$$\begin{cases} y_0(t_i) = \operatorname{sgn} \lambda_i \text{ pentru acei } \lambda_i \text{ care } \neq 0, \\ \| y_0 \| = 1. \end{cases}$$

Funcția

$$x_0(t) = y_0(t) \{1 - |p_0(t)|\}$$

evident se bucură de aceleași proprietăți și în plus

$$|x_0(t) + p_0(t)| \leqslant |x_0(t)| + |p_0(t)| = |y_0(t)| \{1 - |p_0(t)|\} + |p_0(t)| \leqslant 1 - |p_0(t)| + |p_0(t)| = 1,$$

de unde $\| x_0 + p_0 \| \leqslant 1$; deoarece $p_0(t_1) = \ldots = p_0(t_n) = 0$, avem $\| x_0 + p_0 \| = 1$. Prin urmare

$$(B_2) \qquad x_0 \in \bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{ x \mid x_i(t) = \operatorname{sgn} \lambda_i, \| x \| = 1, \| x + p_0 \| = 1 \},$$

deci, ținînd seama de forma punctelor extreme ale sferei $S^* \subset C(Q)$,* condiția din teorema 2.2 nu este satisfăcută. În baza teoremei 2.2 rezultă că pol. de c.m.b.a. nu este unic pentru orice funcție $x(t) \in C(Q)$ (și anume, după cum reiese din demonstrația primei părți a teoremei 2.1, polinoamele θ și $p_0 \neq \theta$ sînt pol. de c.m.b.a. ale funcției $-x_0(t) \in C(Q)$.

Teorema 2.3 este demonstrată.

Observația 1. Condiția din teorema 2.3, adică condiția ca elementele (2.1) din spațiul $C(Q)$ să formeze un sistem Cebîșev, are, în baza rezultatelor referitoare la spațiile de tip C (vezi cap. I, § 2) următoarea interpretare geometrică: *p_0 fiind un element oarecare al varietății liniare $V_n = [\theta, x_1, \ldots, x_n]$, să nu existe n fețe neopuse $F_1, \ldots, F_n$ ale sferei $S \subset C(Q)$ astfel încît dreapta $[\theta, p_0]$ să fie paralelă cu mulțimea $F_1 \cap \ldots \cap F_n$**).

De exemplu, pentru cazul particular cînd $E = m_3$ (vezi fig. 1) și $n = 2$, punctele x_1, x_2 formează un sistem Cebîșev dacă și numai dacă planul $V_2 = [\theta, x_1, x_2]$ nu trece prin nici o axă de coordonate.

Observația 2. Metodele folosite și generalitatea punerii problemelor ne permit să pătrundem în adevărata esență a *noțiunii de sistem Cebîșev.* Într-adevăr, cele precedente ne îndreptățesc să dăm următoarea definiție: *spunem că elementele* (2.1) *dintr-un spațiu Banach E oarecare formează un sistem Cebîșev, dacă pentru orice polinom $p_0 \in V_n = [\theta, x_1, \ldots, x_n]$ sfera S^* are cel mult $n-1$ puncte extreme neopuse $f_1, \ldots, f_{n-1}$ astfel încît $f_1(p_0) = \ldots = f_{n-1}(p_0) = 0$.*

Pentru cazul particular al spațiilor de tip C regăsim definiția clasică a noțiunii de sistem Cebîșev; ea are interpretarea geometrică arătată în observația 1.

Definiția de mai sus are sens și pentru spațiile în care noțiunea de « valoare a unei funcții într-un punct » (care intervine în mod esențial în definiția clasică a noțiunii de sistem Cebîșev) nu are sens, cum sînt de exemplu spațiile de clase de funcții echivalente definite pe un segment $< a, b >$.

*) Geometric aceasta înseamnă că în spațiile de tip C orice fețe neopuse în număr finit au totdeauna un punct comun.

**) În baza observației din nota precedentă, mulțimea $F_1 \cap \ldots \cap F_n$ este sigur nevidă.

Se pune problema următoare: n fiind un număr natural dat, există oare în orice spațiu Banach E elemente (2.1) liniar independente formînd un sistem Cebîșev? Răspunsul este negativ. Într-adevăr, dacă de exemplu $E = C(\mathfrak{M})$, unde $\mathfrak{M}$ este o mulțime mărginită închisă oarecare din planul euclidian obișnuit, atunci oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 2$, nici un sistem de elemente (2.1) liniar independente nu este sistem Cebîșev (vezi [14]); de asemenea, dacă E este planul euclidian obișnuit (acest spațiu este chiar strict normat), atunci pentru $n = 1$ spațiul E nu conține nici un sistem Cebîșev.

Utilizînd definiția generală de mai sus a noțiunii de sistem Cebîșev și ținînd seama de observația 3 de la consecința teoremei 2.2, această consecință se poate formula și astfel:

E fiind un spațiu Banach oarecare, pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur pol. de c.m.b.a., este suficient ca elementele (2.1) *să formeze un sistem Cebîșev*; după cum am amintit, această condiție nu este, în general, necesară.

6. Ne propunem acum să generalizăm pentru spații Banach oarecare problema interpolării și să arătăm legătura ei cu problema unicității pol. de c.m.b.a.

Vom spune că varietatea liniară $V_n = [\,\theta, x_1, \ldots, x_n\,]$ este o *clasă interpolantă**), dacă pentru orice n puncte extreme neopuse **) $f_1, \ldots, f_n$ ale sferei S^* și orice n numere $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ există exact un polinom $p_0 \in V_n$ satisfăcînd relațiile

$$f_i(p) = \gamma_i \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Să observăm că este suficient să luăm $\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 1$, deoarece dacă pentru acest sistem de numere ecuațiile (2.7) au exact o soluție, atunci ele au exact o soluție pentru orice numere $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Vom considera următoarea problemă, pe care o vom numi *problema interpolării*: *Ce condiții trebuie să satisfacă elementele* (2.1), *pentru ca varietatea liniară V_n să fie o clasă interpolantă*?

În baza expresiei punctelor extreme ale sferei $S^* \subset C(Q)^*$, pentru spațiile de tip C regăsim problema obișnuită a interpolării a n valori oarecare pe n noduri oarecare prin combinațiile liniare a n funcții continue date.

În cazul spațiilor de tip C și, mai general, în cazul cînd toate fețele sferei S sînt monoplane și toate punctele extreme ale sferei S^* sînt generatoare (vezi cap. I, § 2), noțiunea de clasă interpolantă are următoarea interpretare geometrică: varietatea liniară V_n este o clasă interpolantă dacă și numai dacă pentru orice n fețe $F_1, \ldots, F_n$ ale sferei S intersecția hiperplanelor de sprijin ale fețelor $F_1, \ldots, F_n$ cu varietatea liniară V_n este o mulțime banală nevidă. Problema interpolării are următoarea interpretare: în ce poziție trebuie să fie varietatea liniară V_n, pentru ca ea să fie o clasă interpolantă?

Scriind $p = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ și considerînd relațiile (2.7) ca un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, obținem, în baza observației de la consecința teoremei 2.2, următoarea rezolvare a problemei interpolării:

L e m a 2.3. *Pentru ca varietatea liniară V_n să fie o clasă interpolantă, este necesar și suficient ca elementele* (2.1) *să formeze un sistem Cebîșev.*

În cazul particular $E = C(<a, b>)$ regăsim o teoremă a lui V. L. Gonciarov [13]***). Menționăm că teorema lui V. L. Gonciarov a fost extinsă de

*) Prin « clasă » înțelegem « clasă de elemente ». Termenul « clasă interpolantă » aparține (pentru cazul particular $E = C(<a, b>)$) lui M. I. M o r o z o v [23].

**) Vezi trimiterea de la teorema 2.2.

***) p. 88.

prof. T. Popoviciu [26] pentru spațiul (nenormabil) $E = F(<a, b>)$ al tuturor funcțiilor definite pe segmentul $<a, b>$.

Din lema 2.3, consecința teoremei 2.2 și teorema 2.3 rezultă următorul criteriu al unicității pol. de c.m.b.a.:

Teorema 2.4. *Pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur pol. de c.m.b.a., este suficient și, în cazul particular cînd E este un spațiu de tip C, este necesar și suficient, ca varietatea liniară V_n să fie o clasă interpolantă.*

De exemplu, cînd $E = l_3$ (vezi, fig. 2) și $n = 2$, orice plan $V_2 = [\theta, x_1, x_2]$ care nu este paralel cu nici o muchie a octaedrului unitate, formează o clasă interpolantă. Proiecția oricărui element $x \in E$ pe orice astfel de plan este banală. Există însă și elemente x_1, x_2, astfel încît varietatea liniară $V_2 = [\theta, x_1, x_2]$ nu este o clasă interpolantă și care totuși au proprietatea că proiecția oricărui element $x \in E$ pe planul $V_2 = [\theta, x_1, x_2]$ este banală; astfel sînt de exemplu orice două elemente liniar independente x_1, x_2, situate într-un plan de coordonate.

§ 3. Cazul n=1

1. În cele ce urmează ne vom ocupa mai îndeaproape de problema unicității pol. de c.m.b.a. *în cazul particular cînd* $n = 1$.

În acest caz, condiția din teorema 2.2 se poate întări, și anume în enunțul ei nu mai este necesar să figureze orice punct extrem f_1 al sferei S^*, ci ajunge să considerăm numai punctele extreme generatoare. Într-adevăr, avem

Teorema 2.5. *Pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur polinom αx_1 de cea mai bună aproximație, este necesar și suficient să nu existe nici un punct extrem generator f_1 al sferei S^*, astfel încît*

$$(A_2) \qquad f_1(x_1) = 0,$$

$$(B_2) \qquad \text{pentru un număr } \lambda_0 \neq 0$$

$$\{ x \mid f_1(x) = 1, \ \| x \| = 1, \ \| x + \lambda_0 x_1 \| = 1 \} \neq 0.$$

Demonstrație. Condiția este evident necesară (în virtutea teoremei 2.2). În ce privește suficiența ei, să presupunem că un element $y_0 \in E$ are două pol. de c.m.b.a., αx_1 și βx_1, $\alpha \neq \beta$. Atunci, în baza teoremei 2.2, există un punct extrem f_1 al sferei S^*, astfel, încît să avem (A_2) și (B_2). Dacă punctul extrem f_1 este generator, atunci condiția din teorema 2.5 nu este satisfăcută și teorema 2.5 este demonstrată. Dacă punctul extrem f_1 nu este generator, atunci există un punct extrem generator f al sferei S^* astfel încît fața $F = \{x \mid f(x) = 1, \| x \| = 1\}$ să conțină mulțimea $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1\}$. Evident, punctul extrem generator f satisface de asemenea (A_2) și (B_2), deci condiția din teorema 2.5 nu este satisfăcută.

Teorema 2.5 este demonstrată.

Observație: Pentru $n \geqslant 2$ afirmația din teorema 2.5 nu mai este, în general, adevărată. Cu alte cuvinte, pentru $n \geqslant 2$ nu putem spune în teorema 2.2 « puncte extreme generatoare » în loc de « puncte extreme ». Iată un exemplu simplu. În spațiul E în care sfera unitate este corpul convex din figura 5, *a*) planul $V_2 = [\theta, x_1, x_2]$ din figura 5, *a*) satisface condiția din teorema 2.2 astfel modificată (deoarece punctul extrem $f(x) = \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3 \in \sigma^*$ — vezi fig. 5, *b*) — nu este generator) și în același timp proiecția punctului θ pe planul de

sprijin H paralel cu V_2 nu este unică, deci condiția din teorema 2.2 astfel modificată nu mai este suficientă (în cazul $n \geqslant 2$) pentru unicitatea pol. de c.m.b.a.

Din teorema 2.5 rezultă în mod imediat următoarea

Consecință. Pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur polinom αx_1 de cea mai bună aproximație, este suficient să nu existe nici un punct extrem generator f_1 al sferei S^* astfel, încît

$$(A_2) \qquad f_1(x_1) = 0.$$

Această consecință are următoarea interpretare geometrică: *Pentru ca proiecția oricărui element $x \in E$ pe dreapta $[0, x_1]$ să fie banală, este suficient ca dreapta $[0, x_1]$ să nu fie paralelă cu nici un hiperplan care sprijină o față a sferei S.* Mai mult, este evident că ajunge să ne mărginim la acele hiperplane

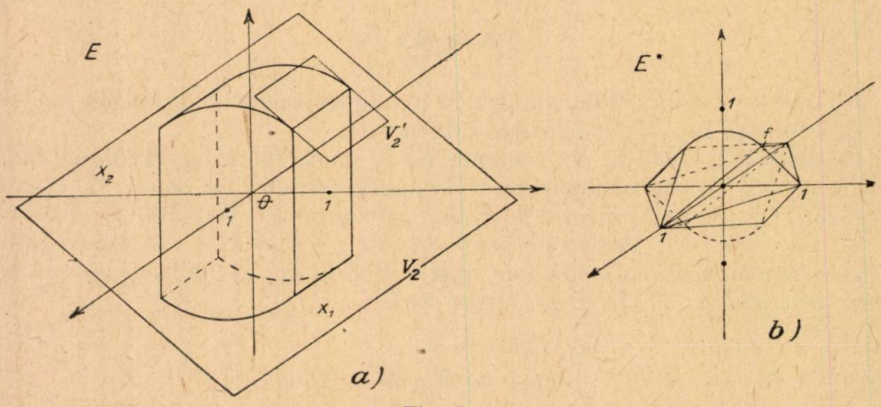

Fig. 5

care sprijină o față nebanală a sferei S, deci (vezi lema 1.2) la punctele extreme generatoare regulat multiplane ale sferei S^*. Acest fapt rezultă însă și din observația de la consecința 2 a lemei 2.2.

Condiția din consecința de mai sus a teoremei 2.5 nu este, în general, necesară. De exemplu, în spațiul în care sfera unitate S este cilindrul circular din figura 3, proiecția oricărui element $x \in E$ pe dreapta $\xi_1 = \xi_2$, $\xi_3 = 0$ este banală, deși nici un element de pe această dreaptă nu satisface condiția din consecința de mai sus.

Un caz particular important în care condiția din consecința de mai sus este nu numai suficientă, dar și necesară, este următorul:

T e o r e m a 2.6. *Dacă toate fețele sferei S sînt perfecte, atunci pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur polinom αx_1 de cea mai bună aproximație, este necesar și suficient să nu existe nici un punct extrem generator f_1 al sferei S^* astfel încît*

$$(A_2) \quad f_1(x_1) = 0.$$

Demonstrație. În baza consecinței teoremei 2.5, condiția este suficientă, În ce privește necesitatea ei, să presupunem că nu este satisfăcută, deci că există

un punct extrem generator f_1 al sferei S^*, astfel încît $f_1(x_1) = 0$. Aceasta înseamnă că dreapta $[\theta, x_1]$ este paralelă cu un hiperplan H care sprijină fața $F = \{x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1\}$ a sferei S. Deoarece prin ipoteză orice față a sferei S este perfectă, rezultă că dreapta $[\theta, x_1]$ este paralelă cu fața F (evident nebanală). De aceea translatata dreptei $[\theta, x_1]$ sprijină fața F într-o mulțime nebanală, adică proiecția punctului θ pe translatata dreptei $[\theta, x_1]$ nu este banală.

Teorema 2.6 este demonstrată.

În particular, dacă spațiul E este de tip C, atunci, ținînd seama de consecința lemei 1.6 și de lema 1.3, din teorema 2.6 regăsim teorema 2.3, cazul $n = 1$.

2. Fie acum E un spațiu de tip L. Atunci din teorema 2.6 și din consecința lemei 1.6 și lemele 1.4 și 1.5 rezultă

Lema 2.4. *Dacă E este un spațiu de tip L, atunci pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur polinom $\alpha\, x_1$ de cea mai bună aproximație, este necesar și suficient să avem*

$$\int_\Omega x_1(t)\, \beta_\omega(t)\, d\, m(t) \neq 0$$

pentru orice submulțime măsurabilă $\omega \subset \Omega$.

Pentru cazul particular $E = l_2$ această condiție înseamnă că dreapta $[\theta, x_1]$ nu poate să fie o dreaptă bisectoare. Pentru cazul particular $E = l_3$, condiția cere ca dreapta $[\theta, x_1]$ să nu fie în nici unul din cele patru plane bisectoare.

Pentru cazul particular $E = L(<a, b>)$ avem

Teorema 2.7. *Dacă $E = L(<a, b>)$, atunci nu există nici un element $x_1 \in E$, astfel încît orice element $x \in E$ să aibă un singur polinom $\alpha\, x_1$ de cea mai bună aproximație.*

Demonstrație. În baza lemei 2.4 ajunge să demonstrăm

Lema 2.5. *Nu există funcție $x_1(t) \in L(<a, b>)$, astfel încît să avem $\int_a^b x_1(t)\, \beta_\omega(t)\, dt \neq 0$ pentru orice mulțime măsurabilă $\omega \subset <a, b>$.*

Demonstrație. Fie $x_1(t) \in L(<a, b>)$. Deoarece funcția $F(s) = \int_a^s x_1(t)dt$ este continuă pentru $a \leqslant s \leqslant b$ și $F(a) = 0$, în baza teoremei lui Darboux există un $s_0 \in <a, b>$, astfel încît să avem $F(s_0) = \frac{F(b)}{2}$. Să luăm $\omega_0 = <a, s_0>$. Atunci *)

$$\int_a^b x_1(t)\, \beta_{\omega_0}(t)\, dt = \int_a^b x_1(t)\, \alpha_{\omega_0}(t)\, dt - \int_a^b x_1(t)\, \alpha_{<a, b> - \omega_0}(t)\, dt =$$

$$= F(s_0) - [F(b) - F(s_0)] = 2\, F(s_0) - F(b) = F(b) - F(b) = 0.$$

Lema 2.5 și cu aceasta și teorema 2.7 este demonstrată.

Observație. Să comparăm teorema 2.7 cu cazul $n = 1$ al teoremei lui D. Jackson și al teoremei lui N. I. Ahiezer (vezi § 1). Ținînd seama de faptul că

*) Reamintim că am notat cu $\alpha_A(t)$ funcția caracteristică a mulțimii $A \subset <a, b>$.

$L_C(<a, b>)^* = L(<a, b>)^*$, această comparație ne arată că teoremele 2.6, 2.5 și 2.2 nu mai sînt valabile pentru spațiile $L_C(<a, b>)$. În general, rezultatele noastre nu sînt valabile pentru orice spațiu liniar normat, ci numai pentru spațiile Banach, deoarece am utilizat teoreme valabile numai pentru spații Banach; spațiul $L_C(<a, b>)$ nu este însă spațiu Banach.

În ce privește teoremele lui Pólya, Jackson și Ahiezer referitoare la spațiul $L_C(<a, b>)$ (vezi § 1), era evident de la început că acestea nu se pot încadra în teoria din lucrarea de față, deoarece funcționalele $f(x) = x(t_0)$, care figurează în ele, nu mai sînt continue, deci nu mai sînt liniare pe spațiul L_C $(<a, b>)$. *Este o problemă deschisă* construirea unei teorii mai generale, în care să se încadreze drept cazuri particulare și teoremele lui Pólya, Jackson și Ahiezer referitoare la spațiul $L_C(<a, b>)$.

3. Pornind de la alte condiții geometrice decît cele din lema 2.1 și transpunîndu-le în limbaj analitic, obținem alte criterii practice ale unicității pol. de c.m.b.a. Drept exemplu dăm, tot pentru cazul $n = 1$, o altă condiție necesară și suficientă a unicității pol. de c.m.b.a., diferită de cea din teorema 2.5. Anume, transpunerea în limbaj analitic a observației simple, că dreapta $[0, x_1]$ este paralelă cu o față nebanală F_1 a sferei S dacă și numai dacă ea este paralelă cu orice hiperplan H (nu neapărat de sprijin) care conține fața F_1, ne conduce la

Teorema 2.8. *Pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur polinom αx_1 de cea mai bună aproximație, este necesar și suficient ca pentru orice punct extrem generator regulat multiplan f_1 al sferei S^* să existe un element $f \in E^*$ și un număr c_f cu proprietățile*

$$(C) \quad f_1(x) = 1, \ \| x \| = 1 \text{ implică } f(x) = c_f ;$$

$$(D) \quad f(x_1) \neq 0.$$

Demonstrație. Necesitatea. Să presupunem că nu este satisfăcută condiția din teoremă. Aceasta înseamnă, deoarece condiția (C) este totdeauna satisfăcută pentru cel puțin punctul extrem $f = f_1$ și numărul $c_{f_1} = 1$, că, pentru orice element $f \in E^*$ care îndeplinește condiția (C), avem $f(x_1) = 0$. Cu alte cuvinte, dreapta $[0, x_1]$ este paralelă cu orice hiperplan care conține fața nebanală $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1\}$ a sferei S, deci dreapta $[0, x_1]$ este paralelă cu fața F_1 și prin urmare putem translata dreapta $[0, x_1]$ astfel, încît să sprijine sfera S într-un segment. Rezultă că proiecția oricărui punct al acestui segment pe dreapta $[0, x_1]$ este nebanală, adică orice element y_0 al acestui segment are cel puțin două pol. de c.m.b.a., αx_1 și βx_1, $\alpha \neq \beta$.

Suficiența. Să presupunem că există un element $y_0 \in E$ care are două pol. de c.m.b.a., αx_1 și βx_1, $\alpha \neq \beta$. Proiecția acestui element y_0 pe dreapta $[0, x_1]$ este nebanală, deci dreapta $[0, x_1]$ se poate translata astfel, încît translatata ei să sprijine sfera S într-un segment nebanal $M \subset \sigma$. Deoarece există o față F_1 a sferei S, care conține segmentul M, rezultă că dreapta $[0, x_1]$ este paralelă cu fața F_1 și prin urmare dreapta $[0, x_1]$ este paralelă cu orice hiperplan care conține fața F_1. În consecință există un punct extrem generator regulat multiplan f_1 al sferei S^*, astfel încît să avem $f(x_1) = 0$ pentru orice funcțională liniară $f \in E^*$ care satisface condiția (C), deci condiția din teoremă nu este satisfăcută.

Teorema 2.8 este demonstrată.

Din punct de vedere practic teorema 2.8 este la fel de convenabilă ca teorema 2.5, deoarece din ea se pot obține toate acele teoreme referitoare la spațiile particulare, care se pot obține din teorema 2.5 (ca de exemplu teorema 2.6).

§ 4. O generalizare a problemei

În sfîrșit, vom da o generalizare a problemei existenței și a problemei unicității pol. de c.m.b.a.

Fie $y = y(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ o funcție de n variabile reale $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ uniformă și continuă în domeniul $-\infty < \alpha_1, \ldots, \alpha_n < \infty$ în raport cu toate argumentele în totalitatea lor și cu valori vectoriale $y \in E$, unde E este un spațiu Banach oarecare. Fie Y_n mulțimea tuturor elementelor $y(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. x fiind un element oarecare din spațiul E, vom numi «cea mai bună aproximație a elementului x prin elementele mulțimii Y_n» numărul

$$\mu_n(x) = \rho(x, Y_n) = \inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \| x - y(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \|$$

și «element de cea mai bună aproximație (vom nota*) prescurtat: el. de c.m.b.a.) a elementului x «orice element $y' \in Y_n$ cu proprietatea $\| x - y' \| = \mu_n(x)$.

Punem *problema existenței și problema unicității elementului de cea mai bună aproximație: ce condiții trebuie să satisfacă elementele mulțimii Y_n pentru ca orice element $x \in E$ să aibă cel puțin un element de cea mai bună aproximație? In cazul cînd aceasta are loc, ce condiții trebuie să satisfacă elementele mulțimii Y_n pentru ca orice element $x \in E$ să aibă un singur element de cea mai bună aproximație?*

Pentru cazul particular cînd funcția $y(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ este liniară

$$y(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n, \tag{2.8}$$

unde $x_1, \ldots, x_n \in E$ sînt elemente date liniar independente, regăsim problema existenței și problema unicității pol. de c.m.b.a. Existența pol. c.m.b.a. fiind în acest caz asigurată (vezi § 1) rămîne problema unicității, rezolvată în lucrarea de față.

După cît știm, sub forma generală de mai sus, pînă acum problemele existenței și unicității el. de c.m.b.a. nu au fost puse. Afară de cazul particular (2.8) s-a pus numai problema condițiilor suficiente și numai pentru cazul particular $E = C(<a, b>)$. Această problemă particulară a fost rezolvată în 1950 de L. Torheim [32] și, independent de el, în 1952, de M. I. Morozov [23], care au dat următoarea teoremă: *Dacă mulțimea Y_n a funcțiilor $y(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in C(<a, b>)$ este o clasă interpolantă, atunci pentru orice element $x(t) \in C(<a, b>)$ există exact un element de cea mai bună aproximație.* Aici prin termenul «clasă interpolantă» înțelegem că mulțimea Y_n se bucură de proprietatea următoare: pentru orice puncte $t_1, \ldots, t_n \in <a, b>$ și orice numere $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ există exact un element $y \in Y_n$ satisfăcînd relațiile $y(t_i) = \gamma_i$, $i = 1, \ldots, n$. Menționăm că pentru cazul particular (2.8) din această teoremă a lui L. Tornheim și M. I. Morozov, se regăsește a doua jumătate a teoremei lui A. Haar.

În ce privește problema existenței el. de c.m.b.a., (E fiind din nou un spațiu Banach oarecare) dintr-o teoremă mai generală a acad. M. Nicolescu [24] rezultă că, *dacă mulțimea Y_n este compactă, atunci pentru orice element $x \in E$ există cel puțin un el. c.m.b.a.*

În lucrarea de față, fără să rezolvăm problema generală a existenței și unicității el. de c.m.b.a., ne mărginim să arătăm interpretarea ei geometrică.

Pentru $n = 1$ mulțimea Y_1 a elementelor $y = y(\alpha_1)$ este o curbă din spațiul Banach E. Pentru $n = 2$, mulțimea Y_2 a elementelor $y = y(\alpha_1, \alpha_2)$ este o supra-

*) Cu excepția cazului cînd figurează într-un enunț.

față, ș.a.m.d. Pentru n oarecare putem spune că mulțimea Y_n este o hipersuprafață din spațiul E. Vom numi proiecție a elementului x pe mulțimea Y_n mulțimea

$$B_n(x) = S(x, \mu_n(x)) \cap Y_n = \sigma(x, \mu_n(x)) \cap Y_n .$$

Spre deosebire de cazul particular (2.8), în cazul general proiecția $B_n(x)$ a unui element x pe mulțimea Y_n poate fi și vidă, sau o mulțime neconvexă.

Problemele existenței și unicității el. de c.m.b.a. revin la problemele următoare: *cum trebuie să fie mulțimea* Y_n, *pentru ca proiecția oricărui element* $x \in E$ *pe mulțimea* Y_n *să fie nevidă? In cazul cînd aceasta are loc, în ce condiții constau proiecțiile* $B_n(x)$ *pentru orice* $x \in E$ *din exact un element?*

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТИ ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЫ И ПРИМЕНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ЕДИНСТВЕННОСТИ МНОГОЧЛЕНА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЛЮБЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В первой главе настоящей работы, озаглавленной «Свойства поверхности единичной сферы в любом пространстве Банаха», в отличие от исследований, произведенных до сих пор о поверхности единичной сферы в любом пространстве Банаха, которые использовали только элементы пространства, автор изучает поверхность единичной сферы в любом пространстве Банаха при помощи элементов пространства и элементов сопряженного пространства.

Пусть E — любое пространство Банаха, E^* — сопряженное пространство, $S = \{x \mid x \in E, \ \| x \| \leqslant 1\}$ — единичная сфера пространства E, $\sigma = \{x \mid x \in E, \ \| x \| = 1\}$ — поверхность этой сферы, $S^* = \{f \mid f \in E^*, \ \|f\| \leqslant 1\}$ — единичная сфера пространства E^* и $\sigma^* = \{f \mid f \in E^*, \ \|f\| = 1\}$ — поверхность этой сферы. Назовем выпуклое множество $M \subset \sigma$ *монопланным*, соответственно *мультипланным*, в зависимости от того, имеется ли одна или несколько опорных гиперплоскостей сферы S, содержащих множество M; называем регулярно выпуклое множество $\mathcal{K} \subset \sigma^*$ *регулярно монопланным* или *регулярно мультипланным*, в зависимости от того, существует ли одна или несколько регулярных опорных гиперплоскостей сферы S^*, проходящих через $\mathcal{K}$. Согласно [11] называем *лицом* сферы S всякое максимальное выпуклое подмножество (см. [9]) поверхности этой сферы. Называем лицо F_1 сферы S *совершенным лицом*, если существует только одна гиперплоскость, содержащая лицо F_1. Наконец, называем множество $M \subset \sigma$ *опорным множеством* сферы S, если существует такая опорная гиперплоскость H сферы S, что $H \cap S = M$.

Если F_1 — *лицо сферы* S, *то существует экстремальная точка* f_1 *сферы* S^* *такая, что* $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \ \| x \| = 1\}$. *Экстремальная точка* f_1 *является единственной тогда и только тогда, если лицо* F_1 *монопланное* (теорема 1.1).

Для всякой точки $f_1 \in (\sigma^*$ *в частности для всякой экстремальной точки* f *сферы* $S^*)$ *множество* $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \ \| x \| = 1\}$ *есть*

экстремальное множество (см. [12], *определение* 1) *сферы* S (теорема 1.2). Оно состоит больше, чем из одного элемента тогда и только тогда, если точка $f_1 \in \sigma^*$ является регулярно мультипланной (лемма 1.2). Из этого предложения вытекает новый критерий строгой нормированности: пространство Банаха E строго нормировано (см. [7]) тогда и только тогда, если единичная сфера S^* сопряженного пространства E^* не имеет ни одной регулярно мультипланной точки (следствие 2).

Далее показывается, *для каких экстремальных точек* f_1 *сферы* S^* *является множество* $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \|x\| = 1\}$ *лицом сферы* S (теорема 1.3 и следствие), *монопланным лицом сферы* S (теорема 1.4) и, наконец, *совершенным лицом сферы* S (теорема 1.5 и 1.6). В частности следует, что в пространствах типа C (см. [8]) и в пространствах типа L (см. [11]) каждое лицо шара S совершенное.

Теоремы С. Эйленберга [9] и, соответственно, Р. Е. Фэллертона [11] о лицах единичной сферы пространств типа C соответственно пространств типа L являются частными случаями вышеприведенных результатов.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторое множество непротивоположных экстремальных точек сферы S^*. Каждому элементу $x \in E$ соответствует функция $X(f)$, непрерывная на $\mathfrak{F}$, определяемая (1.7). Пусть $\mathfrak{M}$ какое-нибудь среднее значение, определенное в $\mathfrak{F}$ (см. [23]). Придавая каждому элементу $x \in E$ число (1.8), получим линейный функционал $m \in S^*$. *Для каждого* $\varphi \in \sigma^*$ *существует множество непротивоположных экстремальных точек* $\mathfrak{F}$ *сферы* S^*, *с регулярно выпуклой оболочкой, заключенной в* σ^*, *и среднее значение* $\mathfrak{M}$, *определенное в* $\mathfrak{F}$ *таких, что* $\varphi = m$ (лемма 1.8). *Если* $\mathfrak{F}$ — *некоторое множество непротивоположных экстремальных точек сферы* S^* *и* $\mathfrak{M}$ *некоторое среднее значение, определенное в* $\mathfrak{F}$ *таким образом, что имеем* (1.10), *то гиперплоскость* $H = \{x \mid m(x) = 1\}$ *подпирает сфера* S *в множестве* (1.10) (теорема 1.7). Эта теорема вместе с предыдущим предложением позволяет нам выразить опорное множество $\Pi \cap S$, где $\Pi = \{x \mid \varphi(x) = 1\}$ есть какая-нибудь опорная гиперплоскость сферы S, при помощи экстремальных точек сферы S^*.

Если $M \subset \sigma$ *есть непустое опорное множество сферы* S, *то всякая гиперплоскость* H, *подпирая сферу* S *в множестве* M, *имеет уравнение вида* $m_2(x) = 1$, *где* $\mathfrak{M}_2$ *есть среднее значение, определенное в множестве* $\mathfrak{F}_2 = \{f \mid f(x) = 1$ *для всякого* $x \in M$, f — *экстремальная точка сферы* $S^*\}$ (теорема 1.8). Обратная теорема не верна: не всякая гиперплоскость с уравнением $m_2(x) = 1$, где $\mathfrak{M}_2$ есть среднее значение, определенное в $\mathfrak{F}_2$, подпирает сферу S в данном множестве M.

Из теоремы 1.2 следует, что *каждое множество, подпирая сферу* S, *является экстремальным множеством этого шара.* Показывается на примере (рис. 4), что *обратная теорема не верна. Непустое множество* $M \subset \sigma$ *есть опорное множество сфере* S *тогда и только тогда, если имеем* (1.11), *где через* $\mathfrak{F}_2$ *мы обозначили множество* (1.12) (теорема 1.9).

Результаты главы I о единичной сферы $S = S(0, 1)$ легко распространяются на любые сферы $S(x_0, r) \subset E$. Например, теорема 1.1 распространяется следующим образом: *Если* F_1 *есть лицо сферы* $S(x_0, r)$, *то существует экстремальная точка единичной сферы* S^*, *такая что* $F_1 = \{x \mid f_1(x - x_0) = r, \|x - x_0\| = r\}$ и. т. д.

Глава II посвящена решению задачи единственности многочлена наилучшего приближения в любых пространствах Банаха.

Пусть E — действительное линейное нормированное пространство, пусть

$$x_1, \ldots, x_n \ (1 \leqslant n < \infty) \tag{2.1}$$

n — линейных независимых элементов из E и пусть $x \in E$. Будем называть *многочленом наилучшего приближения* (мн. н. п.) элемента x всякий «многочлен» $q = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, имеющий свойство

$$\| x - q \| = \inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \| x - \alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_n x_n \| . \tag{2.4}$$

Известно [1], что для всякого элемента $x \in E$ существует по меньшей мере один мн. н. п. Задача единственности мн. н. п. состоит в следующем: *Каким условиям должны удовлетворять элементы* (2.1), *чтобы каждый элемет* $x \in E$ *имел единственный мн. н. п.?*

За 50 лет, протекших со времени получения первых результатов, целый ряд математиков — Э. Борель, М. Фреше, Л. Тонелли, А. Хаар, Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, А. Н. Колмогоров и другие — занимались задачей единственности мн. н. п. для разных частных случаев. Во всей общности задача была поставлена в 1940 г. Н. И. Ахиезером [1]. Единственная попытка решить задачу для любого пространства Банаха была сделана в 1952 г. Татаркевичем [30]. Предложенное им решение не лишено интереса, особенно для его геометрического вида, но это решение нельзя считать удовлетворительным с точки зрения практической пользы, так как оно не отражает некоторых важных известных результатов, как например, теорему А. Хаара [14]. Причиной этого является то, что теорема К. Татаркевича использует только элементы пространства E; однако, например, в теореме А. Хаара существенную роль играет понятие «значение непрерывной функции в некоторой точке», которое не может быть выражено только при помощи элементов пространства непрерывных функций.

Во второй главе настоящей работы автор решает задачу единственности мн. н. п. в любых пространствах Банаха, давая необходимые и достаточные условия, из которых можно вновь вывести все известные частные результаты, а также получить новые частные результаты. С этой целью автор использует как элементы пространства E, так и элементы сопряженного пространства E^*.

В отличие от К. Татаркевича, который использует только геометрические методы, автор комбинирует некоторые геометрические методы — более простые, чем методы К. Татаркевича — с аналитическими методами, пользуясь своими результатами из главы I настоящей работы, а также и из [27] и [28].

Главный результат следующий:

Теорема 2.2. Для того чтобы каждый элемент $x \in E$ *имел единственный многочлен наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы в том случае, когда* $f_1, \ldots, f_n$ *— какие-нибудь непротивоположные экстремальные точки сферы* S^*, *не существовали числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *с* $\sum_{\lambda=1}^{n} |\lambda_i| = 1$, *имеющие следующие свойства:*

$$(A_2) \qquad (\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n)(x_i) = 0, \ i = 1, \ldots, n$$

(B_2) *для некоторого многочлена* $p_0 \neq 0$,

$$\bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{x \mid f_i(x) = \operatorname{sgn} \lambda_i,\ \|x\| \leqslant 1,\ \|x + p_0\| = 1\} \neq 0.$$

Из теоремы 2.2 легко находится теорема Н. И. Ахиезера о единственности мн. н. п. в строго нормированных пространствах [1] и теорема А. Хаара о единственности мн. н. п. в пространстве $C(\mathfrak{M})$ всех функций, непрерывных на ограниченном и замкнутом множестве $\mathfrak{M}$ из евклидова пространства какого-либо размера [14]. Более того, применяя теорему 2.2, автор получает следующее обобщение теоремы А. Хаара: *Если* E *— пространство типа* C, *то для того чтобы всякая функция* $x(t) \in E$ *имела единственный мн. н. п., необходимо и достаточно, чтобы функции* (2.1) *образовывали систему Чебышева* (теорема 2.3). В связи с этим автор обобщает понятие системы Чебышева для любых пространств Банаха и показывает ее связь с задачей единственности мн. н. п. (теоремы 2.4).

Далее рассматривается более подробно задача единственности мн. н. п. для частого случая $n = 1$ (теоремы 2.5, 2.6, 2.7 и 2.8).

Другим результатом, полученным автором также путем применения теоремы 2.2, является следующий: Если $E = L(< a, b >)$ и $n = 1$, то не существует такого элемента $x_1 \in E$, чтобы всякий элемент $x \in E$ имел единственный многочлен αx_1 наилучшего приближения (теорема 2.7).

Наконец, автор дает обобщение задачи единственности мн. н. п. и геометрическую интерпретацию этого обобщения.

PROPRIÉTÉS DE LA SURFACE DE LA SPHÈRE UNITAIRE ET APPLICATIONS À LA RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE L'UNICITÉ DU POLYNÔME DE MEILLEURE APPROXIMATION DANS DES ESPACES DE BANACH QUELCONQUES

(RÉSUMÉ)

Dans le premier chapitre de ce travail, intitulé « Propriétés de la surface de la sphère unitaire dans un espace de Banach quelconque », différemment des recherches faites jusqu'à présent sur le même sujet et qui n'utilisaient que les éléments de l'espace, l'Auteur étudie la surface de la sphère unitaire dans un espace de Banach quelconque à l'aide des éléments de l'espace et des éléments de l'espace adjoint.

Soient E un espace de Banach quelconque, E^* l'espace adjoint, $S = \{x \mid x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$ la sphère unitaire de l'espace E, $\sigma = \{x \mid x \in E, \|x\| = 1\}$ la surface de cette sphère, $S^* = \{f \mid f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\}$ la sphère unitaire de l'espace E^* et $\sigma^* = \{f \mid f \in E^*, \|f\| = 1\}$ la surface de cette sphère. On dit que l'ensemble convexe $M \subset \sigma$ est *monoplan*, respectivement *multiplan*, s'il existe un seul, respectivement plusieurs, hyperplans d'appui de la sphère S, qui contiennent l'ensemble M; on dit que l'ensemble régulièrement convexe $\mathfrak{K} \subset \sigma^*$ est *régulièrement monoplan*, respectivement *régulièrement multiplan*, s'il existe un

seul, respectivement plusieurs hyperplans réguliers d'appui de la sphère S^* qui passent par $\mathfrak{K}$. On appelle, d'après [11], *face* de la sphère S, tout sous-ensemble convexe maximal (v. [9]) de la surface de cette sphère. On appelle la face F_1 de la sphère S, *face parfaite*, s'il existe un seul hyperplan contenant la face F_1. On appelle enfin un ensemble $M \subset \sigma$ *ensemble d'appui* de la sphère S, s'il existe un hyperplan d'appui H de la sphère S tel que $H \cap S = M$.

Si F_1 est une face de la sphère S, il existe un point extrême f_1 de la sphère S^* tel que $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1\}$. *Le point extrême f_1 est unique si, et seulement si la face F_1 est monoplane* (théorème 1.1).

Pour tout point $f_1 \in \sigma^*$ (donc en particulier, pour tout point extrême f_1 de la sphère S^*) l'ensemble $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1\}$ *est un ensemble extrême (v.* [12], *définition 1) de la sphere S.* (théorème 1.2). Cet ensemble est constitué par plus d'un élément si, et seulement si, le point $f_1 \in \sigma^*$ est régulièrement multiplan (lemme 1.2). De cette proposition résulte un nouveau critère pour qu'un espace soit strictement normé: l'espace de Banach E est strictement normé (v. [7]) si, et seulement si, la sphère unitaire S^* de l'espace adjoint E^* ne contient aucun point extrême régulièrement multiplan (conséquence 2).

On montre *pour quels points extrêmes f_1 de la sphère S^*, l'ensemble* $F_1 = \{x \mid f_1(x) = 1, \| x \| = 1\}$ *est une face de la sphère S* (théoreme 1.3 et le corollaire), *une face monoplane de la sphère S* (théorème 1.4), et enfin *une face parfaite de la sphère S* (théorèmes 1.5 et 1.6). Il résulte, en particulier, que dans les espaces de type C (v. [8]) et dans les expaces de type L (v. [11]), chaque face de la sphère S est parfaite.

Les théorèmes de S. Eilenberg [9], respectivement de R. E. Fullerton [11], sur les faces de la sphère unitaire dans les espaces de type C et dans les espaces de type L, résultent comme des cas paticuliers des résultats ci-dessus.

Soit $\mathfrak{F}$ un ensemble quelconque de points extrêmes non opposés de la sphère S^*. A chaque élément $x \in E$ correspond une fonction $X(f)$ continue sur $\mathfrak{F}$ et définie par (1.7). Soit $\mathfrak{M}$ une valeur moyenne quelconque définie en $\mathfrak{F}$ (v. [23]). En attachant à chaque élément $x \in E$ le nombre (1.8), on obtient une fonctionnelle linéaire $m \in S^*$. *Pour tout $\varphi \in \sigma^*$ il existe un ensemble $\mathfrak{F}$ de points extrêmes non opposés de la sphère S^*, à enveloppe régulièrement convexe contenue dans σ^* et une valeur moyenne $\mathfrak{M}$ définie en $\mathfrak{F}$ telle que $\varphi = m$* (lemme 1.8).

$\mathfrak{F}$ étant un ensemble quelconque de points extrêmes non opposés de la sphère S^* et $\mathfrak{M}$ une valeur moyenne quelconque définie en $\mathfrak{F}$ de telle sorte qu'on ait (1.10), *l'hyperplan $H = \{x \mid m(x) = 1\}$ appuie la sphère S dans l'ensemble* (1.10), (théorème 1.7). Ce théorème, compte tenu de la proposition précédente, permet d'exprimer l'ensemble d'appui $\Pi \cap S$, où $\Pi = \{x \mid \varphi(x) = 1\}$ est un hyperplan d'appui quelconque de la sphère S, à l'aide des points extrêmes de la sphère S^*.

Si $M \subset \sigma$ est un ensemble d'appui non vide de la sphère S, tout hyperplan H qui appuie la sphère S dans l'ensemble M a l'équation de la forme $m_2(x) = 1$ où $\mathfrak{M}_2$ est une valeur moyenne définie dans l'ensemble

$$\mathfrak{F}_2 = \{f \mid f(x) = 1 \text{ pour tout } x \in M,\ f \text{ point extrême de la sphère } S^*\}.$$

(théorème 1.8). La réciproque de ce théorème n'est pas vraie: un hyperplan, ayant pour équation $m_2(x) = 1$, où $\mathfrak{M}_2$ est une valeur moyenne définie en $\mathfrak{F}_2$, n'appuie pas nécessairement la sphère S dans l'ensemble donné M.

Du théorème 1.2, il résulte que *chaque ensemble d'appui de la sphère S est un ensemble extrême de cette sphère.* On montre par un exemple (fig. 4) que *la réciproque de ce théorème n'est pas vraie. L'ensemble non vide $M \subset \sigma$ est un ensemble*

d'appui de la sphère S si, et seulement si, nous avons (1.11), *où nous avons désigné par* $\mathfrak{F}_2$ *l'ensemble* (1.12) (théorème 1.9).

Les résultats obtenus dans le premier chapitre sur la sphère unitaire $S = S(0, 1)$ s'étendent facilement à une sphère quelconque $S(x_0, r) \subset E$. Par exemple, on peut donner au théorème 1.1 l'extension suivante: *Si* F_1 *est une face de la sphère* $S(x_0, r)$, *il existe un point extrême de la sphère unitaire* S^* *tel que* $F_1 = \{ x \mid f_1(x - x_0) = r, \| x - x_0 \| = r \}$, *etc.*

Le second chapitre est consacré à la résolution du problème de l'unicité du polynôme de meilleure approximation dans des espaces de Banach quelconques.

Soit E un espace linéaire normé réel quelconque, soient

$$x_1, \ldots, x_n \quad (1 \leqslant n < \infty) \tag{2.1}$$

n éléments linéairement indépendants de E et soit $x \in E$. On appelle *polynôme de meilleure approximation de l'élément* x (désigné brièvement par: pol. de m.a.) tout « polynôme »

$$q = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$$

jouissant de la propriété:

$$\| x - q \| = \inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \| x - \alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_n x_n \| . \tag{2.4}$$

On sait [1] que pour tout élément $x \in E$ *il existe* au moins un pol. de m.a. Le problème de l'unicité du pol. de m.a. est le suivant: *A quelles conditions doivent satisfaire les éléments* (2.1) *pour que chaque élément* $x \in E$ *ait un seul pol. de m.a.?*

Dans les cinquante années écoulées depuis les premiers résultats obtenus, une série de mathématiciens, parmi lesquels E. Borel, M. Fréchet, L. Tonelli, A. Haar, N. I. Ahiezer, M. G. Krein, A. N. Kolmogorov et autres, se sont occupés de la résolution du problème de l'unicité du pol. de m.a. pour différents cas particuliers. Dans toute sa généralité, le problème a été posé, en 1940, par N. I. Ahiezer [1]. Le seul essai pour résoudre ce problème dans des espaces de Banach quelconques a été fait, en 1952, par K. Tatarkiewicz [30]. La solution proposée par lui ne manque pas d'intérêt, spécialement pour sa forme géométrique, mais ne peut être considérée satisfaisante au point de vue de l'utilité pratique, puisqu'elle ne rend certains résultats particuliers importants et connus, comme par exemple le théorème de A. Haar [14]. Cela provient du fait que le théorème de K. Tatarkiewicz n'utilise que les éléments de l'espace E, mais dans le théorème de A. Haar, par exemple, un rôle essentiel revient à la notion de « valeur d'une fonction continue en un point », qui ne peut pas s'exprimer seulement à l'aide des éléments de l'espace des fonctions continues.

Dans le second chapitre du présent travail, l'Auteur résout le problème de l'unicité du pol. de m.a. dans des espaces de Banach quelconques, donnant des conditions nécessaires et suffisantes, dont on retrouve tous les résultats particuliers connus et l'on obtient aussi des résultats particuliers nouveaux. *Il utilise, dans ce but, aussi bien les éléments de l'espace E que les éléments de l'espace adjoint* E^*. Différemment de K. Tatarkiewicz, qui emploie seulement des méthodes géométriques, l'Auteur combine certaines méthodes géométriques, — plus simples que celles de K. Tatarkiewicz — avec des méthodes analytiques, utilisant les résultats du premier chapitre de ce travail, ainsi que ceux de [27] et [28].

Le résultat principal est le théorème suivant:

Théorème 2.2. *Pour que tout élément $x \in E$ ait un seul polynôme de meilleure approximation, il est nécessaire et suffisant que, $f_1, \ldots, f_n$ étant des points extrêmes quelconques non opposés de la sphère S^*, il n'existe pas des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ avec $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1$, tels que:*

$$(A_2)\quad (\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n)(x_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$(B_2)\quad \text{pour un polynôme } p_0 \neq 0$$

$$\bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{x \mid f_i(x) = \operatorname{sgn} \lambda_i, \ \|x\| = 1, \ \|x + p_0\| = 1\} \neq 0.$$

A partir du théorème 2.2, on retrouve facilement le théorème de N. I. Ahiezer sur l'unicité du pol. de m.a. dans des espaces strictement normés [1] ainsi que le théorème de A. Haar sur l'unicité du pol. de m.a. dans l'espace $C(\mathfrak{M})$ de toutes les fonctions continues sur l'ensemble borné et fermé $\mathfrak{M}$ d'un espace euclidien de dimensions quelconques [14]. Bien mieux, appliquant le théorème 2.2, l'Auteur obtient la généralisation suivante du théorème de A. Haar: *Si E est un espace de type C, pour que toute fonction $x(t) \in E$ ait un seul pol. de m.a., il est nécessaire et suffisant que les fonctions* (2.1) *forment un système de Tchébychef* (théorème 2.3). Dans le même ordre d'idées, l'Auteur généralise la notion de système de Tchébychef pour les espaces de Banach quelconques. De même, il généralise le problème de l'interpolation pour les espaces de Banach quelconques et il montre le rapport de ce problème avec celui de l'unicité du pol. de m.a. (théorème 2.4).

L'Auteur étudie de manière plus détaillée le problème de l'unicité du pol. de m.a. pour le cas particulier où $n = 1$ (théorèmes 2.5, 2.6, 2.7 et 2.8). Un autre résultat obtenu par l'Auteur, également par l'application du théorème 2.2, est le suivant: *Si $E = L(<a, b>)$ et $n = 1$, il n'existe aucun élément $x_1 \in E$ tel que tout élément $x \in E$ ait un seul polynôme αx_1 de meilleure approximation* (théorème 2.7).

Finalement, l'Auteur donne une généralisation du problème de l'unicité du pol. de m.a. et une interprétation géométrique de cette généralisation.

BIBLIOGRAFIE

1. Ahiezer N. I., *Lekţii po teorii approksimaţii.* Gostehizdat, Harkov, 1940.
2. Alaoglu L., *Weak topologies of normed linear spaces.* Ann. of Math., 1940, vol. 41, p. 252–267.
3. Arens R. F. a. Kelley J. L., *Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff space.* Trans. Amer. Math. Soc., 1947, vol. 62, p. 449–508.
4. Ascoli G., *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari.* Ann. di Mat., 1932, t. 10, p. 33–81.
5. Bernstein S., *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle.* Paris, 1926.
6. Borel L., *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes.* Paris, 1905.
7. Clarkson J. A., *Uniformly convex spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., 1936, vol. 40, p. 396–414.
8. — *A characterization of C-spaces.* Ann. of Math., 1947, vol. 48, p. 845–850.
9. Eilenberg S., *Banach space methods in topology.* Ann. of Math., 1942, vol. 43, p. 568–579.

10. Fréchet M., *Sur l'approximation des fonctions par des suites trigonométriques limitées.* C.R. Acad. Sci. Paris, 1907, t. 144, p. 124—125.
11. Fullerton R. E., *A characterization of L-spaces.* Fund. Math., 1951, t. 38, p. 127—136.
12. Ghika Al., *Mulțimi extremale și hiperplane de sprijin maximale.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, t. VII, nr. 1, ianuarie-martie 1955, p. 59—64.
13. Gonciarov V. L., *Teoria interpolirovania i priblijenia funkții.* Moscova, 1954.
14. Haar A., *Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen.* Math. Ann., 1918, t. 78, p. 294—311.
15. Jackson D., *On functions of closest approximation.* Trans. Amer. Math. Soc., 1921, vol. 22, p. 117—128.
16. — *Note on a class of polynomials of approximation.* Trans. Amer. Math. Soc., 1921, vol. 22, p. 320—326.
17. Kolmogorov A. N., *Zamecianie po povodu mogocilenov P.L. Cebîșeva, naimenee ukloniaiușcihsia ot zadannoi funkții.* Usp. Mat. Nauk., 1948, t. III, fasc. I (23), p. 216—221.
18. Krein M. a. Milman D., *On extreme points of regularly convex sets.* Studia Math., 1940, t. 9 (I), p. 133—138.
19. Krein M. a. Șmulian V., *On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space.* Ann. of Math., 1940, vol. 41, p. 556—583.
20. Liusternik L. A. i Sobolev V. I., *Elementi funkționalnogo analiza.* Gostehizdat, Moscova-Leningrad, 1951.
21. Markoff A. A., *On mean values and exterior densities.* Mat. sbornik, 1938, t. 4, p. 165—191.
22. Mazur S., *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen.* Studia Math., 1933.
23. Morozov M. I., *O nekotorîh voprosah ravnomernogo priblijenia neprerivnîh funkții posredstvom funkții interpoliaționnîh klassov.* Izv. Akad. Nauk SSSR, 1952, t. 16, p. 75—100.
24. Nicolescu M., *Sur la meilleure approximation d'une fonction donnée par les fonctions d'une famille donnée.* Bul. Fac. Șt. Cernăuți, 1938, vol. 12, p. 120—128.
25. Pólya G., *Sur un algorithme toujours convergent pour obtenir les polynômes de meilleure approximation de Tchébychef pour une fonction continue quelconque.* C.R. Ac. Sci. Paris, 1913, t. 157, p. 840—843.
26. Popoviciu T., *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (I), Mathematica, 1936, vol. 12, p. 82—92.
27. Singer I., *Sur l'extension des fonctionnelles linéaires.* Rev. de Math., 1956, nr. 1 (sub tipar).
28. — *Asupra reprezentării concrete a spațiilor Banach.* Bul. științ. Acad. R.P.R., secțiunea de științe matematice și fizice, t. VIII, nr. 1, ianuarie-martie 1956 (sub tipar).
29. Tatarkiewicz K., *Quelques remarques sur la convexité des sphères.* Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, 1952, vol. 6, p. 19—30.
30. — K., *Une théorie généralisée de la meilleure approximation.* Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, 1952, vol. 6, p. 31—46.
31. Tonelli L., *I polinomi d'approssimazione di Tchébychev.* Ann. di Mat., 1908, seria a III-a, t. 15, p. 47—119.
32. Tornheim I., *On n-parameter families of functions and associated convex functions.* Trans. Amer. Math. Soc., 1950, vol. 69, p. 547—567.
33. Zuhoviți ki S. I., *Pro minimalne nablijenia sistemi nesumisnih liniinih rivnian v zviazku z deiakimi inșimi minimum-problemami.* Zbirnik praț Inst. Mat. Akad. nauk URSR, 1939, nr. 3, p. 73—75.
34. Young J. W., *General theory of approximation by functions involving a given number of arbitrary parameters.* Trans. Amer. Math. Soc., 1907, vol. 8, p. 331—344.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 1—2, 1956

ALGEBRE CU RADICAL, ASOCIATIVE ŞI COMUTATIVE, ŞI FUNCŢII MONOGENE *)

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

1. *Introducere.* În lucrarea de faţă ne vom ocupa de algebre liniare, asociative şi comutative, de ordin finit, cu radical, definite pe corpul numerelor reale (R). Dacă elementele bazei sînt

$$1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \tag{1}$$

cu legile de înmulţire date de

$$\theta_1 \theta_i = \sum_{k=0}^{n} a_{1ik}\, \theta_k \qquad (\theta_0 = 1) \tag{2}$$

care după cum se ştie[14] o definesc complet, deoarece celelalte produse $\theta_j\, \theta$ ($j \neq 1$) sînt consecinţe ale lui (2), faptul că algebra considerată are radica înseamnă că ecuaţia caracteristică a lui θ_1

$$\begin{vmatrix} -\theta_1 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ a_{110} & a_{111} - \theta_1 & a_{112} \cdots & a_{11n} \\ a_{120} & a_{121} & a_{122} - \theta_1 \ldots & a_{12n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n0} & a_{1n1} & a_{1n2} \cdots & a_{1nn} - \theta_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

are cel puţin o rădăcină multiplă. Într-o lucrare anterioară [14] am întreprins un studiu sistematic al algebrelor definite de (2), unde era presupus în mod permanent că ecuaţia (3) are toate rădăcinile simple, adică algebra definită de (2) era semisimplă, evitînd cazul de care ne ocupăm acum.

Cum o parte din rezultatele obţinute în [14] se menţin şi pentru algebrele cu radical, aici nu ne vom ocupa decît de problemele specifice algebrei considerate. Lucrarea cuprinde şi rezultate care n-au fost prezentate în [14], dar care sînt valabile şi pentru algebrele semisimple.

În partea a doua a lucrării punem probleme, care nu sînt conţinute în titlu şi privesc algebrele definite de (2) fără nici o restricţie asupra ecuaţiei (3). Astfel, vom stabili sistemele de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, a căror rezolvare conduce la funcţii monogene în algebră, făcînd o separaţiune netă între

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 1 decembrie 1955.

sistemele care conduc la algebre finite sau la algebre infinite cu sensul dat acestei noţiuni în [15]. În ultima parte a lucrării ne ocupăm de funcţii poligene în algebrele definite de (2), reuşind să extindem principalele rezultate obţinute de E. K a s n e r [9], [10] în această direcţie pentru algebra numerelor complexe.

În încheiere, ne ocupăm de funcţii monogene în sensul general dat de F e o d o r o v [8], [12] arătînd că natura ecuaţiior diferenţiale cu coeficienţi variabili care se ataşează algebrei, verificate de funcţiile conjugate, depinde de structura algebrei şi nu de funcţiile ce intervin, cel puţin pentru algebrele de ordinul doi considerate.

2. *Proprietăţi generale.* Ne vom ocupa aşadar de algebre definite de (2), pentru care ecuaţia (3) are cel puţin o rădăcină multiplă de ordinul m. În acest caz toate ecuaţiile caracteristice ale elementelor bazei θ_k au rădăcini multiple cel puţin în acelaşi număr şi cel puţin de acelaşi ordin de multiplicitate, rădăcini care sînt puse în corespondenţă cu rădăcinile ecuaţiei (3) prin relaţiile (2). Într-adevăr, putem rezolva sistemul (2) considerînd pe θ_1 arbitrar:

$$\theta_k = \frac{D_k}{D} \tag{4}$$

cu

$$D_k = -\begin{vmatrix} a_{122} - \theta_1 \dots a_{12,k-1} & a_{120} + a_{121}\theta_1 & a_{12,k+1} \dots a_{12n} \\ a_{132} \quad \dots a_{13,k-1} & a_{130} + a_{131}\theta_1 & a_{13,k+1} \dots a_{13}{}^n \\ \dots\dots\dots\

Norma este nulă pentru punctele ω situate pe varietăţile divizorilor lui zero de ecuaţii

$$x_0 + \mu_{1k}x_1 + \mu_{2k}x_2 + \ldots + \mu_{nk}x_n = 0, \quad (k = 0, m, m+1, \ldots, n). \tag{6}$$

Intersecţiile varietăţilor divizorilor lui zero

$$\mathcal{J}_s^* = \mathcal{J}_0 \cap \mathcal{J}_m \cap \mathcal{J}_{m+1} \cap \ldots \cap \mathcal{J}_{s-1} \cap \mathcal{J}_{s+1} \cap \ldots \cap \mathcal{J}_n \tag{7}$$

sînt ideale prime în algebră. $\mathcal{J}_s^*$ sînt varietăţi cu $m-1$ dimensiuni, dacă μ_{10} este real şi varietăţi cu $2m-2$ dimensiuni, dacă μ_{10} este imaginar.

Dacă notăm cu $\mathcal{J}^*$ intersecţia

$$\mathcal{J}^* = \mathcal{J}_0 \cap \mathcal{J}_m \cap \mathcal{J}_{m+1} \cap \ldots \cap \mathcal{J}_n \tag{8}$$

se vede că $\mathcal{J}^*$ este radicalul în algebră. Pentru orice număr $\tau \in \mathcal{J}^*$ avem

$$\tau^\alpha = 0, \quad (\alpha \leqslant m).$$

Se poate deduce de aici imediat cum se construieşte radicalul în algebră cînd ecuaţia (3) are mai multe rădăcini multiple, de diferite ordine de multiplicitate. Ca şi în (8) se ia intersecţia tuturor varietăţilor divizorilor lui zero distincte. Prin urmare, numerele τ pentru care avem $\tau^\alpha = 0$ se găsesc în subspaţiul lui ω

$$x_0 + \mu_{1k}x_1 + \ldots + \mu_{nk}x_n = 0 \qquad (k = 0, m, m+1, \ldots, n)$$

şi sînt de forma

$$\tau_i = \omega \cdot \frac{C_i(\theta_i)}{(\theta_i - \mu_{i0})} t, \quad (t < m),$$

unde am notat cu $C_i(\theta_i)$ ecuaţia caracteristică a lui θ_i, iar cu μ_{i0} rădăcina multiplă de ordinul m, corespunzătoare. Indexul α este dat de soluţiile întregi, ale ecuaţiei

$$\alpha m - \alpha t \geqslant m, \qquad (1 \leqslant t \leqslant m-1).$$

Varietăţile liniare, pe care se găsesc numerele τ_i, sînt date, pentru τ_1, de exemplu, de

$$x_0 + \mu_{1k}x_1 + \ldots + \mu_{nk}x_n = 0, \quad (k = 0, m, m+1, \ldots, n)$$

şi

$$\frac{\partial^s}{\partial \mu_{10}^s}(x_0 + \mu_{10}x_1 + \ldots + \mu_{n0}x_n) = 0, \quad (s = 1,2,\ldots m-t-1),$$

unde μ_{k0} sînt exprimate cu ajutorul lui μ_{10} prin intermediul relaţiilor (4).

Forma exponenţială a unui număr din algebră se menţine, ţinîndu-se seama de multiplicitatea rădăcinilor μ_{k0}.

Într-adevăr

$$N[\exp(\theta_1\varphi_1)] = \exp\left[\left(\sum_{i=0}^{n}\mu_{1i}\right)\varphi_1\right],$$

deci

$$N[\exp(\theta_1\varphi_1 + \theta_2\varphi_2 + \ldots + \theta_n\varphi_n)] = \exp\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}\mu_{ki}\right)\varphi_k\right]$$

în suma din partea a doua, fiecare rădăcină μ_{ki} intervenind cu ordinul ei de multiplicitate.

Dacă ecuaţiile caracteristice ale elementelor bazei au urma nulă, atunci numărul hipercomplex

$$\tau = \exp(\theta_1 \varphi_1 + \ldots + \theta_n \varphi_n)$$

are norma egală cu unitatea, încît obţinem imediat forma exponenţială a unui număr din algebră

$$\omega = N^{\frac{1}{n+1}}(\omega) \exp(\theta_1 \varphi_1 + \ldots + \theta_n \varphi_n)$$

cu $N(\omega)$ dat de (5).

Dacă ne propunem să găsim perioadele funcţiei exp ω, adică să găsim numerele η din algebră

$$\eta_i = c_0 + c_1 \theta_1 + \ldots + c_n \theta_n,$$

pentru care avem

$$\exp(2\pi\eta) = 1,$$

sîntem conduşi la următorul sistem

$$c_0 + c_1 \mu_{1j} + \ldots + c_n \mu_{nj} = \sqrt{-1}\, k_j, \quad (k_j \text{ întreg}) \quad (j = 0, m, m+1, \ldots, n)$$

completat cu

$$\frac{d^\alpha}{d\mu_1^\alpha}\left[-\sqrt{-1}\, k_0 + c_0 + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_n c_n\right]_{\mu_i = \mu_{io}} = 0, \ (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1),$$

unde μ_k sînt daţi de (4) şi în operaţia de derivare k_0 şi c_i sînt consideraţi constanţi. Constantele c_k astfel obţinute sînt funcţii liniare de numerele întregi arbitrare k_j, cu coeficienţi complecşi.

3. *Funcţii monogene în algebră.* Fie $f(\omega) = U_0 + \theta_1 U_1 + \ldots + \theta_n U_n$ o funcţie de variabila ω

$$\omega = x_0 + \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n.$$

Condiţiile de monogeneitate se obţin anulînd diferenţiala exterioară

$$d[f(\omega)\, d\omega] = 0$$

şi conduc la $n(n+1)$ relaţii între funcţiile conjugate U_i date de

$$\mu_{jk}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_0}\right) = \frac{\partial U_0}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, (k = 0, m, m+1, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n) \quad (9)$$

în număr de $(n - m + 2) \cdot n$ şi la

$$\frac{\partial s}{\partial \mu_1^s}\left[\mu_1\left(\frac{\partial U_0}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial U_i}{\partial x_0}\right) - \frac{\partial U_0}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right] = 0, \ \mu_1 = \mu_{10} \quad (9')$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m-1), \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

în număr de $(m-1).n$, unde μ_i sînt daţi tot de (4) înlocuindu-se θ_i cu μ_i.

Dacă nu pornim de la relaţiile de compoziţie (2), ci de la ecuaţia caracteristică

$$\theta^{n+1} + \lambda_1 \theta^n + \ldots + \lambda_n \theta + \lambda_{n+1} = 0,$$

pe care o presupunem că are rădăcina μ_0, rădăcina multiplă de ordinul m, atunci condiţiile (9) şi (9′) devin

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_k^{i+j} \frac{\partial U_i}{\partial x_0} + \sum_{i=0}^{n} \mu_k^i \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad \begin{matrix}(k = 0,\ m,\ m+1,\ldots,n)\\ (j = 1,2,\ldots,n)\end{matrix} \tag{9*}$$

$$\frac{\partial^s}{\partial \mu_0^s}\left(\sum_{i=0}^{n} \mu_0^{i+j} \frac{\partial U_i}{\partial x_0} - \sum_{i=0}^{n} \mu_0^i \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right) = 0, \quad \begin{matrix}(s = 1,2,\ldots,m-1)\\ (j = 1,2,\ldots,n)\end{matrix} \tag{9′*}$$

Pentru o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale, algebra se asociază prin ecuaţia caracteristică [13], [16], [17], în schimb, pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale, în general, algebra este introdusă prin relaţiile de compoziţie (2). Pentru acest motiv, dăm condiţiile de monogeneitate şi în cazul cînd ecuaţia caracteristică are rădăcini multiple.

Astfel, dacă ecuaţia caracteristică este

$$(\theta - \alpha)^{n+1} = 0, \tag{10}$$

condiţiile (9*) şi (9′*) devin

$$\frac{\partial^s}{\partial \alpha^s}\left[\sum_{i=0}^{n} \alpha^{i+j} \frac{\partial U_i}{\partial x_0} - \sum_{i=0}^{n} \alpha^i \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right] = 0, \quad \begin{matrix}(s = 0,1,\ldots,n)\\ (p = 1,2,\ldots,n)\end{matrix}, \tag{9**}$$

iar pentru ecuaţia caracteristică

$$(1 + \theta^2)^{n+1} = 0, \tag{11}$$

ataşată ecuaţiei lui Laplace iterată de $n+1$ ori, avem condiţiile de monogeneitate

$$\frac{\partial^s}{\partial \mu^s}\left[\sum_{j=0}^{2n+1} \mu^{j+k} \frac{\partial U_k}{\partial x_0} - \sum_{j=0}^{2n+1} \mu^j \frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right]_{\substack{\mu=\sqrt{-1}\\ \mu=-\sqrt{-1}}} = 0, \quad (s = 0,1,\ldots,n). \tag{9***}$$

În sfîrşit, dacă variabila ω are forma redusă

$$\omega = x + \theta y$$

atunci relaţiile (9**) devin pentru $\alpha = 0$

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x} = \frac{\partial U_{k+1}}{\partial y},$$

care pentru $n = 1$ sînt condiţiile de monogeneitate în algebra dual㠓 [18].

Pentru ecuaţia lui Laplace, iterată de $n+1$ ori, condiţiile devin

$$\frac{\partial U_{2k}}{\partial x} = \frac{\partial U_{2k+1}}{\partial y} \qquad (k = 0,1,\ldots,n)$$

$$\frac{\partial U_{2k-1}}{\partial x} - \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} \frac{\partial U_{2n+1}}{\partial x} = \frac{\partial U_{2k}}{\partial y}, \quad (k = 1,2,\ldots,n)$$

şi

$$\frac{\partial U_{2n+1}}{\partial x} + \frac{\partial U_0}{\partial y} = 0,$$

iar funcţiile U_k sînt poliarmonice de ordinul $n+1$.

Faptul că un număr hipercomplex ω are forma exponențială

$$\omega = \rho \exp\ (\theta_1 \varphi_1 + \theta_2 \varphi_2 + \ldots + \theta_n \varphi_n)\,,\ \rho = \overline{N^{n+1}}\ (\omega)$$

independent de structura algebrei, urmează că față de ρ și φ_i condițiile de monogeneitate au aceeași formă în algebrele semisimple sau cu radical. Aceste condiții sînt

$$\frac{1}{\theta_i}\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi_j}.$$

Dacă $U_0, U_1, \ldots, U_n$ sînt componentele unei funcții monogene, se poate arăta că

$$V_i = \rho \frac{\partial U_i}{\partial \rho}$$

sînt de asemenea funcții conjugate. Din relația

$$\frac{df}{d\omega} = \exp\ [-(\theta_1 \varphi_1 + \theta_2 \varphi_2 + \ldots + \theta_n \varphi_n)]\ \frac{\partial f}{\partial \rho}$$

se deduce

$$\omega \frac{df}{d\omega} = \rho \frac{\partial f}{\partial \rho}$$

și $\rho \dfrac{\partial f}{\partial \rho}$ este monogenă, deoarece $\omega \dfrac{df}{d\omega}$ este monogenă.

Pentru ecuația lui Laplace iterată de $n+1$ ori

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{n+1} U = 0 \tag{12}$$

este mai comod să se ia variabila ω sub forma

$$\omega = x + iy + \varepsilon\ (x - iy)$$
$$i^2 + 1 = 0$$
$$\varepsilon^{n+1} = 0.$$

Se vede imediat că o funcție monogenă de ω verifică ecuația (12), deoarece

$$[(1+\varepsilon)^2 + (i - i\varepsilon)^2]^{n+1} = (4\,\varepsilon)^{n+1} = 0.$$

Avem deci

$$f(\omega) = f(z + \varepsilon \bar{z})$$

și dezvoltînd în jurul lui z

$$f(\omega) = f(z) + \varepsilon \frac{\bar{z}}{1!} f'(z) + \ldots + \varepsilon^n \frac{\bar{z}^n}{n!} f^{(n)}(z)\,. \tag{13}$$

Dacă $f(z)$ este olomorfă într-un cerc cu centrul în origine, se poate arăta că orice soluție regulată a ecuației (12) se poate deduce din relația (13). Într-adevăr fie $P_s(x,y)$ un polinom poliarmonic de grad s

$$P_s(x, y) = \sum_{m+n=s} a_{mn}\, x^m\, y^n\,.$$

Polinomul depinde de

$$s + 1 - (s - 2n - 1) = 2n + 2$$

parametri arbitrari. Să considerăm funcţia

$$\lambda_s \omega^s = \lambda_s (z + \varepsilon \bar{z})^s ,$$

unde

$$\lambda_s = a_0^{(s)} + \varepsilon a_1^{(s)} + \ldots + \varepsilon^n a_n^{(s)}, \left(a_k^{(s)} = \alpha_k^{(s)} + i \beta_k^{(s)}\right)$$

şi, după cum se vede, λ_s depinde de $2n + 2$ parametri arbitrari $\alpha_k^{(s)}$ şi $\beta_k^{(s)}$.

În virtutea acestui fapt, λ_s este unic determinat de identitatea

$$\sum_{m+n=s} a_{mn} x^m y^n \equiv [\text{Real} + \text{Imag}] [\varphi_0 (z, \bar{z}) + \ldots + \varphi_n (z, \bar{z})],$$

unde am notat

$$\lambda_s \omega^s = \varphi_0^{(s)} (z, \bar{z}) + \varepsilon \varphi_1^{(s)} (z, \bar{z}) + \ldots + \varepsilon^n \varphi_n^{(s)} (z, \bar{z}),$$

deci se poate găsi, în general, un şir de numere în algebră

$$\lambda_0, \lambda_1 \ldots, \lambda_p, \ldots$$

astfel încît să avem, pentru o soluţie regulată $U(x, y)$ a ecuaţiei lui Laplace iterată de $n + 1$ ori,

$$U (x, y) = \sum_{\substack{k=0 \\ m+n=k}}^{\infty} a_{mn} x^m y^n ,$$

identitatea

$$U (x, y) \equiv (\text{Real} + \text{Imag}) \left[\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \varphi_k^{(s)} (z, \bar{z}) \right] \tag{14}$$

Din relaţia (14) se poate deduce atît dezvoltarea lui A l m a n s i [1] cît şi unicitatea ei. Într-adevăr, nu avem decît să grupăm în produsul

$$\bar{z}^k f^{(k)} (z) = \bar{z}^k \left(\sum_0^{\infty} c_m z^m \right),$$

pentru $m > k$, în modul următor:

$$c_m \bar{z}^k z^m = c_m r^{2k} z^{m-k}$$

şi pentru $m < k$

$$c_m \bar{z}^k z^m = c_m r^{2m} \bar{z}^{k-m}$$

şi înlocuind în (14) se obţine

$$U (x, y) = U_0 + r^2 U_1 + \ldots + r^{2n} U_n$$

cu U_k funcţii armonice regulate provenind fie din

$$c_m z^{m-k}, \qquad (k < m),$$

fie din

$$c_m \bar{z}^{k-m}, \qquad (k > m).$$

Am arătat că lui $U(x, y)$ îi corespunde *un* $f(\omega)$, deci și *un* $f(z)$. De aici rezultă și unicitatea soluției, iar din (14) urmează că funcțiile U_k se obțin după o regulă bine determinată.

Să considerăm acum o funcție analitică oarecare

$$U(x, y) = \sum_0^\infty a_{mn}\, x^m\, y^n,$$

cu o regiune de convergență conținînd mai mult decît un punct.

Să punem

$$x = \frac{x + iy}{2} + \frac{x - iy}{2} = z + \bar{z}$$

$$y = \frac{x + iy}{2i} - \frac{x - iy}{2i} = \zeta + \bar{\zeta} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

deci avem identic

$$U(x, y) \equiv U(z + \bar{z},\ \zeta + \bar{\zeta}).$$

Dezvoltînd partea a doua în jurul lui z, ζ

$$U(x, y) = U(z, \zeta) + \frac{1}{1!}\left(\bar{z}\frac{\partial}{\partial z} + \bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) U(z, \zeta) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\bar{z}\frac{\partial}{\partial z} + \bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^{(n)} U(z, \zeta) + \ldots \qquad (15)$$

Considerînd cercurile asociate de convergență ale seriei din partea a doua reprezentate în același plan complex, ele sînt concentrice, și cel mai mic reprezintă regiunea unde $U(x, y)$ este suma seriei din partea a doua. Avem deci neapărat în acest cerc

$$U(x, y) \equiv \text{Real}\left[U(z, \zeta) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\bar{z}\frac{\partial}{\partial z} + \bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^{(n)} U(z, \zeta) + \ldots\right]$$

și

$$\text{Imag}\left[U(z, \zeta) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\bar{z}\frac{\partial}{\partial z} + \bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^{(n)} U(z, \zeta) + \ldots\right] \equiv 0.$$

Folosind raționamentul precedent se observă ușor că putem scrie

$$U(x, y) = \sum_0^\infty r^{2k}\, U_k(x, y)$$

cu

$$r^2 = x^2 + y^2$$

și $U_k(x, y)$ funcții armonice. Am obținut astfel dezvoltarea dată de N. C i o r ă n e s c u [4] a unei funcții analitice după puterile lui r^2 cu coeficienți funcții armonice regulate. Rezultatul astfel obținut se extinde la o funcție analitică de un număr par de variabile $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_p, y_p$,

$$U(x_1, y_1, \ldots, x_p, y_p) = \sum_{\substack{0 \\ \alpha_i, \beta_i}}^\infty a_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_p, \beta_p}\, x_1^{\alpha_1},\ y_1^{\beta_1} \ldots x_p^{\alpha_p}\, y_p^{\beta_p}.$$

Într-adevăr, punînd

$$z_1 = \frac{x_1 + iy_1}{2}, \quad \bar{z}_1 = \frac{x_1 - iy_1}{2}$$

$$\zeta_1 = \frac{x_1 + iy_1}{2i}, \quad \bar{\zeta}_1 = \frac{x_1 - iy_1}{-2i}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_p = \frac{x_p + iy_p}{2}, \quad \bar{z}_p = \frac{x_p - iy_p}{2} \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$\zeta_p = \frac{x_p + iy_p}{2i}, \quad \bar{\zeta}_p = \frac{x_p - iy_p}{-2i}$$

avem

$$U(x_1, y_1, \ldots, x_p, y_p) = U(z_1 + \bar{z}_1, \zeta_1 + \bar{\zeta}_1, \ldots, z_p + \bar{z}_p, \zeta_p + \bar{\zeta}_p)$$

şi dezvoltînd în jurul punctului $z_1, \zeta_1, \ldots, z_p, \zeta_p$, obţinem

$$U(z_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_p, y_p) =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1}{n!}\left(\bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{\zeta}_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \ldots + \bar{z}_p \frac{\partial}{\partial z_p} + \bar{\zeta}_p \frac{\partial}{\partial \zeta_p}\right)^{(n)} U(z_1, \zeta_1, \ldots, z_p, \zeta_p).$$

În cercurile asociate de convergenţă, partea a doua are partea imaginară de sumă nulă, iar partea reală are ca sumă pe U. Se vede că putem scrie pe U în modul următor:

$$U(x_1, y_1, \ldots, x_p, y_p) = \sum_0^\infty r_1^{2\alpha_1} r_2^{2\alpha_2} \ldots r_p^{2\alpha_p} U_{\alpha_1, \ldots \alpha_p}(x_1, y_1, \ldots, x_p, y_p) \quad (16)$$

cu

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2$$

şi coeficienţii $U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ funcţii armonice regulate, soluţii ale ecuaţiilor lui Laplace

$$\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

deci funcţii armonice de funcţiile de variabile $(x_1\, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$.

4. *Dezvoltări în serie.* Conform definiţiei monogeneităţii avem

$$\int_\gamma f(\omega)\, d\omega = 0,$$

γ fiind o curbă închisă situată într-un domeniu D din spaţiul lui ω, unde $f(\omega)$ este monogenă şi nu are discontinuităţi. În virtutea acestui fapt avem şi

$$\int_\gamma \omega^n d\omega = 0,$$

Să luăm curba γ situată pe suprafaţa de normă constantă

$$N(\omega) = \rho^{n+1} \qquad (\rho = \text{const.})$$

formată din elemente din curbele $d\,\varphi_k = 0$, pentru care

$$\varphi_k = \varphi_{k,0} \quad (k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n).$$

Curba γ fiind închisă urmează că funcția

$$\exp\, n(\theta_1 \varphi_1 + \ldots + \theta_n \varphi_n)$$

revine la valoarea inițială în două moduri: sau variabilele φ_k au variația nulă și atunci spunem că γ nu înconjoară divizorii lui zero ai variabilei ω, sau variația argumentelor φ_k nu este nulă, atunci această variație este neapărat o perioadă

$$\Delta(\theta_1 \varphi_1 + \ldots + \theta_n \varphi_n) = c(k_1, \ldots, k_p).$$

Printre curbele γ să considerăm aceea pentru care variația Δ este diferită de zero și anume

$$c(1, 1, \ldots, 1)$$

În această situație avem — presupunînd întotdeauna că urma ecuațiilor caracteristice ale elementelor bazei este nulă —

$$\int_\gamma \frac{d\omega}{\omega} = c(1, 1, \ldots, 1).$$

Sau, punînd

$$\omega^* = \frac{\omega}{\rho} = \exp\,(\theta_1 \varphi_1 + \ldots + \theta_n \varphi_n)$$

avem

$$\int_\gamma \omega^{*n}\, d\omega^* = \int_{\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0}^{\varphi_1^1, \varphi_2^1, \ldots, \varphi_n^1} \omega^{*n}\, d\omega^* = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ c(1, \ldots, 1), & n = -1, \end{cases}$$

unde am notat φ_k^0 și φ_k^1 valorile inițiale și finale ale argumentelor φ_k pe curba γ și unde φ_k^1 nu sînt toți nuli, dacă φ_k^0 sînt toți nuli.

Acest rezultat ne permite să obținem imediat, pentru o funcție, mărginita și integrabila, pentru care integralele (18) au sens

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

cu coeficienți în algebră, o dezvoltare de tip Fourier

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \omega^{*k} \qquad (a_k \in A_{n+1}) \tag{17}$$

cu a_k dați de

$$c(1, 1, \ldots, 1)\; a_k = \int_\gamma f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \omega^{*-k-1}\, d\omega^*. \tag{18}$$

Dacă $c(1, 1, \ldots, 1)$ nu este un divizor al lui zero, atunci avem imediat

$$a_k = \frac{1}{c} \int_{\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0}^{\varphi_1^1, \varphi_2^1, \ldots, \varphi_n^1} \frac{f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\omega^{*\,k+1}}\, d\omega^*$$

În regiunea de convergenţă a seriei

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (\omega - a)^n$$

să notăm suma ei cu $f(\omega)$. Avem deci

$$f(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (\omega - a)^n .$$

Ţinînd seama că

$$\int_{(c)} (\omega - a)^n \, d\omega = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ w_{(c)}, & n = -1 \end{cases} \tag{19}$$

Notînd cu (c) familia de curbe din spaţiul lui ω pentru care integrala (19) are valorile 0 sau $w\,(c) = \text{const}$. Integrala (19) are sens şi pentru curbe (c) situate pe varietăţile divizorilor lui zero. Conform unui rezultat obţinut [14]*) urmează că numărul claselor distincte de familii (c) este dat de natura rădăcinilor ecuaţiei (3).

Coeficienţii a_n se determină din

$$\begin{aligned} w_{(c)} \cdot a_n &= \int_c \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^{n+1}} d\omega \\ w_{(c)} \cdot a_{-n} &= \int_c (\omega - a)^{n-1} f(\omega) \, d\omega . \end{aligned} \tag{20}$$

şi dacă expresiile lor nu sînt divizori ai lui zero, atunci obţinem pe $f(\omega)$ printr-o serie de tip Laurent. În caz contrar, obţinem pe $f(\omega)$ înmulţit cu divizorul lui zero respectiv, căruia îi aparţin toţi a_n.

Să aplicăm acest rezultat la algebra asociată la ecuaţia funcţiilor poliarmonice. Trebuie să calculăm coeficienţii dezvoltării

$$f(z + \varepsilon \bar{z}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z + \varepsilon \bar{z})^n ,$$

Avem

$$\int_c \frac{f(z + \varepsilon \bar{z})}{(z + \varepsilon \bar{z})^{p+1}} (dz + \varepsilon \, d\bar{z}) = a_p \int_c \frac{dz + \varepsilon d\bar{z}}{z + \varepsilon \bar{z}} ,$$

c fiind un cerc cu centru în origine şi rază R.

Inversul lui $\omega = z + \varepsilon \bar{z}$ este dat de

$$\frac{1}{z + \varepsilon \bar{z}} = \frac{1}{z} - \varepsilon \frac{\bar{z}}{z^2} + \ldots + (-1)^n \varepsilon^n \cdot \frac{\bar{z}^n}{z^{n+1}}$$

şi

$$\frac{dz + \varepsilon \, d\bar{z}}{z + \varepsilon \bar{z}} = \frac{dz}{z} + \varepsilon \, d\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) + \ldots + (-1)^{n-1} \varepsilon^n \frac{\bar{z}^{n-1}}{z^{n-1}} d\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) ,$$

*) p. 151.

deci

$$\int_c \frac{dz + \varepsilon d\bar{z}}{z + \varepsilon \bar{z}} = 2\pi i .$$

Prin urmare

$$a_p = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\omega)}{\omega^{p+1}} d\omega \tag{21}$$

şi

$$a_{-p} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \omega^{p-1} f(\omega)\, d\omega\,, (\omega = z + \varepsilon \bar{z}) .$$

În această situaţie toţi coeficienţii dezvoltării nu sînt divizori ai lui zero, deci pot fi separaţi. Rezultatul este valabil pentru orice algebră, sumă directă de algebre complexe [14] sau de algebre cu radical provenit numai din rădăcini complexe multiple.

5. *Transformări prin funcţii monogene.* Transformările prin funcţii monogene, în algebre cu radical, se bucură de proprietăţile generale stabilite în [14] *) aşa că nu vom reveni asupra lor. Acum ne vom ocupa de o proprietate specială a lor, care generalizează un rezultat găsit de G. Scheffers [18] pentru algebra dual ă ($\theta^2 = 0$). Pentru aceasta ne vom situa în spaţiul variabilei hipercomplexe

$$\omega = x_0 + \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n ,$$

definită de

$$\begin{aligned} \theta_i\, \theta_j &= \theta_{i+j} \\ \theta_{n+1} &= 1 \end{aligned} \qquad (\text{mod. } n+1)$$

sistemul de numere astfel definit este echivalent cu sistemul următor [6], [5]

$$\omega = x_0 + \theta\, x_1 + \ldots + \theta^n x_n$$

şi

$$\theta^{n+1} = 1.$$

Vom numi în acest spaţiu forma normală a unui n-plan (varietate liniară cu n dimensiuni) ecuaţia

$$x_0 ap_0 + x_1 ap_1 + \ldots + x_n\, ap_n = v, \tag{22}$$

unde

$$ap_i = ap_i\,(u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n)$$

sînt cosinuşii lui Paul Appell, definiţi de relaţia

$$\mathfrak{G} = e^{\theta_1 u_1 + \theta^2 u_2 + \ldots + \theta^n u_n} = ap_0 + \theta\, ap_1 + \ldots + \theta^n ap_n .$$

Norma numărului $\mathfrak{G}$ este unitatea, adică avem

$$N(\mathfrak{G}) = \begin{vmatrix} ap_0 & ap_1 & \ldots & ap_n \\ ap_n & ap_0 & \ldots & ap_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ap_1 & ap_2 & \ldots & ap_0 \end{vmatrix} = 1 . \tag{23}$$

*) p. 157.

Cînd u_i şi v variază, n-planul (22) variază rămînînd n-plan.
Să calculăm derivatele parţiale ale lui v din (22). Deoarece avem

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u_i} = \theta_i \mathfrak{G},$$

urmează că

$$\frac{\partial ap_k}{\partial u_i} = ap_{k-i} \qquad (\text{mod. } n+1),$$

deci

$$\frac{\partial v}{\partial u_i} = x_0\, ap_{n+1-i} + x_1\, ap_{n+2-i} + \ldots + x_n\, ap_{n-i}. \tag{24}$$

În virtutea relaţiei (23) avem următoarea legătură în v şi $\dfrac{\partial v}{\partial u_i}$

$$N(\omega) = N(\Omega), \tag{25}$$

unde am notat

$$\omega = x_0 + \theta x_1 + \ldots + \theta^n x_n$$

şi

$$\Omega = v + \theta \frac{\partial v}{\partial u_1} + \ldots + \theta^n \frac{\partial v}{\partial u_n}.$$

Dacă notăm cu Ap_i minorii lui ap_i din (23), adică

$$\sum_{k=0}^{n} Ap_k\, ap_{k+i} = \begin{cases} 0, & i \neq 0 \\ 1, & i = 0 \end{cases} \qquad (\text{mod. } n+1)$$

se vede imediat că punctul P de coordonate

$$x_i = v.\, Ap_i$$

se găseşte pe n-planul (22). Acest punct este definit ca soluţia sistemului

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[N(\omega) + \lambda(x_0\, ap_0 + x_1\, ap_1 + \ldots + x_n\, ap_n - \nu)\right] = 0 \tag{α}$$

şi

$$x_0\, ap_0 + x_1\, ap_1 + \ldots + x_n\, ap_n = v. \tag{α'}$$

Într-adevăr, notînd cu $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$, minorii lui $x_0, x_1, \ldots, x_n$, din determinantul normei $N(\omega)$, avem

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} x_i\, \Delta_{i+k} = 0 \\ &\qquad\qquad (\text{mod. } n+1) \\ &\sum_{i=0}^{n} x_i\, \Delta_i = 1 \end{aligned} \tag{β}$$

Din sistemul (α), (α') obţinem

$$\lambda = -\, n.\, N(\omega)$$

$$\frac{1}{v}\, ap_0 \cdot \Delta_0 = \frac{1}{v}\, ap_1 \cdot \Delta_1 \ldots = \frac{1}{v}\, ap_n \cdot \Delta_n$$

şi înlocuind în (β) sîntem conduşi la

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \, ap_i = v$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \, ap_{i+k} = 0 \quad (k \neq 0) \text{ (mod. } n+1),$$

deci

$$x_i = \frac{\Delta_i (ap_i)}{\Delta (ap_i)} = Ap_i$$

Condiţiile (α) şi (α') care determină punctul P sînt identice cu condiţiile impuse la un extremum cu legături. În spaţiul variabilei complexe, într-adevăr, OP este minimul distanţei de la origine la dreapta definită de ecuaţia (22), deci în spaţiul lui ω, OP are semnificaţia normalei dusă din O la n-planul (22).

Dreapta OP (O fiind originea axelor) împreună cu următoarele n drepte, care pleacă din P, formează un $n+1$—edru de monogeneitate. Aceste drepte au ecuaţiile

$$(D_k) \qquad \frac{x_0 - vAp_0}{Ap_k} = \frac{x_1 - v\,Ap_1}{Ap_{k+1}} = \ldots = \frac{x_n - vAp_n}{Ap_{k-1}}, \quad (k = 1,2,\ldots,n) \qquad (26)$$

care sînt evident conţinute în n-planul (22), deoarece avem

$$\sum_{i=0}^{n} ap_i \, Ap_{k+i} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Să vedem ce reprezintă relaţiile (24) pe aceste drepte. Un calcul imediat ne arată că pe dreapta D_{n+1-i} avem

$$\frac{x_j - vAp_j}{Ap_{n+1-i+j}} = \rho = \frac{\partial v}{\partial u_i},$$

deci în metrica spaţiului ω, $\dfrac{\partial v}{\partial u_i}$ este un segment orientat situat pe dreapta D_{n+1-i}, care face parte din $n+1$-edru de monogeneitate construit mai sus, de lungime $\dfrac{\partial v}{\partial u_i}$, cu o extremitate în punctul P.

Să căutăm acum sensul unei expresii de forma următoare:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial v}{\partial u_k}.$$

Este uşor de verificat că reprezintă un segment de dreapta, cu originea în P, situat pe dreapta

$$\frac{x_0 - vAp_0}{\sum_{k=1}^{n} m_k \, Ap_k} = \frac{x_1 - vAp_1}{\sum_{k=1}^{n} m_k \, Ap_{k+1}} = \ldots = \frac{x_n - v\,Ap_n}{\sum_{k=1}^{n} m_k \, Ap_{k-1}} \qquad (26')$$

situată de asemenea pe n-planul (22).

Să revenim la n-planul dat de (22). *Ne propunem să găsim transformările*

$$U_i = U_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$
$$V = V(u_1, u_2, \ldots, u_n, v),$$

astfel ca atunci cînd n-planul variază, rămînînd tot n-plan, segmentele pe $n+1$-edru de monogeneitate, $\frac{\partial v}{\partial u_i}$, să rămînă invariante. Printr-o astfel de transformare, o familie de n-suprafețe, se transformă într-o familie de n-suprafețe, care au proprietatea că n-planul tangent la prima familie se transformă în n-plan tangent la familia transformată, dreptele (26) *și* (26′) *transformîndu-se tot în drepte pe n-planul transformat cu mențiunea că segmentele considerate pe aceste drepte se transformă în segmente egale (în metrica spațiului ω), pe dreptele transformate.* Relațiile

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial U_i} dU_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial u_i} du_i + \frac{\partial V}{\partial v} dv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial u_i} du_i + \frac{\partial V}{\partial v}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial u_i} du_i\right)$$

$$dU_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial u_j} du_j + \frac{\partial U_i}{\partial v} dv = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial u_j} du_j + \frac{\partial U_i}{\partial v}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial u_i} du_i\right)$$

ne conduc la următorul sistem, care determină pe $\frac{\partial V}{\partial U_i}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial U_i}\left(\frac{\partial U_i}{\partial u_j} + \frac{\partial U_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u_j}\right) = \frac{\partial V}{\partial u_j} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u_j}, \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

încît, pentru a răspunde problemei puse, trebuie să avem, oricare ar fi α_i,

$$\frac{D_i(\alpha_i)}{D(\alpha_i)} - \frac{D_i(0)}{D(0)} = \alpha_i, \tag{27}$$

unde am notat

$$D(\alpha_i) = \left\| \frac{\partial U_k}{\partial u_j} + \frac{\partial U_k}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial u_j} + \delta_{ij}\alpha_i\right) \right\|,$$

elementele unei linii a determinantului formîndu-se, variind k de la 1 la n, iar δ_{ij} fiind simbolul lui Kronecker.

Determinantul $D_i(\alpha_i)$ se obține din $D(\alpha_i)$ înlocuind coloana i cu

$$\frac{\partial V}{\partial u_j} + \frac{\partial V}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial u_j} + \delta_{ij}\alpha_i\right), \qquad (j = 1, 2,\ldots,n).$$

Trebuie să avem, așadar, identitățile:

$$D(0) D_i(\alpha_i) - D(\alpha_i) D_i(0) = \alpha_i D(0) D(\alpha_i), \qquad (i = 1,2,\ldots,n),$$

oricare ar fi α_i.

În partea a doua avem pe α_i^2 și coeficientul său trebuie să fie nul. Acest coeficient este, cum se poate ușor verifica, determinantul $D(0)$, în care linia i se înlocuiește cu

$$\frac{\partial U_1}{\partial v}, \frac{\partial U_2}{\partial v}, \ldots, \frac{\partial U_n}{\partial v}.$$

Anulînd coeficienții lui α_i^2 obținem un sistem cu necunoscutele $\frac{\partial U_i}{\partial v}$, omogen de

ordinul n, cu determinantul sistemului

$$[D(0)]^{n-1}$$

care nu poate fi identic nul, deoarece în acest caz relația (27) nu mai are sens. Urmează deci, că trebuie să avem

$$\frac{\partial U_i}{\partial v} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{28}$$

Cu această condiție se vede că

$$D(\alpha_i) = D(0),$$

deci relația (27) se scrie

$$D_i(\alpha_i) - D_i(0) = D(0) \cdot \alpha_i$$

sau

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial U_{i+1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial U_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial U_{i+1}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial U_n}{\partial x_2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial U_2}{\partial x_{i-1}} & \ldots & \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x_{i-1}} & 0 & \frac{\partial U_{i+1}}{\partial x_{i-1}} & \ldots & \frac{\partial U_n}{\partial x_{i-1}} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_i} & \frac{\partial U_2}{\partial x_i} & \ldots & \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x_i} & \frac{\partial V}{\partial v} & \frac{\partial U_{i+1}}{\partial x_i} & \ldots & \frac{\partial U_n}{\partial x_i} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_{i+1}} & \frac{\partial U_2}{\partial x_{i+1}} & \ldots & \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x_{i+1}} & 0 & \frac{\partial U_{i+1}}{\partial x_{i+1}} & \ldots & \frac{\partial U_n}{\partial x_{i+1}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_n} & \frac{\partial U_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x_n} & 0 & \frac{\partial U_{i+1}}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial U_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = D(0), \tag{29}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

din care deducem

$$\frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{30}$$

și

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_{i+k}} = 0 \qquad (k \neq 0); \tag{31}$$

condiții suficiente pentru ca relațiile (29) să fie satisfăcute.

Însă condițiile (28), (30) și (31) sînt conținute în condițiile de monogeneitate ale unei funcții hipercomplexe

$$f(\omega) = U_1 + \varepsilon U_2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} U_n + \varepsilon^n V,$$

monogenă în raport cu variabila

$$\omega = u_1 + \varepsilon u_2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} u_n + \varepsilon^n v, \qquad (\varepsilon^{n+1} = 0)$$

cum se poate ușor deduce din (9**) făcînd $\alpha = 0$.

Deci putem afirma că transformarea prin funcţiile monogene în algebra cu element unitate, definită de

$$\varepsilon^{n+1} = 0,$$

păstrează proprietatea enunţată mai sus. Componentele U_i şi V ale transformării se obţin uşor. Într-adevăr

$$f(\omega) = f(u_1 + \varepsilon u_2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} u_n + \varepsilon^n v) =$$

$$= f(u_1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} (\varepsilon u_2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} u_n + \varepsilon^n v)^k f^{(k)}(u_1)$$

şi punînd

$$f^{(k)}(u_1) = f_0^{(k)}(u_1) + \varepsilon f_1^{(k)}(u_1) + \ldots + \varepsilon^n f_n^{(k)}(u_1)$$

obţinem

$$U_1 = f_0(u_1)$$

$$U_2 = f_1(u_1) + u_2 f_0'(u_1)$$

$$U_3 = f_2(u_1) + u_2 f_1'(u_1) + \frac{u_2^2}{2!} f_0''(u_1) + u_3 f_0'(u_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V = f_n(u_1) + u_2 f_{n-1}'(u_1) + \ldots + v f_0'(u_1) + \ldots + \frac{u_2^n}{n!} f_0^{(n)}(u_1)$$

din care, de altfel, se poate deduce proprietatea menţionată.

Să găsim legătura între rezultate obţinute şi algebrele cu radical definite de (2), în situaţia că ecuaţia (3) are o rădăcină reală multiplă de ordinul m. Pentru aceasta să facem transformarea

$$X_i = x_0 + \mu_{1i} x_1 + \ldots + \mu_{ni} x_n, \qquad (i = 0, m, m+1, \ldots, n) \tag{32}$$

$$X_k = \frac{\partial^k}{\partial \mu_{10}^k} (x_0 + \mu_{10} x_1 + \ldots + \mu_{n0} x_n), \; (k = 1, 2, \ldots, m-1)$$

(în operaţia de derivare x_i sînt constante, iar μ_{k0} sînt daţi de (4) în funcţie de μ_{10}).

Din relaţiile (32) obţinem

$$\omega = \alpha_0 X_0 + \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n$$

cu

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}$$

unde

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \mu_{10} & \mu_{20} & \ldots & \mu_{n0} \\ 0 & 1 & \mu_{20}' & \ldots & \mu_{n0}' \\ 0 & 0 & \mu_{20}'' & \ldots & \mu_{n0}'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \mu_{20}^{(m-1)} & \ldots & \mu_{n0}^{(m-1)} \\ 1 & \mu_{1m} & \mu_{2m} & \ldots & \mu_{n,m} \\ 1 & \mu_{1,m+1} & \mu_{2,m+1} & \ldots & \mu_{n,m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \mu_{1n} & \mu_{2n} & \ldots & \mu_{nn} \end{vmatrix},$$

iar D_i se obţine din D, înlocuind linia i cu $1, \theta_1, \ldots, \theta_n$.

Pentru $i \leqslant m-1$ punînd $\alpha_i' = \frac{1}{i!}\alpha_i$ și pentru $i > m-1$, $\alpha_i' = \alpha_i$, se poate arăta că elementele α_i' ale bazei noi verifică relațiile

$$\alpha_j' \alpha_j' = \begin{cases} \alpha_{i+j}' & (1 + j \leqslant m-1) \\ 0 & (i + j \geqslant m) \end{cases} \qquad (33)$$

$$\alpha_i'^2 = \alpha_i' \quad (i \geqslant m)$$

$$(i = 0)$$

ținînd seama că o egalitate în hipercomplex implică $n + 1$ egalități în real.

Relațiile (33) ne confirmă faptul că în subspațiul

$$X_i = 0 \qquad (i = m,\ m+1, \ldots, n)$$

algebra este echivalentă cu algebra de ordinul m, de elemente ale bazei

$$1,\ \alpha_1',\ \alpha_2',\ \ldots,\ \alpha_{m-1}',$$

$$\alpha'^m = 0,\ \alpha_k' = \alpha'^k\ ;$$

prin urmare, transformările prin funcții monogene, în subspațiul definit mai sus, vor avea proprietatea demonstrată la începutul acestui aliniat.

6. *Observații asupra monogeneității în algebrele* A_{n+1}. Am definit monogeneitatea în algebra A_{n+1}, cu sau fără radical, punînd condiția

$$df(\omega)\, d\omega = 0, \qquad (34)$$

unde $d\omega$ este forma diferențială exterioară

$$d\omega = dx_0 + \theta_1 dx_1 + \ldots + \theta_n dx_n,$$

adică o formă diferențială exterioară de ordinul întîi cu coeficienți în algebră, cu totul particulari. Această definiție are avantajul că ne conduce la legături între derivatele parțiale ale funcțiilor conjugate U_i, componente ale lui $f(\omega)$, echivalente cu condițiile ca $f(\omega)$ să fie monogenă în fiecare punct unde aceste relații se mențin. Dacă vom considera în locul lui $d\omega$, o formă exterioară de ordinul întîi însă cu coeficienți oarecare, constanți, tot în algebră,

$$d\omega^* = dx_0 + a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n$$

$$a_i = \sum_{j=0}^{n} \theta_j a_{ij} \qquad (\theta_0 = 1)$$

atunci, cum se poate ușor verifica, se obțin condițiile de monogeneitate în raport cu noua variabilă ω^*. Dacă înlocuim însă pe $d\omega$ cu o formă exterioară $d\Omega$ de ordinul n cu coeficienți în algebră, ne punem problema, în ce condiții avem echivalența relațiilor deduse din (34) cu relațiile deduse din

$$df(\omega) \cdot d\Omega = 0.$$

Avem următorul rezultat. Se pot găsi totdeauna într-o algebră de ordinul $n + 1$, n forme exterioare complimentare $d\Omega_i$, cu coeficienți în algebră, constanți, astfel încît să avem relația

$$df(\omega)\, d\Omega_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (35)$$

echivalentă cu (34). Pentru demonstrație să reamintim, [14], [16], [17], o proprietate a relațiilor deduse din (34) și anume că toate derivatele parțiale ale

funcţiilor conjugate $U_1, U_2, \ldots, U_n$ se pot exprima numai cu ajutorul derivatelor parţiale ale lui U_0. Bineînţeles, U_0 poate fi înlocuită cu oricare din funcţiile U_i; acest rezultat ne-a permis [14]*) să obţinem diferite formule Green.

Să observăm acum că, pentru un $d\Omega_i$ dat, relaţia (35) implică $n+1$ legături între derivatele parţiale ale lui U_i. Pentru n relaţii (35) avem deci $n(n+1)$ legături între derivatele parţiale de ordinul întîi ale lui U_i ($i = 0,1,\ldots,n$) şi, prin urmare, putem exprima toate derivatele parţiale ale lui $U_1, \ldots, U_n$ cu ajutorul derivatelor parţiale ale lui U_0. Avem deci

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \sum_{h=0}^{n} a_{ikh} \frac{\partial U_0}{\partial x_h} .$$

Din (34) avem

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \sum_{h=0}^{n} \alpha_{ikh} \frac{\partial U_0}{\partial x_h} ;$$

α_{ikh} sînt complet determinate de constantele de structură ale algebrei, deci de (2). Să vedem dacă putem dispune de constantele A_{ij}, ce intervin în (35)

$$d\Omega_i = \sum_{j=0}^{n} A_{ij}\, dx_0\, dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n ,$$

pentru a avea

$$a_{ikh} = \alpha_{ikh}.$$

Cum A_{ij} sînt în algebră, ele introduc $n+1$ constante reale. Deci relaţiile (35) introduc

$$n(n+1)^2$$

constante reale arbitrare.

Numărul ecuaţiilor care intervin pentru a avea

$$a_{ikh} = \alpha_{ikh}$$

este însă tot $n(n+1)^2$, deci A_{ij} sînt determinaţi în mod unic. Pentru $n = 2$ urmează că ar trebui să avem două forme exterioare de acelaşi ordin — ordinul întîi — pentru care obţinem aceleaşi condiţii de monogeneitate. Punînd

$$df(\omega)\, d\omega = 0, \quad df(\omega)\, d\omega^* = 0$$

$$d\omega = dx + \theta\, dy$$

$$d\omega^* = (a_1 + \theta\, b_1)\, dx + (a_2 + \theta\, b_2)\, dy$$

$$\theta^2 = \alpha\theta + \beta$$

$$f(\omega) = U + \theta\, V$$

obţinem, din prima, condiţiile

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} + \alpha \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \beta \frac{\partial V}{\partial x} = 0 ,$$

*) p. 151.

iar din a doua

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{b_2}{a_2} \cdot \beta \cdot \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \beta \cdot \frac{b_1}{a_2} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{a_2 + b_2 \alpha}{b_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a_1 + b_1 \alpha}{b_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

care, pentru a fi identic cu primul, ne conduce la soluţiile, pentru a_i, b_i şi α,

$$\alpha = 0$$

$$b_2 = 0$$

$$b_1 \beta = a_2$$

$$a_1 = 0.$$

Deci, condiţiile

$$df(\omega)\, d\omega = 0$$

şi

$$df(\omega)\, d\omega^* = 0$$

cu

$$\omega = x + \theta y$$

$$\omega^* = \frac{a_2}{\beta} \theta \cdot x + a_2 y$$

$$\theta^2 = \beta$$

sînt echivalente. Însă avem

$$\omega^* = \frac{a_2}{\theta} \omega ;$$

cum θ nu este un divizor al lui zero, urmează că pentru algebra de ordinul doi cele două forme exterioare coincid.

Să revenim la relaţiile (35) şi fie $d\,\Omega_1, d\,\Omega_2, \ldots, d\,\Omega_n$ cele n forme exterioare de ordinul n, pentru care relaţiile

$$df(\omega)\, d\,\Omega_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

sînt echivalente cu condiţiile de monogeneitate. Să considerăm acum algebra $A_{n\,(n+1)}$ de ordinul $n(n+1)$ definită ca produsul direct al algebrei A_{n+1} cu algebra A_n de ordinul n de elemente ale bazei

$$\varphi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

legate prin relaţiile

$$\varphi_i \varphi_j = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$\varphi_i^2 = \varphi_i$$

(adică suma directă a n algebre izomorfe cu algebra numerelor reale).

Condiţiile (36) se transformă în

$$dF\, d\,\Omega^* = 0, \tag{37}$$

unde am notat

$$F = f(\omega)$$

şi

$$\Omega^* = \varphi_1 \Omega_1 + \varphi_2 \Omega_2 + \ldots + \varphi_n \Omega_n .$$

Din (37) avem imediat

$$\int_{E_n} F d\ \Omega^* = 0$$

cu E_n în spaţiul lui $A_{n(n+1)}$ cu $n(n+1)$ dimensiuni.

Putem deci afirma că monogeneitatea în A_{n+1} poate fi definită printr-o singură condiţie cu ajutorul formelor diferenţiale exterioare de ordin superior, însă cu coeficienţi într-o algebră convenabil aleasă.

7. *Algebre de ordin finit, asociative şi comutative asociate la sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale.* Să găsim acum forma cea mai generală a unui sistem de ecuaţii diferenţiale, cu derivate parţiale cu $n+1$ funcţii necunoscute $U_0, U_1, \ldots$ $\ldots, U_n$ şi $n+1$ variabile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ a cărui rezolvare conduce la funcţii monogene în algebra A_{n+1}.

Dacă notăm cu

$$U_0 = \text{Real } f(\omega)$$
$$U_k = \text{Real } \theta_k f(\omega) \tag{38}$$

şi

$$\omega = x_0 + \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n$$
$$f(\omega) = V_0 + \theta_1 V_1 + \ldots + \theta_n V_n$$

se vede imediat că sistemul

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_1} = \sum_{i=0}^{n} c_{ij} \frac{\partial U_0}{\partial x_i} + \sum_{i=0}^{n} c^*_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_0}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{39}$$

ţinînd seama de (38), conduce la următoarele legături între elementele bazei θ_i :

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\ \theta_1 \theta_i = \sum_{i=0}^{n} (c_{ij} + c^*_{ij})\ \theta_i , \quad (\theta_0 = 1)$$

în număr de n. Rezolvînd sistemul astfel obţinut, în raport cu necunoscutele $\theta_1 \theta_j$, obţinem pînă la urmă

$$\theta_1 \theta_j = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\ \theta_j , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

adică $f(\omega)$ trebuie să fie monogenă într-o algebră A_{n+1}.

În sistemul (39) intervin $n+1$ funcţii necunoscute. Următorul sistem

$$\sum_{j=0}^{n} b_{ij} \frac{\partial U_1}{\partial x_j} = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \frac{\partial U_0}{\partial x_j}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{40}$$

pentru

$$U_1 = \theta_1 f(\omega)$$

şi cu notaţiile precedente, conduce tot la o algebră A_{n+1}, definită de

$$\theta_1 \theta_i = \sum_{j=0}^{n} a^*_{ij}\ \theta_j .$$

Dacă legile de compoziţie sînt aceleaşi pentru elementele bazei în cele două algebre definite de sistemele de ecuaţii (39) sau (40), vom spune că cele

două sisteme de ecuaţii sînt algebric echivalente. Conform sistemului (40) putem spune că la un sistem de n ecuaţii cu două funcţii necunoscute şi $n+1$ variabile se ataşează în general o algebră A_{n+1} asociativă şi comutativă. Dacă numărul ecuaţiilor este mai mare decît n, algebra nu mai este comutativă, iar dacă numărul ecuaţiilor este mai mic decît n, algebra nu mai este unic determinată, pentru fiecare ecuaţie în minus intervenind $n+1$ parametri arbitrari.

E normal să considerăm acum sistemul de forma

$$\sum_{j=0}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial U_1}{\partial x_j}+b_{ij}\frac{\partial U_2}{\partial x_j}\right)=\sum_{j=0}^{n}c_{ij}\frac{\partial U_0}{\partial x_j},\quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{41}$$

Căutînd soluţii tot prin funcţii monogene sîntem conduşi de astă dată la algebre infinite, şi anume, dacă avem un sistem de n ecuaţii cu $p+2$ funcţii necunoscute, sîntem conduşi la o algebră infinită cu ∞^p elemente ale bazei. Astfel de sisteme le vom discuta într-o lucrare viitoare.

8. *Funcţii poligene.* Să presupunem acum că în algebra A_{n+1} definită de

$$\begin{aligned}\theta_i\,\theta_j&=\theta_{i+j}\\ \theta_1\,\theta_n&=1\end{aligned}\qquad (j=1,2,\ldots,n-1) \tag{42}$$

condiţiile de monogeneitate nu se mai menţin. În această situaţie raportul

$$\frac{df}{d\omega}=\frac{dU_0+\theta\,dU_1+\ldots+\theta^n\,dU_n}{dx_0+\theta\,dx_1+\ldots+\theta^n\,dx_n}$$

depinde de n parametri

$$\frac{dx_i}{dx_0}=m_i\,.$$

Avem aşadar într-un punct M

$$\frac{df}{d\omega}=\sum_{k=0}^{n}\theta^k\,\frac{\dfrac{\partial U_k}{\partial x_0}+\dfrac{\partial U_k}{\partial x_1}m_1+\ldots+\dfrac{\partial U_k}{\partial x_n}m_n}{1+\theta\,m_1+\ldots+\theta^n\,m_n}, \tag{43}$$

relaţie care este echivalentă cu $n+1$ relaţii scalare.

Dacă notăm cu

$$\frac{df}{d\omega}=\alpha_0+\theta\,\alpha_1+\ldots+\theta^n\,\alpha_n \tag{43'}$$

şi eliminăm parametrii m_i între aceste $n+1$ relaţii, obţinem legătura între componentele α_i ale valorilor derivatei şi derivatele parţiale $\dfrac{\partial U_k}{\partial x_i}$ în punctul respectiv

$$\begin{vmatrix}\alpha_0-\dfrac{\partial U_0}{\partial x_0} & \alpha_1-\dfrac{\partial U_0}{\partial x_1} & \ldots & \alpha_n-\dfrac{\partial U_0}{\partial x_n}\\ \alpha_n-\dfrac{\partial U_1}{\partial x_0} & \alpha_0-\dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} & \ldots & \alpha_{n-1}-\dfrac{\partial U_1}{\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_1-\dfrac{\partial U_n}{\partial x_0} & \alpha_2-\dfrac{\partial U_n}{\partial x_1} & \ldots & \alpha_0-\dfrac{\partial U_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}=0\,. \tag{44}$$

Prin urmare, cele ∞^n valori pe care le ia derivata în punctul fix M se găsesc pe hipersuprafaţa (2), a cărei ecuaţie se mai poate scrie

$$\left| a_{ij} - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x_{j-1}} \right| = 0, \tag{44'}$$

unde $| a_{ij} |$ este determinantul normei lui $\frac{df}{d\omega}$.

Cu notaţia (44') avem expresia generală a hipersuprafeţei pe care se găsesc componentele derivatei unei funcţii poligene într-o algebră A_{n+1} asociativă şi comutativă oarecare, deoarece şi în acest caz mai general $|a_{ij}|$ îşi păstrează aceeaşi semnificaţie.

Deoarece

$$m_i = \frac{dx_i}{dx_0} = x_i',$$

relaţia (43) se mai poate scrie

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n'}{1 + \theta x_1' + \ldots + \theta^n x_n'}.$$

Calculînd acum derivata a doua obţinem

$$\frac{d^2f}{d\omega^2} = \frac{\left(\sum_{i,j=0}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} x_i' x_j' + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i'' \right)(1 + \theta x_1' + \ldots + \theta^n x_n')}{(1 + \theta x_1' + \ldots + \theta^n x_n')^3} -$$

$$- \frac{(\theta x_1'' + \ldots + \theta^n x_n'')\left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n' \right)}{(1 + \theta x_1' + \ldots + \theta^n x_n')^3}$$

deci depinde de x_i'', adică de elementele diferenţiale de ordinul doi ale curbei pe care $\omega + \Delta\omega$ tinde către punctul ω.

Pentru ca derivata de ordinul doi să nu depindă şi de x_i'', trebuie să avem coeficienţii corespunzători ai lui x_i'' nuli, adică

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1} - \theta \frac{\partial f}{\partial x_0} + \left(\theta^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \theta \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) x_2' + \ldots + \left(\theta^n \frac{\partial f}{\partial x_1} - \theta \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) x_n' = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial x_2} - \theta^2 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \left(\theta \frac{\partial f}{\partial x_2} - \theta^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) x_1' + \ldots + \left(\theta^n \frac{\partial f}{\partial x_2} - \theta^2 \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) x_n' = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots

În sfîrşit să mai remarcăm că dacă scriem relaţiile (45) sub forma

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} d\omega = \theta^i \, df(\omega), \qquad (i = 1,2, \ldots, n)$$

obţinem

$$\frac{1}{\theta^i} \frac{\partial f}{\partial x_i} d\omega = df(\omega)$$

sau

$$\frac{1}{\theta^i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{\theta^k} \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

adică tot relaţiile (46). Putem spune deci că numai dacă $f(\omega)$ este monogenă, derivata a doua nu depinde de x_i''.

Am obţinut astfel un rezultat pentru algebrele A_{n+1}, care generalizează rezultatul obţinut de E. K a s n e r [10] pentru algebra numerelor complexe.

În cazul cînd curba, pe care $\omega + \Delta\omega$ tinde către ω, este o dreaptă, atunci toţi x_i'' sînt nuli şi derivata a doua a unei funcţii poligene capătă următoarea formă simplă

$$\frac{d^2 f}{d\omega^2} = \frac{\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i' \right)^2 f}{(1 + \theta x_i' + \ldots + \theta^n x_n')^2}$$

În cele ce urmează ne vom situa tot în cazul algebrei definite de (42) şi în ipoteza că $\Delta\omega$ tinde către zero după o dreaptă.

Ţinînd seama că în algebra considerată (42) un număr se scrie sub forma

$$\omega = \rho \ \exp \ (\theta\varphi_1 + \theta^2\varphi_2 + \ldots + \theta^n \varphi_n),$$

faptul că $\Delta\omega$ tinde către zero, după o dreaptă, este echivalent cu a scrie

$$d\omega = d\rho \ \exp \ (\theta\varphi_1 + \theta^2\varphi_2 + \ldots + \theta^n \varphi_n),$$

adică argumentele φ_i sînt constante. Avem şi

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= x_0 + \varepsilon_1 \theta \, x_1 + \ldots + \varepsilon_1^n \theta^n x_n = \rho \exp (\varepsilon_1 \theta \varphi_1 + \ldots + \varepsilon_1^n \theta^n \varphi_n). \\
\omega_2 &= x_0 + \varepsilon_2 \theta \, x_1 + \ldots + \varepsilon_2^n \theta^n x_n = \rho \ \exp \ (\varepsilon_2 \theta \varphi_1 + \ldots + \varepsilon_2^n \theta^n \varphi_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (47) \\
\omega_n &= x_0 + \varepsilon_n \theta \, x_1 + \ldots + \varepsilon_n^n \theta^n x_n = \rho \ \exp \ (\varepsilon_n \theta \varphi_1 + \ldots + \varepsilon_n^n \theta^n \varphi_n),
\end{aligned}$$

unde ρ este acelaşi şi este dat de

$$\rho^{n+1} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \ldots & x_n \\ x_n & x_0 \ldots & x_{n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_1 & x_2 \ldots & x_0 \end{vmatrix}$$

iar ε_i sînt rădăcinile, $n + 1$, ale unităţii.

Din relaţiile (47) putem găsi pe $x_0, x_1, \ldots, x_n$ şi obţinem

$$x_0 = \frac{\rho}{n+1}\left[\exp(\theta\varphi) + \exp(\varepsilon_1\theta\varphi) + \ldots + \exp(\varepsilon_n\theta\varphi)\right]$$

$$x_1 = \frac{\rho}{\theta(n+1)}\left[\exp(\theta\varphi) + \varepsilon_1^n \exp(\varepsilon_1\theta\varphi) + \ldots + \varepsilon_n^n \exp(\varepsilon_n\theta\varphi)\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{\rho}{\theta^n(n+1)}\left[\exp(\theta\varphi) + \varepsilon_1 \exp(\varepsilon_1\theta\varphi) + \ldots + \varepsilon_n \exp(\varepsilon_n\theta\varphi)\right],$$

unde s-a notat

$$\exp(\varepsilon_k\theta\varphi) = \exp(\varepsilon_k\theta\varphi_1 + \varepsilon_k^2\theta^2\varphi_2 + \ldots + \varepsilon_k^n\theta^n\varphi_n).$$

În ipotezele considerate, avem

$$\frac{df}{d\omega} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \omega} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx_i}{d\rho}\exp(-\theta\varphi)$$

şi, înlocuind pe

$$\frac{dx_i}{d\rho} = \frac{1}{\theta^i(n+1)}\left[\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k^{n-i+1}\exp(\varepsilon_k\theta\varphi)\right],$$

obţinem

$$\frac{df}{d\omega} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n+1)\theta^i}\exp(-\theta\varphi)\left[\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k^{n-i+1}\exp(\varepsilon_k\theta\varphi)\right]\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

cum

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \theta^i\left(\frac{\partial f}{\partial \omega} + \varepsilon_1^i\frac{\partial f}{\partial \omega_1} + \ldots + \varepsilon_n^i\frac{\partial f}{\partial \omega_n}\right)$$

obţinem expresia derivatei

$$\frac{df}{d\omega} = \exp(-\theta\varphi)\left[\exp(\theta\varphi)\frac{\partial}{\partial\omega} + \exp(\varepsilon_1\theta\varphi)\frac{\partial}{\partial\omega_1} + \ldots + \exp(\varepsilon_n\theta\varphi)\frac{\partial}{\partial\omega_n}\right]f. \quad (48)$$

Derivata de ordinul n se obţine aplicînd operatorul dedus din (48) de n ori

$$\frac{d^n f}{d\omega^n} = \exp(-n\theta\varphi)\left[\exp(\theta\varphi)\frac{\partial}{\partial\omega} + \ldots + \exp(\varepsilon_n\theta\varphi)\frac{\partial}{\partial\omega_n}\right]^{(n)} f, \quad (49)$$

rezultat care generalizează rezultatul lui E. Kasner [10] pentru $n = 2$ în cazul algebrei complexe, cît şi rezultatul obţinut recent de Canasco Esteban [7], deoarece, în cazul variabilei complexe, operatorul de derivare rectiliniar pentru funcţiile poligene este conform expresiei (48)

$$\frac{d}{dz} = \frac{\partial}{\partial z} + \exp(-2i\varphi)\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

deci

$$\frac{d^2}{dz^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\exp(-2i\varphi)\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}} + \exp(-4i\varphi)\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}$$

şi

$$\frac{d^n}{dz^n} = \frac{\partial^n}{\partial z^n} + C_n^1\exp(-2i\varphi)\frac{\partial^n}{\partial z^{n-1}\partial\bar{z}} + \ldots + C_n^n\exp(-2in\varphi)\frac{\partial^n}{\partial\bar{z}^n},$$

adică tocmai rezultatul obţinut în [17].

Trecerea de la algebra definită de (42) la algebra definită de (2) se face destul de uşor, încît nu vom insista asupra ei.

9. *O observaţie asupra funcţiilor monogene în sensul lui V. S. Fedorov* Pînă în prezent am considerat variabila hipercomplexă ca o expresie liniară în variabilele independente cu coeficienţi în algebră.

Dacă vom considera însă variabila sub forma

$$\omega = \sum_0^n \varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_n)\,\theta_k, \tag{50}$$

cu φ_k funcţii continue şi derivabile de un ordin suficient pentru calculele noastre, atunci sîntem conduşi pentru funcţiile conjugate U_i, ale unei funcţii monogene

$$f(\omega) = U_0 + \theta_1 U_1 + \ldots + \theta_n U_n, \tag{51}$$

că verifică o ecuaţie diferenţială cu coeficienţi variabili.

Să considerăm algebra de ordinul doi A_2, cu elementele bazei 1, θ legate prin relaţia

$$\theta^2 = 2\alpha\theta + \beta. \tag{52}$$

$$df(\omega)\,d\omega = 0,$$

unde am notat

$$\omega = u(x, y) + \theta v(x, y) \tag{50'}$$

$$f(\omega) = P(x, y) + \theta Q(x, y), \tag{51'}$$

obţinem condiţiile de monogeneitate

$$\begin{aligned} &\frac{D(P,u)}{D(x,y)} + \beta\frac{D(Q,v)}{D(x,y)} = 0 \\ &\frac{D(P,v)}{D(x,y)} + \frac{D(Q,u)}{D(x,y)} + 2\alpha\frac{D(Q,v)}{D(x,y)} = 0, \end{aligned} \tag{53}$$

care pentru $\alpha = 0$ şi $\beta = -1$ capătă forma simplă

$$\begin{aligned} &\frac{D(P,u)}{D(x,y)} = \frac{D(Q,v)}{D(x,y)} \\ &\frac{D(P,v)}{D(x,y)} = -\frac{D(Q,u)}{D(x,y)}. \end{aligned} \tag{54}$$

În cazul relaţiilor (53), pentru algebra definită de (52), funcţiile P şi Q sînt soluţiile *aceleiaşi ecuaţii* diferenţiale

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{D}\left(-\beta\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{D}\left[-\beta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial}{\partial y}\right\}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{D}\left[-\beta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\alpha\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial}{\partial x}+\right. \tag{55}$$
$$\left.+\frac{1}{D}\left(\beta\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}-2\alpha\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right\},$$

unde am notat $D=\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$.

Dacă scriem ecuaţia (5) sub forma

$$A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\ldots=0,$$

avem

$$A=\frac{1}{D}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\beta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\alpha\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$
$$B=\frac{1}{D}\left[\beta\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]$$
$$C=\frac{1}{D}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\beta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

şi se vede imediat că avem, oricare ar fi u şi v,

$$B^2-AC=\alpha^2+\beta,$$

din care se deduce *că natura ecuaţiei* (55) *nu depinde de funcţiile u şi v, arbitrare, ci de structura algebrei* A_2 şi anume ecuaţia (55) este eliptică, hiperbolică sau parabolică, după cum algebra A_2 este o algebră complexă, suma directă a două algebre reale sau o algebră cu radical.

Dacă u şi v sînt funcţii numai de x şi y respectiv, atunci sistemul (53) devine, pentru $\alpha=0$ şi $\beta=-1$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dv}{dy}=0$$
$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{dv}{dy}-\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{du}{dx}=0,$$

care este un caz particular al sistemului studiat de Lipman Bers şi Abe Gelbart [2] însă care are avantajul de a putea fi studiat fără introducerea funcţiilor monogene Σ, introduse de aceşti autori, care sînt mai dificile de mînuit.

АССОЦИАТИВНЫЕ И КОММУТАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ С РАДИКАЛОМ И МОНОГЕННЫЕ ФУНКЦИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе изучаются ассоциативные и коммутативные линейные алгебры с базисными элементами

$$1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n,$$

связанными соотношениями

$$\theta_1 \theta_i = \sum_{k=0}^{n} a_{1ik}\, \theta_k \quad (\theta_0 = 1)$$

где предполагается, что характеристическое уравнение (3) элемента имеет кратные корни. В этом случае и характеристические уравнения остальных элементов базиса имеют кратные корни того же рода и, по меньшей мере, того же порядка кратности. Радикал в алгебре дается выражением

$$\mathfrak{J}^{\star} = \mathfrak{J}_0 \cap \mathfrak{J}_m \cap \mathfrak{J}_{m+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{J}_n$$

где $\mathfrak{J}_k$ множество элементов из алгебры, для которых имеем

$$x_0 + \mu_{1k}\, x_1 + \ldots + \mu_{nk}\, x_n = 0.$$

Затем находится экспоненциальная форма элементов алгебры, а также и периоды экспоненциальной функции.

В главе (3) дается определение моногенности и получаются условия моногенности из

$$\int_{\rho} f(\omega)\, d\omega = 0$$

для общего случая, а также и для алгебр, определенных характеристическими уравнениями (10) и (11). Уделяется особое внимание повторному уравнению Лапласа с двумя переменными, причем при помощи моногенных аналитических функций находятся все аналитические решения, сходящиеся в окрестности нуля. Находится снова разложение Алманси и его единственности. Этот результат обобщен на случай функций $2n$ переменных при помощи формулы (16).

Используя свойство, характеризующее моногенные функции

$$\int_{\gamma} f(\omega)\, d\omega = 0$$

получаем разложение типа Фурье (17), взяв для кривой (γ) замкнутую кривую, лежащую на поверхности постоянной нормы, образованной из дуг кривой, определяемой $d\varphi_i = 0$.

Используя то же свойство, получим и разложения в ряд типа Лорана.

В главе (5) рассматриваются специальные свойства преобразований при помощи моногенных функций в алгебрах с радикалом. Для этого вводится нормальная форма n-плоскости и показывается, что преобразования, преобразующие n-плоскость в n-плоскость, ъде отрезки прямых (в соответствующей метрике) остаются инвариантными, осуществляются преобразованиями при помощи моногенных функций на алгебрах, определенных по (10) при $\alpha = 0$. При помощи такого преобразования семейство n-поверхностей, преобразуется в семейство n-поверхностей, обладающих тем свойством, что плоскость, касательная к пер-

вому семейству, преобразуется в плоскость, касательную к преобразованному семейству, причем сохраняются отрезки прямых (измеренные в соответствующей метрике), лежащие в касательной n -плоскости. Затем устанавливается связь этого свойства с алгебрами с радикалами, определяемыми (2).

В главе (6) показывается, что условие

$$d[f(\omega)\, d\omega]$$

эквивалентно n условиям

$$df(\omega)\, d\Omega_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

причем $d\Omega_i$ представляет собой ... дифференциальных форм n порядка с однозначно определе... циентами из алгебры.

В главе (7) автор пытается ... е общий вид систем дифференциальных уравнений с част... одными первого порядка, с постоянными коэффициентами, ... рых приводит к алгебрам, определяемым (2). Таким образо... системы (39) и (40). Если число функций возрастает, то а... вятся бесконечными.

В последней части работы р... ся полигенные функции в смысле Э. Каснера. Таким обр... ся поверхность (44'), на которой находится все производ... ки, в предположении, что $f(\omega)$ не моногенна.

Затем ставится условие, что ... второго порядка не должна зависеть от вторых производны... навливается, что это возможно лишь в том случае, ко... генна, то есть не зависит даже от первых производных ...

Исследования продолжаютс... прямолинейной производной, причем удается получить

$$\frac{d}{d\omega} = \exp(-\theta\varphi)\left[\exp(\varepsilon_1\theta\varphi)\frac{\partial}{\partial\omega_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial\omega_n}\right]$$

прямолинейного дифференциро... игенных функций, что приводит к производной n-го пор... дается (49).

Наконец, при посредстве ... ногенности В. С. Федорова получается для условий моно... редположении, что переменная ω имеет вид

$$\omega = \ldots (x, y)$$

следующий результат. Сопр... нкции моногенной функции переменного ω удовлетворя... му уравнению с частными производными с переменными... ами (55), обладающему следующим свойством: природа... 55) зависит не от функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, входящих ... ишь от структуры алгебры, даваемой $\theta^2 = 2\alpha\theta + \beta$, а и... ие (55) эллиптично, гиперболично или параболично в з... того, является ли алгебра A_2 комплексной, прямой сумм... тельных алгебр или алгеброй с радикалом.

ALGÈBRES À RADICAL, ASSOCIATIVES ET COMMUTATIVES, ET FONCTIONS MONOGÈNES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on étudie les algèbres linéaires, associatives et commutatives, des éléments de la base

$$1, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots \theta_n ,$$

reliés par les relations

$$\theta_1 \theta_i = \sum_{k=0}^{n} a_{1ik} \theta_k \qquad (\theta_0 = 1) ,$$

où l'on suppose que l'équation caractéristique (3) de l'élément θ_1 a des racines multiples. Dans ce cas, les équations caractéristiques des autres éléments de la base ont aussi des racines multiples, de même nature et au moins du même ordre de multiplicité. Le radical, dans l'algèbre, est donné par

$$\mathfrak{J}^* = \mathfrak{J}_0 \cap \mathfrak{J}_m \cap \mathfrak{J}_{m+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{J}_n ,$$

où $\mathfrak{J}_k$ est l'ensemble des points de l'algèbre pour lesquels on a

$$x_0 + \mu_{1k} x_1 + \ldots + \mu_{nk} x_n = 0 .$$

On trouve ensuite la forme exponentielle d'un nombre de l'algèbre ainsi que les périodes de la fonction exponentielle.

Dans le chapitre (3) on définit la monogénéité et on obtient les conditions de monogénéité de

$$d[f(\omega)\, d\omega] = 0$$

pour le cas général aussi bien que pour les algèbres définies par les équations caractéristiques (10) et (11). On insiste sur l'équation itérée de Laplace, à deux variables, obtenant à l'aide des fonctions monogènes, analytiques, toutes les solutions analytiques, convergentes autour de l'origine. On retrouve le développement d'Almansi ainsi que son unicité. Ce résultat est généralisé pour des fonctions à $2n$ variables par la formule (16).

Utilisant la propriété qui caractérise les fonctions monogènes

$$\int_\gamma f(\omega)\, d\omega = 0 ,$$

on obtient un développement de type Fourier (17) en prenant pour la courbe (γ) une courbe fermée, située sur une surface de norme constante et constituée par des arcs de la courbe définie par $d\varphi_i = 0$.

Utilisant la même propriété, on obtient des développements en série de type Laurent.

Dans le chapitre (5), on étudie les propriétés spéciales des transformations par fonctions monogènes en algèbres à radical. On introduit, à ces fins, la forme normale d'un n-plan et l'on montre que les transformations qui changent le n-plan en un n-plan dont les segments de droites (dans la métrique respective) restent invariants sont réalisées par des transformations par fonctions monogènes en algèbres définies par (10) et avec $\alpha = 0$. Une transformation pareille change une famille de n-surfaces en une famille de n-surfaces jouissant de la

propriété que le n-plan, tangent à la première famille, se transforme en un n-plan, tangent à la famille transformée, de sorte que les segments de droites (mesurés dans la métrique respective), situés dans le n-plan tangent, se conservent. On met ensuite cette propriété en rapport avec les algèbres à radical définies par (2).

Dans le chapitre (6), on montre que la condition

$$d\,[f(\omega)d\omega] = 0$$

est équivalente à n conditions

$$df(\omega)\,d\,\Omega_i = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n),$$

$d\,\Omega_i$ étant n formes différentielles extérieures d'ordre n, à coefficients, appartenant à l'algèbre, univoquement déterminés.

On cherche ensuite, dans le chapitre (7), la forme la plus générale des systèmes d'équations différentielles, aux dérivées partielles du premier ordre et à coefficients constants, dont la résolution conduit à des algèbres définies par (2). On trouve ainsi les systèmes (39) et (40). Si le nombre des fonctions croît, les algèbres deviennent infinies. Dans la dernière partie du travail, on étudie les fonctions polygènes, au sens de E. Kasner. On trouve ainsi la surface (44') sur laquelle se trouvent toutes les dérivées en un point, dans l'hypothèse que $f(\omega)$ n'est pas monogène.

On pose ensuite la condition que la dérivée du second ordre ne dépende pas des dérivées secondes de x_i et l'on trouve que cela n'est possible que si $f(\omega)$ est monogène, c'est-à-dire qu'elle ne dépend ni des dérivées premières de x_i.

En poussant plus avant les recherches, on obtient l'opérateur

$$\frac{d}{d\omega} = \exp(-\theta\varphi)\left[\exp(\theta\varphi)\frac{\partial}{\partial\omega} + \exp(\varepsilon_1\theta\varphi)\frac{\partial}{\partial\omega_1} + \ldots + \exp(\varepsilon_n\theta\varphi)\frac{\partial}{\partial\omega_n}\right]$$

de dérivation, suivant une direction donnée d'une fonction polygène, ce qui conduit à la dérivée d'ordre n donnée par (49).

Enfin, par l'intermédiaire de la monogénéité généralisée de V. S. Féodorov, dans l'hypothèse que la variable ω est de la forme

$$\omega = u(x, y) + \theta\, v(x, y)$$
$$\theta^2 = 2\alpha\theta + \beta$$

on obtient le résultat suivant, concernant les conditions de monogénéité: Les fonctions conjuguées d'une fonction monogène de variable ω satisfont à la même équation aux dérivées partielles et à coefficients variables (55) le type de cette equation jouissant de la propriété d'être indépendant des fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ qui définissent la variable ω et de dépendre uniquement de la structure de l'algèbre donnée par $\theta^2 = 2\alpha\theta + \beta$, à savoir, cette équation (55) est elliptique, hyperbolique ou parabolique suivant que l'algèbre A_2 est une algèbre complexe, la somme directe de deux algèbres réelles ou une algèbre à radical.

BIBLIOGRAFIE

1. Almansi E., *Sull'integrazione dell'Equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. Annali di Matematica, 1899, t. II, seria a III-a, p. 1—53.
2. Bers Lipman a. Gelbart Abe, *On a Class of Functions Defined by Partial Differential Equations*. Trans. of the Amer. Math. Soc., 1944, vol. 56, p. 67—93

3. Brown B. H., *The Equilong Transformations of Euclidean Space.* Trans. of the Amer. Math. Soc., 1925, vol. 25.
4. Ciorănescu N., *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables réelles.* Anal. Acad. Rom., seria a III-a, t. XIX, mem. 10, 1944, p. 1—38.
5. — *Integrarea unor ecuații liniare cu derivate parțiale și coeficienți constanți de ordin oarecare.* Anal. Acad. R.P.R., seria A, t. III, mem. 19, 1949, p. 499—506.
6. Drîmbă C. *Asupra unei extinderi a noțiunii de funcție monogenă.* Bul. Ştiinț. Acad. R.P.R., seria A., matematică, fizică, chimie, geologie, biologie, științe tehnice și agricole, t. I, nr. 6, 1949, p. 535—538.
7. Esteban Canasco, *The n—t Rectiliniar Derivative of a Polygenic function* (citat din Math. Reviews, 1951, p. 91).
8. Feodorov V. S., *Monoghenosti.* Mat. Sbornik, 1946, p. 353.
9. Kasner E., *General Theory of Polygenic or Non-monogenic Functions. The Derivative Congruence of Circles.* Proceedings of the National Academy of Sciences, 1928, vol. 14, p. 75—82.
10. — *The Second Derivative of a Polygenic Function.* Trans. of the Amer. Math. Soc., 1928, vol. 30, p. 805—818.
11. Kramer Edna E., *Polygenic Functions of the Dual Variable* $w = u + jv$. Amer. Journ. of Math., 1930, vol. 52, p. 370—377.
12. Moisil Gr. C., *Asupra unei generalizări a ideii de monogenitate datorită lui V. S. Feodorov.* Bul. ştiinț. Acad. R.P.R., seria A., matematică, fizică, chimie, geologie, geografie, biologie, științe tehnice și agricole, t. I, nr. 10, noiembrie 1949, p. 959—965.
13. — *Sur un algorithme généralisant la théorie des fonctions monogènes, qui peut être utile pour l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre superieur.* Anal. Acad. Rom., seria a III-a, t. XVI, mem. 17, 1941, p. 695—730.
14. Roșculeț M., *Algebre liniare asociative și comutative și funcții monogene atașate lor.* Studii și cercetări matematice, t. VI, nr. 1—2, ianuarie-iunie, 1955, p. 135—174.
15. — *Algebre infinite asociate la ecuații cu derivate parțiale omogene cu coeficienți constanți, de ordin oarecare.* Studii și cercetări matematice, t. VI, nr. 3—4, iulie-decembrie, 1955, p. 567—643.
16. — *Funcții de o variabilă hipercomplexă în spațiul cu n dimensiuni.* Bul. Ştiinț. Acad. R.P.R., secțiunea de științe matematice și fizice, t. V, nr. 1, 1953, p. 135—145.
17. — *Funcții de o variabilă hipercomplexă în spațiul cu n dimensiuni. Funcții conjugate.* Bul. Ştiinț. Acad. R.P.R., secțiunea de științe matematice și fizice, t. V, nr. 3, 1953, p. 415—422.
18. Scheffers G., *Isogonalkurven Aquitangentialkurven und komplexe Zahlen.* Mathem. Annal., 1905, vol. 60, p. 491—530.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 1–2, 1956

STUDIUL SINTETIC AL TRANSFORMĂRII AFINE*)

DE

M. NECULCE

Scopul acestei lucrări este de a da pentru transformările afine din plan o reprezentare geometrică simplă. Se defineşte mai întîi o transformare afină particulară pe care o numim paralel-afină. Teorema 17 arată că orice transformare afină se descompune într-un produs de două transformări paralel-afine.

Definiţie. Fie date o pereche de unghiuri AOB, $A'O'B'$ şi dreapta OO'. Se numeşte transformare paralel-afină a planului în el însuşi, în direcţia OO', o transformare punctuală care se bucură de următoarele proprietăţi:

1°. Unui punct N de pe dreapta OA îi corespunde punctul de intersecţie N' al paralelei duse prin N la dreapta OO' cu dreapta $O'A'$.

2°. Unui punct N de pe dreapta OB îi corespunde punctul de intersecţie N' al paralelei duse prin N la dreapta OO' cu dreapta $O'B'$.

3°. Unui punct M, exterior dreptelor OA şi OB, îi corespunde un punct M', prin următoarea construcţie:

Prin M construim o dreaptă care intersectează dreptele OA şi OB respectiv în punctele L şi R. Prin L şi R ducem paralele la OO', care intersectează dreptele $O'A'$ şi $O'B'$ respectiv în punctele L' şi R'. Punctul de intersecţie M' al dreptei $L'R'$ cu paralela dusă prin M la dreapta OO' este punctul căutat.

Teoremă fundamentală. 1. *Coordonatele afine ale unui punct M şi ale imaginei sale M' sînt egale adică* (fig. 1),

$$\frac{\overline{Mb}}{\overline{Ma}} = \frac{\overline{M'b'}}{\overline{M'a'}}.$$

Demonstraţie. Paralelismul dreptelor OO', MM', RR', permite aplicarea teoremei lui Tales. Obţinem astfel următoarele egalităţi:

$$\frac{\overline{RM}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{Mb}}{\overline{PO}} \tag{1}$$

şi

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{Oa}} = \frac{\overline{TR}}{\overline{ab}}. \tag{2}$$

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 1 decembrie 1955.

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă

$$\frac{\overline{RM}}{\overline{RP}} : \frac{\overline{OT}}{\overline{Oa}} = \frac{\overline{Mb}}{\overline{PO}} : \frac{\overline{TR}}{\overline{ab}}, \tag{3}$$

deci

$$\frac{\overline{Mb}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{RM}}{\overline{RP}} \times \frac{\overline{OT}}{\overline{Oa}} \times \frac{\overline{PO}}{\overline{TR}} \tag{4}$$

Tot aşa se arată că

$$\frac{\overline{M'b'}}{\overline{a'b'}} = \frac{\overline{R'M'}}{\overline{R'P'}} \times \frac{\overline{O'T'}}{\overline{O'a'}} \times \frac{\overline{P'O'}}{\overline{T'R'}} \tag{5}$$

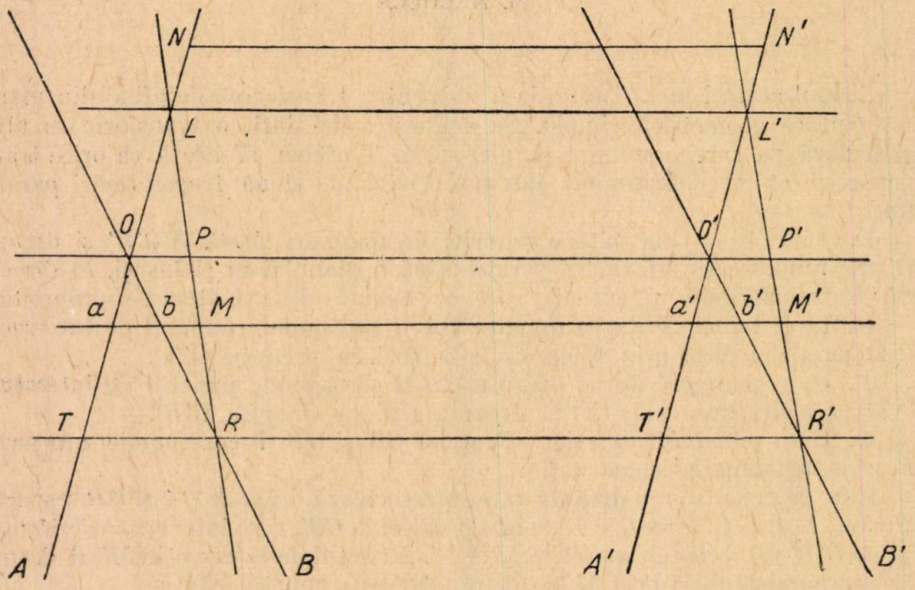

Fig. 1

Dar aplicînd mai departe teorema lui Tales, obţinem,

$$\frac{\overline{RM}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{R'M'}}{\overline{R'P'}}, \frac{\overline{Oa}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{O'a'}}{\overline{O'T'}}, \frac{\overline{PO}}{\overline{TR}} = \frac{\overline{P'O'}}{\overline{T'R'}}.$$

Egalitatea (4) devine

$$\frac{\overline{Mb}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{R'M'}}{\overline{R'P'}} \times \frac{\overline{O'T'}}{\overline{O'a'}} \times \frac{\overline{P'O'}}{\overline{T'R'}}. \tag{6}$$

Folosind egalitatea (5), putem scrie

$$\frac{\overline{Mb}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{M'b'}}{\overline{a'b'}}. \tag{7}$$

Din (7) rezultă deci

$$\frac{\overline{Mb}}{\overline{ab} + \overline{Mb}} = \frac{\overline{M'b'}}{\overline{a'b'} + \overline{M'b'}}, \tag{8}$$

de unde se deduce relaţia din enunţul teoremei, adică

$$\frac{\overline{Mb}}{\overline{Ma}} = \frac{\overline{M'b'}}{\overline{M'a'}}.$$

Reciproca teoremei fundamentale. Fie date punctele M şi M' prin relaţia

$$\frac{\overline{Mb}}{\overline{Ma}} = \frac{\overline{M'b'}}{\overline{M'a'}}$$

şi fie LMR dreapta oarecare dusă prin M. Dacă L' şi R' sînt respectiv punctele de intersecţie ale paralelelor la OO', duse prin L şi R, cu dreptele $O'A'$, $O'B'$, dreapta $L'R'$ trece prin M'.

Demonstraţie. Prin absurd dacă intersecţia dreptei $L'R'$ cu ab ar fi un punct M'' diferit de M', atunci ar exista două puncte M' şi M'' astfel încît

$$\frac{\overline{M'b'}}{\overline{M'a'}} = \frac{\overline{M''b''}}{\overline{M''a''}} = \frac{\overline{Mb}}{\overline{Ma}}$$

ceea ce este imposibil.

Teorema 2. *Transformarea paralel-afină este biunivocă.*

Demonstraţie. a) Evident, fiecărui punct M din plan îi corespunde un punct M', imaginea paralel-afină a punctului M.

b) Unui punct M îi corespunde o singură imagine paralel-afină M'.

Într-adevăr, prin teorema fundamentală 1 coordonatele afine ale punctelor M şi M' fiind egale, există un singur punct M' astfel încît

$$\frac{\overline{M'b'}}{\overline{M'a'}} = \frac{\overline{Mb}}{\overline{Ma}}$$

c) La puncte diferite M şi N corespund imaginii paralel-afine M' şi N' diferite, deoarece ori M şi N se găsesc pe paralele la OO' diferite şi imaginile lor sînt deci diferite, ori M şi N sînt situate pe aceeaşi paralelă la OO' şi atunci coordonatele lor afine fiind diferite, imaginile lor paralel-afine sînt distincte.

d) Orice punct M' din plan este imaginea paralel-afină a unui anumit punct M din plan. Într-adevăr, prin M' construim o dreaptă care intersectează dreptele $O'A'$ şi $O'B'$ respective în punctele R' şi L'. Prin R' şi L' ducem paralele la OO', care intersectează dreptele OA şi OB în punctele R şi L. Intersecţia dreptei RL cu paralela dusă prin M' la OO' este punctul M căutat.

Teorema 3. *Construcţia punctului M' este independentă de alegerea dreptei RL.* Aceasta rezultă imediat din faptul că coordonata afină a punctului M' depinde numai de coordonata afină a punctului M cu care ea este egală.

Se mai observă că dreptele RL fiind co-punctuale în M, şi dreptele corespunzătoare $R'L'$ sînt co-punctuale în M'.

Observaţie. Prin transformarea paralel-afină, un punct se transformă într-un punct — cu alte cuvinte proprietatea de a fi punct se conservă prin această

transformare: spunem că punctul este un concept invariant al geometriei paralel-afină.

T e o r e m a 4. Poziția punctului M' este independentă de alegerea dreptei RL.

Demonstrație. Cazul 1. Să presupunem că M este exterior dreptei OO'. Atunci, prin teorema 1, coordonata afină a punctului M' depinde numai de coordonata afină a punctului M cu care este egală.

Cazul 2. Să presupunem că M se găsește pe dreapta OO'.

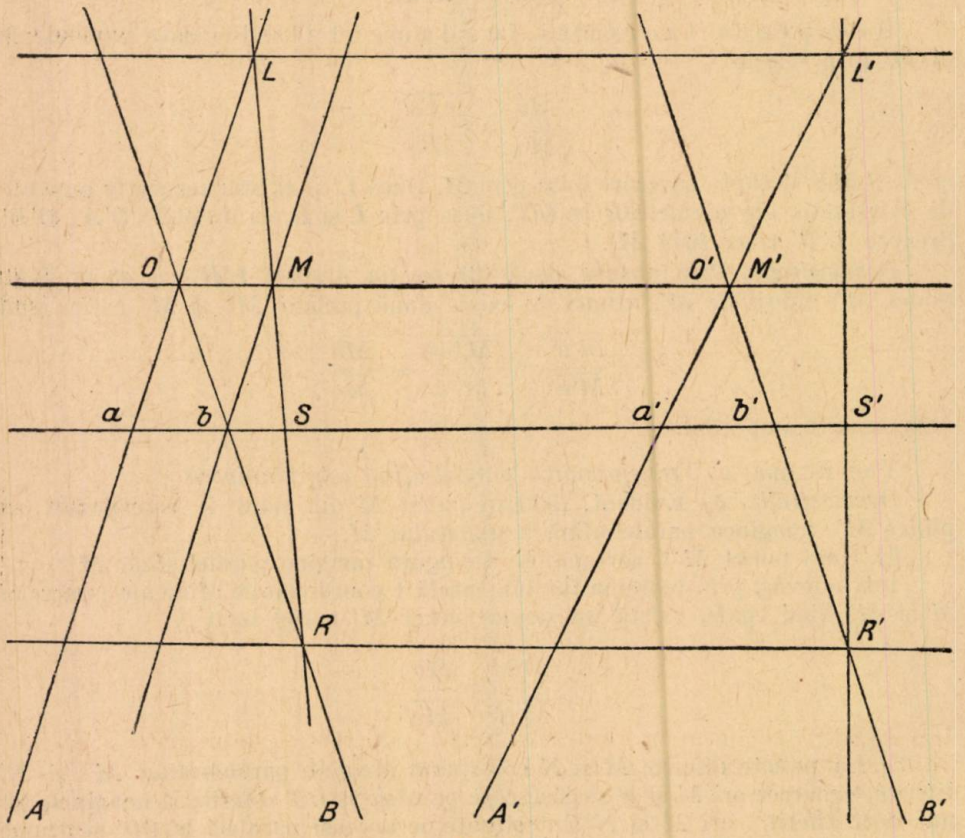

Fig. 2

Conform definiției de mai sus, construim pe M' pornind de la o dreaptă oarecare RL și ducînd prin L și R paralele la dreapta OO'. Acum ducem prin M o paralelă la OA care taie OB în punctul b (fig. 2).

Prin b ducem o paralelă la OO' care taie $O'B'$ în b'.

Scriem relațiile

$$\frac{OM}{RM} = \frac{bS}{RS} \text{ și } \frac{O'M'}{R'M'} = \frac{b'S'}{R'S'}$$

deci

$$\frac{O'M'}{OM} = \frac{b'S'}{bS} \cdot \frac{RS}{RM} \cdot \frac{R'S'}{R'M'} = \frac{a'b'}{ab}$$

deci $O'M' = a'b'$, de unde rezultă că poziția punctelor M' este independentă de secanta LR.

Teorema 5. *Coliniaritatea este o proprietate invariantă a geometriei paralel-afine.*

Demonstrație. Trebuie arătat că imaginea paralel-afină a unei drepte este o dreaptă.

a) Imaginile paralel-afine ale dreptelor OA și OB sînt respectiv dreptele $O'A'$ și $O'B'$ prin ipoteză.

b) Presupunem că dreapta dată taie dreptele OA și OB respectiv în punctele R și L. Ducem prin L și R paralele la dreapta OO', paralela care intersectează dreptele $O'A'$ și $O'B'$ în punctele R' și L'. Imaginea dreptei RL este $R'L'$.

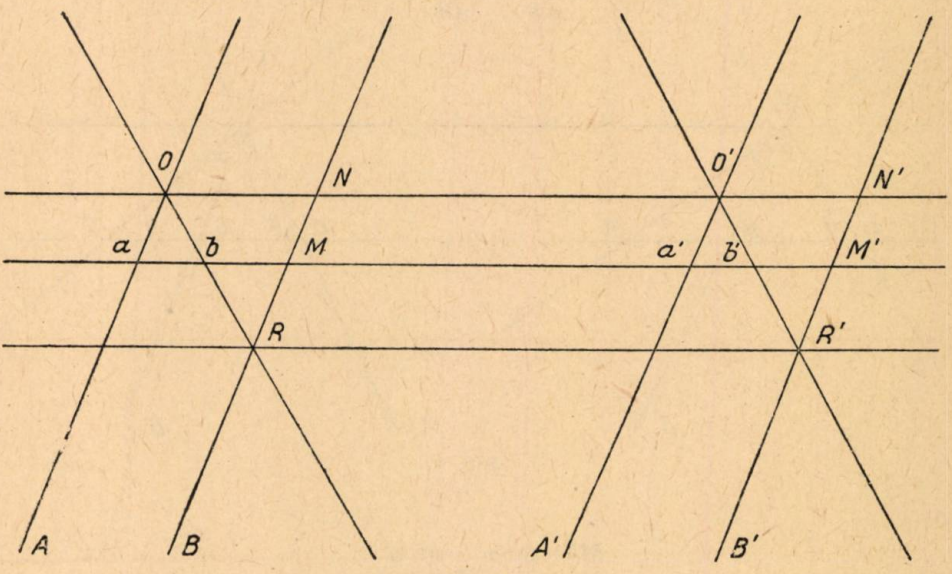

Fig. 3

Într-adevăr, imaginea M' a oricărui punct M aparținînd dreptei RL se găsește, prin definiție, la intersecția dreptei $R'L'$ cu paralela dusă prin M la OO'.

c) Imaginea unei drepte paralele la OA este o dreaptă paralelă la $O'A'$. Fie dreapta RL paralelă cu OA. Imaginea punctului R — intersecția dreptei RL cu OB — este R'.

Trebuie arătat că

$$\frac{Mb}{Ma} = \frac{M'b'}{M'a'}.$$

Prin teorema lui Tales avem

$$\frac{Mb}{NO} = \frac{RM}{RN} \quad \text{sau} \quad = \frac{Mb}{Ma}\,\frac{RM}{RN}$$

vem

$$\frac{M'b'}{M'a'} = \frac{R'M'}{R'N'}.$$

Ţinînd seama de paralele din figura 3 avem în sfîrşit

$$\frac{Mb}{Ma} = \frac{M'b'}{M'a'}$$

d) Imaginea unei drepte care trece prin O este o dreaptă care trece prin O' (fig. 4).

Avem

$$\frac{Mb}{\sin\gamma} = \frac{Ob,}{\sin\theta},$$

$$\frac{\sin\alpha}{a\,b} = \frac{\sin\beta}{Ob},$$

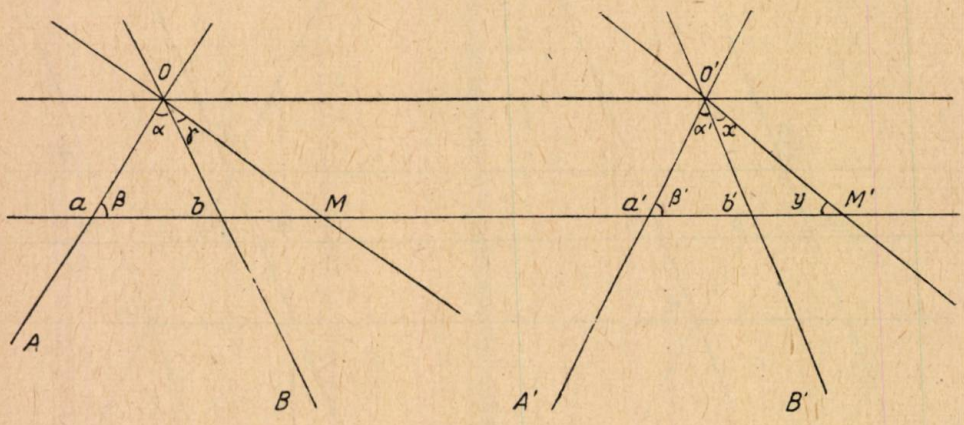

Fig. 4

deci

$$\frac{Mb}{ab} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin\beta}{\sin\theta},$$

deci

$$\frac{Mb}{ab} = \frac{\sin\beta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}; \tag{9}$$

tot aşa avem

$$\frac{M'b'}{a'b'} = \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha'} \cdot \frac{\sin x}{\sin y}. \tag{10}$$

Din (9) şi (10) rezultă că $\frac{\sin x}{\sin y} = \text{const.}$ şi cum $x + y = \text{const.}$ rezultă că $\sin x = \text{const.}$ deci că $x = \text{const.}$

L e m ă. Fiind date două unghiuri BAC şi $B'A'C'$ şi dacă transversala BC este paralelă cu AA' (fig. 5), atunci avem relaţia

$$\frac{BC}{B'C'} = k,$$

unde k este o constantă.

Demonstrație. Avem

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} \quad \text{și} \quad \frac{B'C'}{D'E'} = \frac{A'B'}{A'D'},$$

deci

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{DE}{D'E'} \cdot \frac{AB}{AD} \cdot \frac{A'D'}{A'B'},$$

or

$$\frac{AB}{AD} = \frac{A'B'}{A'D'}.$$

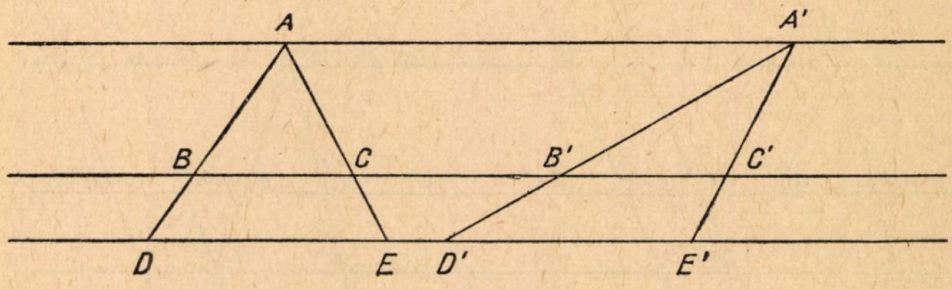

Fig. 5

deci

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{DE}{D'E'},$$

de unde rezultă teorema.

T e o r e m a 6. *Imaginea paralel-afină a unei perechi de drepte paralele este o pereche de drepte paralele.*

Demonstrație. a) Dreptele nu sînt paralele cu OO'. Atunci ele intersectează sau dreapta OA sau OB (fig. 6).

Avem

$$\frac{bN}{ab} = \frac{b'N'}{a'b'} \quad \text{și} \quad \frac{bN}{ab} = \frac{b'M'}{a'b'},$$

deci

$$\frac{bN}{bM} = \frac{b'N}{b'M'},$$

deci

$$\frac{bN - bM}{bM} = \frac{b'N' - b'M'}{b'M'},$$

$$\frac{MN}{bM} = \frac{M'N'}{b'M'},$$

deci

$$\frac{MN}{bM} = \frac{M'N'}{b'M'} \cdot MN.$$

Dreptele RR' și aa' fiind paralele, $\frac{b'M'}{b\ M}$ este constant, deci

$$M'N' = k \cdot MN.$$

Deci $M'N' = k_1$, k_1 fiind o constantă, deci dreptele Δ' și Δ'_1 sînt paralele.
b) Dacă dreptele sînt paralele cu OO' proprietatea este evidentă.

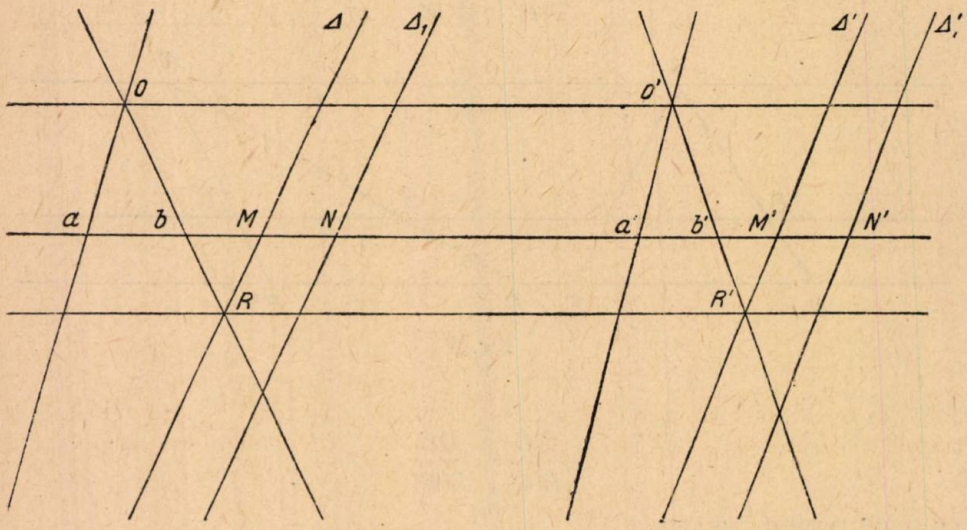

Fig. 6

În rezumat, putem conchide că relaţia de paralelism este un invariant al transformării paralel-afine.

Teorema 7. *Raportul a două segmente situate pe aceeași dreaptă sau pe drepte paralele este un invariant al transformării paralel-afine.*

Demonstrație. a) Segmentele sînt aşezate pe aceeași dreaptă. Fie MN și ST cele două segmente (fig. 7).

Dreptele MN, ST, $M'N'$, $S'T'$ fiind cuprinse între paralele la aceeași direcție avem

$$\frac{MN}{ST} = \frac{M'N'}{S'T'}.$$

b) Segmentele sînt aşezate pe drepte paralele

$$\frac{M_1N_1}{ST} = \frac{MN}{ST} = \frac{M'N'}{S'T'} = \frac{M'_1N'_1}{S'T'}.$$

Teorema 8. *Necoliniaritatea a trei puncte este un invariant al transformării paralel-afine.*

Demonstrație. Să presupunem, prin absurd, că imaginea punctelor necoliniare ABC ar fi punctele coliniare $A'B''C'$ (fig. 8.)

Prin ipoteză am avea relația

$$\frac{ab}{bB} = \frac{a'b'}{b'B''}. \tag{11}$$

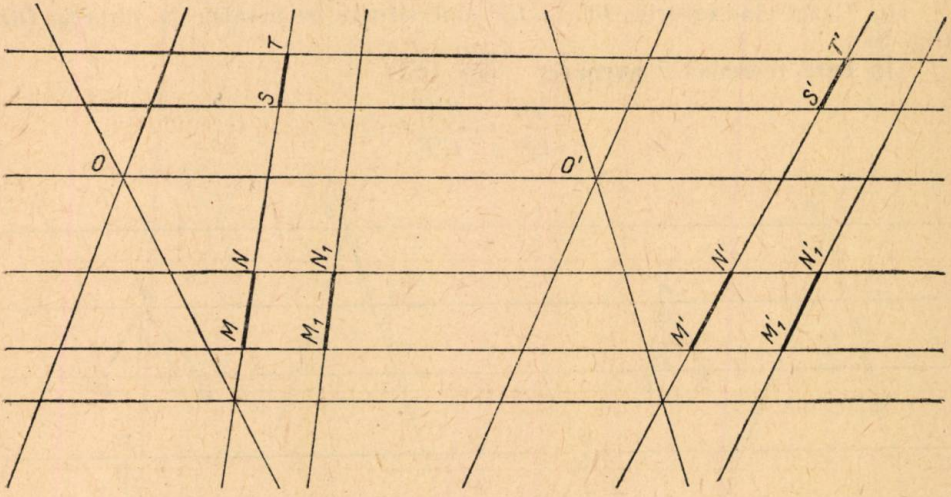

Fig. 7

Dar în același timp imaginea punctului D care aparține dreptei AC, ar trebui să fie tot B'' care se găsește pe dreapta $A'C'$, imaginea dreptei AC.

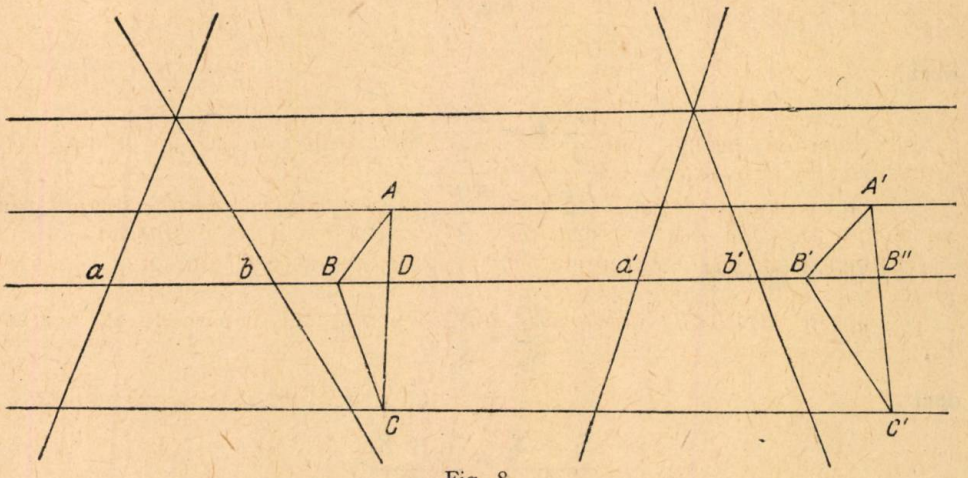

Fig. 8

Deci am avea și relația

$$\frac{ad}{bD} = \frac{a'b'}{b'B''}. \tag{12}$$

Din relațiile (11) și (12) ar urma absurditatea

$$b\,B = b\,D\,. \tag{13}$$

T e o r e m a 9. *Raportul ariilor a două triunghiuri este un invariant al transformării paralel-afine.*

a) Cazul cînd laturile BC și EF sînt situate pe paralele la direcția OO' (fig. 9).

În baza teoremei 7 avem

$$\frac{BC}{EF} = \frac{B'C'}{E'F'}\,,$$

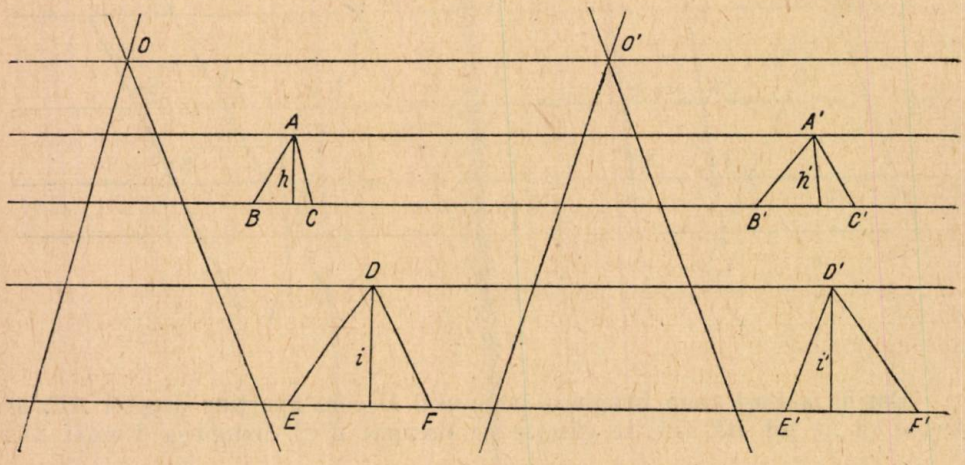

Fig. 9

deci

$$\frac{\frac{BC}{2}\,h}{\frac{EF}{2}\,i} = \frac{\frac{B'C'}{2}\,h}{\frac{E'F'}{2}\,i}\,.$$

b) Cazul general

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S'_1}{S'_2}\,,$$

deci

$$\frac{S_1 + S_2}{S_2} = \frac{S'_1 + S'_2}{S'_2}$$

și

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{S'_3}{S'_4}\,,$$

deci

$$\frac{S_3 + S_4}{S_4} = \frac{S'_3 + S'_4}{S'_4},$$

deci

$$\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} \cdot \frac{S_4}{S_2} = \frac{S'_1 + S'_2}{S'_3 + S'_4} \cdot \frac{S'_4}{S'_2},$$

or

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{S'_4}{S'_2},$$

deci

$$\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{S'_1 + S'_2}{S'_3 + S'_4}$$

Definiţia 1. Se numeşte poligon, o mulţime de segmente A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_0, bucurîndu-se de următoarele proprietăţi:

1°. Punctele $A_p A_{p+1} A_{p+2}$ sînt necoliniare.

2°. Segmentele $A_p A_{p+1}$, $A_{p+1} A_{p+2}$ numite consecutive, au un singur punct comun pe A_{p+1}. Segmentele $A_n A_0$, $A_0 A_1$, numite şi ele consecutive, au un singur punct comun pe A_0.

3°. Două segmente neconsecutive n-au nici un punct comun. Segmentele $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, ..., $A_n A_0$, se numesc laturile poligonului. Punctele A_0, A_1, A_2, ..., A_n, A_0, se numesc vîrfurile poligonului.

Definiţia 2. Spunem că poligonul $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n A_0$ este convex dacă oricare ar fi dreapta care conţine una din laturile sale, celelalte puncte ale poligonului se găsesc de aceeaşi parte a planului determinat de dreaptă.

Definiţia 3. Spunem că poligonul $A_0, A_1 \ldots A_{n-1} A_n A_0$ este concav dacă există o latură a sa, astfel încît dreapta care conţine această latură separă punctele poligonului, poligonul conţinînd puncte ale sale, de o parte şi cealaltă a dreptei.

Teorema 10. *Un poligon se transformă prin transformare paralel-afină într-un poligon.*

a) Trei puncte consecutive $A_p A_{p+1} A_{p+2}$ fiind necoliniare se transformă în trei puncte necoliniare $A'_p A'_{p+1} A'_{p+2}$.

b) Fie date două segmente neconsecutive $A_p A_{p+1}$ şi $A_q A_{q+1}$. Prin ipoteză, deci, ele nu au nici un punct comun. Fie $A'_p A'_{p+1}$ şi $A'_q A'_{q+1}$ imaginile lor. Afirmăm că n-au nici un punct comun. Prin absurd, dacă ar exista un astfel de punct M', el ar trebui să fie imaginea unui punct M comun segmentelor $A_p A_{p+1}$, $A_q A_{q+1}$ ceea ce este contrar ipotezei.

Se ştie că o dreaptă împarte planul în două regiuni; avem atunci

Lema 1. Imaginea paralel-afină a două puncte M şi N situate de aceeaşi parte a unei drepte Δ sînt două puncte M' şi N' situate de aceeaşi parte a imaginei paralel-afine Δ' a dreptei Δ (fig. 10).

Demonstraţie. Cum M şi N se găsesc în aceeaşi regiune a planului — determinată de dreapta Δ — urmează că coordonatele afine ale punctelor M şi N

sînt în același timp mai mici sau mai mari decît coordonatele afine ale punctelor P și Q, acestea fiind punctele de întretăiere ale paralelor ab și a_1b_1 cu dreapta Δ.

Să presupunem că

$$\frac{Ma}{Mb} > \frac{Pa}{Pb},$$

atunci rezultă că

$$\frac{Na_1}{Nb_1} > \frac{Qa_1}{Qb_1}.$$

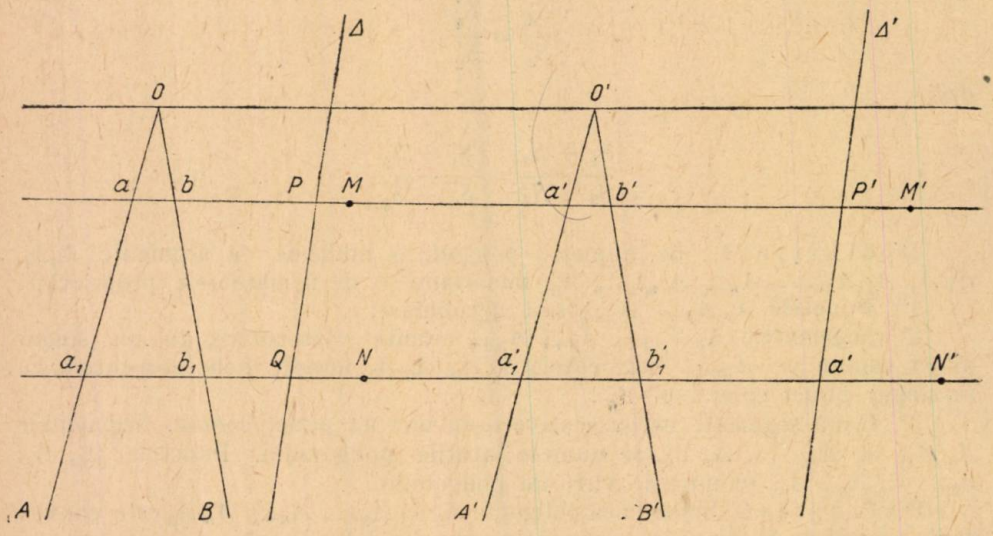

Fig. 10

Fie Δ' imaginea dreptei Δ, și P', Q' imaginile punctelor P și Q. Cum

$$\frac{Ma}{Mb} = \frac{M'a'}{M'b'}$$

și

$$\frac{Na_1}{Nb_1} = \frac{N'a'_1}{N'b'_1}$$

și cum

$$\frac{Pa}{Pb} = \frac{P'a'}{P'b'} \text{ și } \frac{Qa_1}{Qb_1} = \frac{Q'a'_1}{Q'b'_1}$$

rezultă că

$$\frac{M'a'}{M'b'} > \frac{P'a'}{P'b'} \text{ și } \frac{N'a'_1}{N'b'_1} > \frac{Q'a'_1}{Q'b'_1}.$$

Deci, urmează că M' și N' se găsesc de aceeași parte a dreptei Δ'. Se demonstrează întocmai.

Lema 2. Imaginea paralel-afină a două puncte M și N situate de o parte și de alta a unei drepte Δ, sînt două puncte M' și N' situate de o parte și de alta a imaginei Δ' a dreptei Δ.

În baza acestor două leme putem demonstra următoarele două teoreme:

Teorema 11. *Imaginea paralel-afină a unui poligon convex este un poligon convex.*

Imaginea paralel-afină a poligonului convex $A_0A_1A_2, \ldots A_{n-1}\, A_n\, A_0$ este un poligon (prin teoremă). Poligonul fiind convex toate vîrfurile sale sînt de aceeași parte a dreptei deteminată de una din laturile sale $A_p\, A_{p+1}$. Imaginile acestor vîrfuri vor fi deci (prin lema 1) de aceeași parte a imaginei $A'_p\, A'_{p+1}$ a

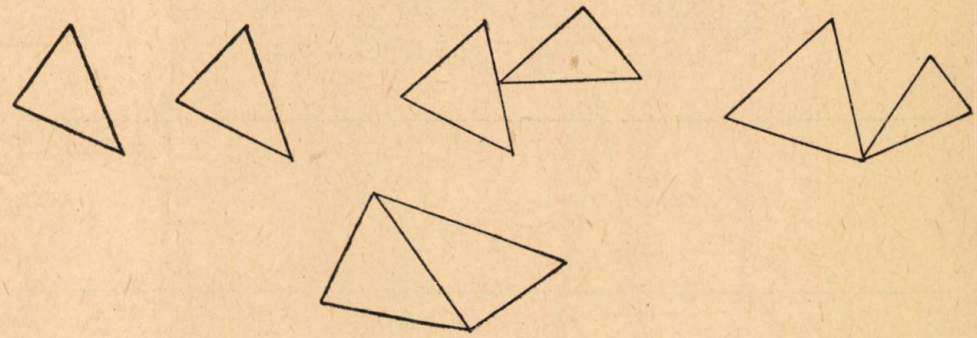

Fig. 11

dreptei $A_p\, A_{p+1}$. Proprietatea avînd loc oricare ar fi laturile $A'_p\, A'_{p+1}$, poligonul imaginei $A'_o A'_1 \ldots A'_{n-1} A'_n A'_0$ este convex.

Teorema 12. *Imaginea paralel-afină a unui poligon concav este un poligon concav.*

Demonstrație. Fie dat poligonul concav $A_0\, A_1\, A_2 \ldots A_p\, A_{p+1} \ldots A_{n-1}\, A_n\, A_0$. Laturile acestui poligon sînt de două feluri. Unele separă vîrfurile poligonului, altele nu separă. Imaginea poligonului $A_0\, A_1 \ldots A_{n-1}\, A_n\, A_0$, este un poligon $A'_oA'_1 \ldots A'_{n-1}\, A'_p\, A'_o$. Dacă $A_p\, A_{p+1}$ nu separă vîrfurile poligonului nici $A'_pA'_{p+1}$ nu separă vîrfurile poligonului imagine (prin lema 1); dacă $A_p\, A_{p+1}$ separă vîrfurile poligonului originar, imagina $A'_p\, A'_{p+1}$ separă poligonul imagine (prin lema 2) Poligonul imagine va fi de atîtea ori concav de cîte ori este concav și poligonul originar.

În rezumat, proprietățile de convexitate și concavitate pentru poligoane sînt proprietăți invariante ale transformării paralel-afine.

Definiție. Două triunghiuri se numesc exterioare dacă au cel mult un punct comun. Ele se numesc alăturate dacă coincid prin una din laturile lor (fig. 11).

Admitem următoarea

Teorema 13. *Un poligon poate fi acoperit cu o mulțime de triunghiuri, două oarecare fiind ori alăturate ori exterioare.*

Teorema 14. *Proprietățile de exterioritate și de alăturare sînt invariante pentru transformarea paralel-afină.*

Teorema 15. *Raportul ariilor a două poligoane este un invariant al transformării paralel-afine.*

Demonstrație. Să notăm cu P și Q poligoanele date și prin P' și Q' imaginile lor paralel-afine.

Prin teorema 12 descompunem poligoanele P și Q într-o sumă de triunghiuri, două dintre ele fiind exterioare dacă nu sînt alăturate. Să notăm cu $S_1\ S_2\ \ldots\ S_n$ ariile triunghiurilor care acoperă poligonul P și cu $s_1\ s_2\ \ldots\ s_p$ ariile triunghiurilor care acoperă poligonul Q.

Să notăm cu $S_1'\ S_2'\ \ldots\ S_n'$ și $s_1'\ s_2'\ \ldots\ s_p'$ ariile triunghiurilor imagine care acoperă poligoanele imagine P' și Q'. Prin teorema 13 ariile respective ale poligoanelor P' și Q' sînt $S_1' + S_2' + \ldots + S_p'$ și $s_1' + s_2' + \ldots + s'_p$, Ținînd seamă de teorema 8 și de teoria proporțiilor, rezultă că

$$\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_p} = \frac{S_1' + S_2' + \ldots + S_n'}{s_1' + s_2' + \ldots + s_p'}.$$

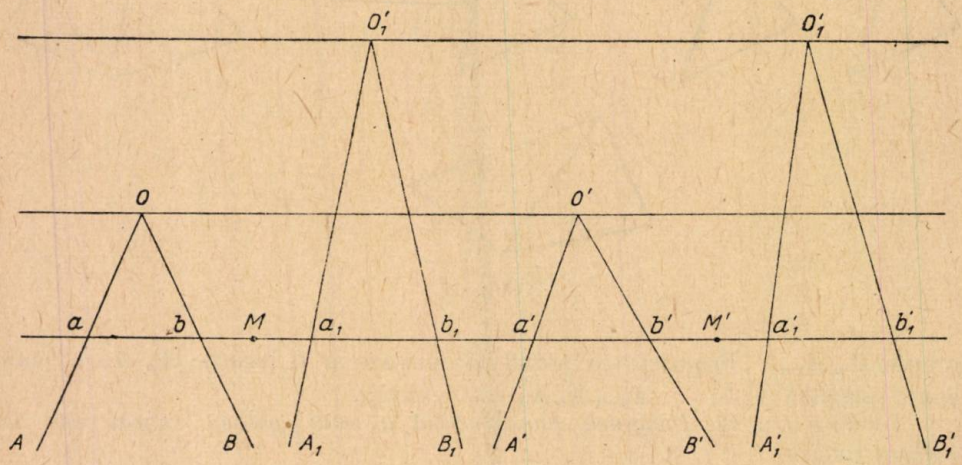

Fig. 12

Definiție. Spunem că două transformări paralel-afine sînt identice cînd imaginile M' și M'' ale aceluiași punct M coincid.

Teorema 16. *Fie dată o transformare paralel-afină definită prin unghiurile AOB și $A'O'B'$. Fie dat, mai departe, unghiul $A_1O_1B_1$ și imaginea sa $A_1'O_1'B_1'$. Transformările paralel-afine definite de perechea de unghiuri (AOB, $A'O'B'$) și de perechea de unghiuri ($A_1O_1B_1$, $A_1'O_1'B_1'$) sînt identice.*

Trebuie deci arătat că dacă M' este imaginea punctului M în prima construcție, M' este imaginea lui M și în a doua construcție (fig. 12).

Demonstrație. Să arătăm că din relația

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{Mb}{M'b'}$$

rezultă relația

$$\frac{a_1b_1}{a_1'b_1'} = \frac{Mb_1}{M'b_1'}.$$

Prin teorema 6 avem

$$\frac{a\,b}{a_1\,b_1} = \frac{a'b'}{a_1'\,b_1'}$$

căci $a'\,b'$ și $a_1'\,b_1'$ sînt respectiv imaginile segmentelor $a\,b$ și a_1b_1 (prin ipoteză).

Prin teorema 6 avem

$$\frac{ab}{M\,b_1} = \frac{a'b'}{M'b_1'} \tag{14}$$

căci $a'\,b'$ și $M'\,b_1'$ sînt respectiv imaginile segmentelor $a\,b$ și $M\,b_1$ (prin ipoteză).

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$\frac{a_1\,b_1}{a_1'\,b_1'} = \frac{M\,b_1}{M'b_1'}$$

Transformarea afină (generală)

D e f i n i ț i e. Fie date două unghiuri AOB, $O'A'B'$ pe care s-au ales patru puncte M,N,M',N' (M pe OA, N pe OB, M' pe $O'A'$, N' pe $O'B'$) (fig. 13).

Numim transformare afină, o transformare punctuală a planului în el

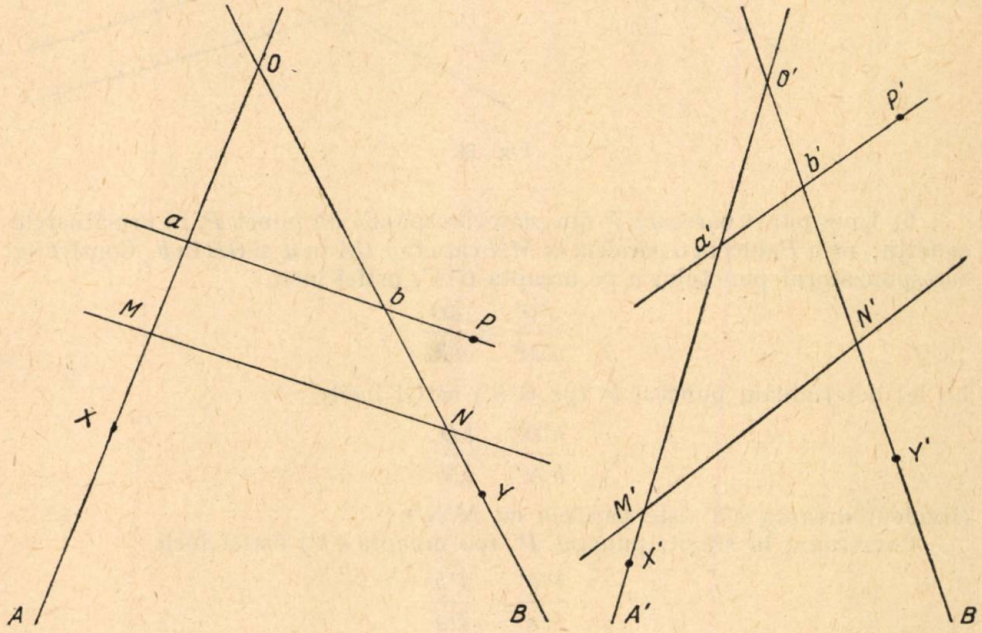

Fig. 13

...re se ...ă de următoarele proprietăți:
...u ...O corespunde punctul O'.
... M corespunde punctul M'.

3) Punctului N corespunde punctul N'.

4) Unui punct oarecare X pe OA corespunde punctul X' de pe $O'A'$, astfel încît să avem

$$\frac{XM}{XO} = \frac{X'M'}{X'O'}.$$

5) Unui punct oarecare Y de pe OB corespunde punctul Y' de pe $O'B'$, astfel încît să avem

$$\frac{YN}{YO} = \frac{Y'N'}{Y'O'}.$$

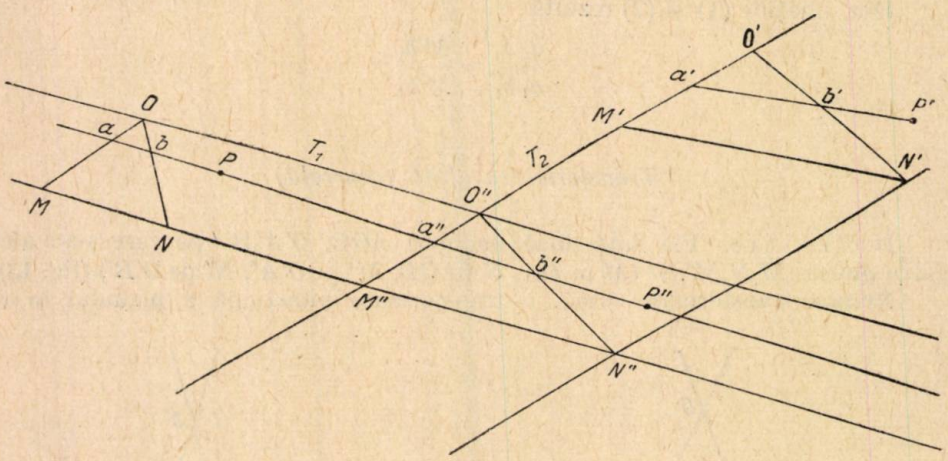

Fig. 14

6) Unui punct oarecare P din plan corespunde un punct P' în următoarele condiții: prin P ducem o paralelă la MN care taie OA în a și OB în b. Construim corespunzătorul punctului a pe dreapta $O'A'$, astfel încît

$$\frac{a'O'}{a'M'} = \frac{aO}{aM}$$

La fel determinăm punctul b' (pe $O'B'$) astfel încît

$$\frac{b'O'}{b'N'} = \frac{bO}{bN}.$$

(Evident dreapta $a'b'$ este paralelă cu $M'N'$).

Construim, în sfîrșit, punctul P' (pe dreapta $a'b'$) astfel încît

$$\frac{P'b'}{P'a'} = \frac{Pb}{Pa},$$

P' fiind punctul corespunzător punctului P.

Teorema 17. *O transformare afină T poate fi înlocuită prin produsul a două transformări paralel-afine T_1 și T_2* (fig. 14).

Demonstrație. Fie dată transformarea afină T care transformă triunghiul OMN în triunghiul $O'M'N'$, (O în O, M în M', N în N'; celelalte elemente

transformîndu-se conform definiției transformării afine). Punctul P admite un corespunzător determinat de relațiile

$$\frac{aO}{aM} = \frac{bO}{bN} = \frac{a'O'}{a'M'} = \frac{b'O'}{b'N'} \tag{15}$$

și

$$\frac{Pb}{Pa} = \frac{P'b'}{P'a'}. \tag{16}$$

Prin punctul O ducem o paralelă la MN, și prin punctul N' o paralelă la $O'M'$.

Considerăm triunghiul $O''M''N''$, ale cărui vîrfuri se găsesc la intersecția acestor două sisteme de drepte paralele.

Să notăm cu T_1 transformarea paralel-afină definită de unghiul MON și $M''O''N''$. Punctul P'' este determinat de relațiile

$$\frac{aO}{aM} = \frac{bO}{bN} = \frac{a''O''}{a''M''} = \frac{b''O''}{b''N''} \tag{17}$$

și

$$\frac{Pb}{Pa} = \frac{P''b''}{P''a''}. \tag{18}$$

Să notăm, mai departe, cu T_2 transformarea paralelă afină definită de unghiurile $O''N''M''$ și $O'N'M'$. Să notăm cu a_1, b_1 și P_1' punctele corespunzătoare punctului P'' (prin transformare T_2). Să arătăm că P' coincide cu P_1'. Punctul a_1', este determinat de relația

$$\frac{a_1'O'}{a_1'M'} = \frac{a''O''}{a''M''}.$$

Ținînd seama de relația (17) rezultă că

$$\frac{a_1'O'}{a_1'M'} = \frac{aO}{aM}$$

și prin relația (15) rezultă

$$\frac{a_1'O'}{a_1'M'} = \frac{a'O'}{a'M'}.$$

Rezultă deci că punctul a_1' se confundă cu punctul a'.

Tot așa se vede că punctul b_1' se confundă cu punctul b'. Punctele P'', a'' și P'' fiind coliniare, punctele P_1', a'', b'' vor fi coliniare: deci, P'' se va găsi pe drepta $a'b'$. Transformarea paralel afină conservînd rapoartele de segmente (aparținînd aceleași drepte) rezultă relația

$$\frac{P_1'b'}{P_1'a'} = \frac{P''b''}{P''a''}.$$

relațiile (16) și (18) rezultă deci egalitatea

$$\frac{P_1'b'}{P_1'a'} = \frac{P'b'}{P'a'}.$$

m deci concluzia că punctul P_1' se confundă cu punctul P'.

ОБ АФФИННОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В этой работе автор поставил себе задачу дать очень простую геометрическую интерпретацию аффинного преобразования в плоскости и способа построения аффинного преобразования фигуры. В то же время автор показывает, что самое общее плоское аффинное преобразование может быть сведено к произведению двух элементарных преобразований, названных им переллельно-аффинными преобразованиями. Отсюда вытекает, что произведение нескольких аффинных преобразований может быть заменено произведением двух параллельно-аффинных преобразований.

ÉTUDE SYNTHÉTIQUE DE LA TRANSFORMATION AFFINE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'Auteur se propose de donner une interprétation géométrique très simple de la transformation affine dans le plan et du procédé de construction de la transformée affine d'une figure. Il montre en même temps que la transformation affine plane la plus générale peut être réduite à un produit de deux transformations élémentaires, dénommées transformations affines-parallèles. Il en résultera donc que le produit de plusieurs transformations affines peut être remplacé par le produit de deux transformations affines-parallèles.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 1, 1956

POLINOMUL AREOLAR DE ORDINUL n ÎN SPAŢIUL CU 3 DIMENSIUNI *)

DE

MARIANA NEDELCU

1. Introducere

Noţiunea de *polinom areolar* a fost introdusă de N. Teodorescu în teza sa de doctorat din 1931 [6]. Pornind de la noţiunea de derivată areolară definită de D. Pompeiu în 1912 [9], studiată numai sub o formă restrînsă pînă atunci, N. Teodorescu dezvoltă teoria funcţiilor $f(z)$ olomorfe (α) şi monogene (α) de o variabilă complexă $z = x + iy$.

În această teorie derivata areolară este considerată ca un operator independent de existenţa derivatelor parţiale ale lui $f(z)$. Polinomul areolar de ordinul n este definit ca o funcţie olomorfă (α) avînd derivata areolară de ordinul n olomorfă în sensul clasic. Se poate obţine o reprezentare integrală a polinoamelor areolare, cu ajutorul valorilor lor şi ale derivatelor lor areolare succesive pe un contur. De asemenea, se ajunge la o formulă analogă cu formula lui Taylor şi la extensiunea seriei lui Taylor pentru funcţii care admit o infinitate de derivate areolare succesive. Polinoamele areolare fiind în particular funcţii poliarmonice, reprezentarea lor integrală poate conduce la formule de mediaţie şi la probleme la limită importante în fizica matematică.

Polinoamele areolare au mai fost studiate ulterior de Ridder [10] şi A. Kristzen [2]. Rezultatele obţinute de ultimul în anul 1947 nu sînt noi. Ele corespund în totul celor stabilite de N. Teodorescu în 1931.

Extinderea noţiunilor de funcţie olomorfă şi de derivată areolară în sensul restrîns, la spaţiul cu 3 şi n dimensiuni datorită acad. Gr. C. Moisil [3], a permis obţinerea unor rezultate analoge cu cele din plan. Gr. C. Moisil şi N. Teodorescu [4] au stabilit formule de reprezentare integrală, analoge teoremelor lui Cauchy şi Morera etc. N. Teodorescu a extins noţiunile de funcţie monogenă (α) şi olomorfă (α) prin analogie cu cazul plan [7].

Recent A. V. Biţadze [1] foloseşte formulele din [4] pentru a studia aplicaţia reprezentării funcţiilor olomorfe în spaţiu prin integrale, la diverse probleme la limită.

---

*) Lucrare prezentată de prof. N. Teodorescu, membru corespondent al Academiei R.P.R., în şedinţa de secţie a Academiei din 1 decembrie 1955.

În lucrarea de față ne propunem să extindem noțiunea de polinom areolar la spațiul cu trei dimensiuni, pe baza extensiunilor respective a derivatei areolare în sensul larg și ale funcțiilor olomorfe (α).

Folosind algoritmul matricial introdus de Gr. C. Moisil și N. Teodorescu, vom stabili formule de reprezentare integrală ale polinoamelor de ordinul n punînd în evidență deosebirile care apar față de cazul plan și construind un simbolism matematic simplu, pentru operațiile de derivare sau de integrare în raport cu derivata areolară.

2. Polinomul areolar în plan

O funcție olomorfă de variabilă complexă

$$f(z) = P(x, y) + i\ Q\ (x, y)$$

este caracterizată în mulțimea funcțiilor continue prin integrala lui Cauchy

$$\int_C f(z)\ dz = 0\,,$$

pentru orice contur închis rectificabil din domeniul de olomorfism, după cum se deduce din teorema lui Morera.

Cazul în care integrala lui Cauchy nu mai este nulă a fost pus în evidență de D. Pompeiu [9] în 1912, care a reluat formula lui Riemann

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\ dz - \frac{1}{\pi}\iint_D \varphi\ (v)d\omega = 0\,,$$

unde

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]$$

și a remarcat că

$$\varphi\ (z_0) = \lim \frac{\dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_C f(z)\ dz}{\text{aria dom. } D}$$

cînd conturul C se strînge în jurul punctului z_0, presupunînd că funcțiile $P\ (x,y)$ și $Q\ (x,y)$ admit derivate parțiale de primul ordin continue. D. Pompeiu a numit această limită derivata areolară a lui $f(z)$.

N. Teodorescu, în teza sa de doctorat [6] a dat definiția derivatei areolare în sensul larg astfel:

O funcție $f(z)$ are o derivată areolară în punctul z_0 dacă, pentru orice număr pozitiv ε, arbitrar dat, putem face să-i corespundă un număr pozitiv r, astfel încît pentru orice contur închis γ, limitînd un domeniu δ cuprins în întregime în cercul cu centrul în (x_0, y_0) și de rază r, avem

$$\left| \frac{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(z)\ dz}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_\delta d\omega} - \varphi\ (z_0) \right| < \varepsilon$$

numărul $\varphi\ (z_0)$ find finit și determinat.

Funcția $\varphi(z_0)$ se va numi în acest caz derivata areolară a funcției $f(z)$ în punctul z_0. Ea nu presupune existența derivatelor parțiale pentru funcțiile P și Q.

N. Teodorescu [6] a numit funcții monogene (α) într-un domeniu D, funcțiile care admit o derivată areolară în fiecare punct al domeniului, iar funcții olomorfe (α) în domeniul D, funcțiile care admit o derivată areolară continuă în D.

Se observă că funcțiile olomorfe au derivata areolară identic nulă și deci ele joacă rolul de constante față de operația de integrare în raport cu derivata areolară.

Dacă presupunem că funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x,y)$ admit derivate parțiale de primul ordin continue, atunci derivata areolară a lui $f(z)$ coincide cu derivata lui $f(z)$ în direcția $\bar{z}$, derivata obișnuită în raport cu z rămînînd să fie numită derivată medie. Această definiție s-a numit definiția restrînsă a derivatei areolare [6], [8].

Notînd cu D operatorul care definește derivata areolară și cu $\overline{D}$ operatorul care definește derivata medie, avem

$$D\overline{D} = \overline{D}D = \Delta,$$

unde Δ este operatorul lui Laplace.

Dacă $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ admite o derivată areolară în sens restrîns $Df = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$, funcțiile P și Q vor satisface sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \varphi_1 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial y} = \varphi_2. \end{cases}$$

În acest cadru, N. Teodorescu [6] a definit polinomul areolar de ordinul n ca o funcție olomorfă (α) avînd derivata areolară de odinul n olomorfă în sensul clasic și a dat o reprezentare integrală a polinomului areolar cu ajutorul valorii lui și a derivatelor lui areolare succesive pe un contur închis C.

Forma simplificată sub care poate fi pus polinomul areolar în plan este

$$f(z) = f_0(z) + \bar{z} f_1(z) + \bar{z}^2 f_2(z) + \ldots + \bar{z}^n f_n(z)$$

deci un polinom de gradul n în $\bar{z}$ cu coeficienți $f_i(z)$ funcții olomorfe. Această dezvoltare generalizează dezvoltarea Taylor pentru polinoame.

Deoarece

$$D^n f(z) = n!\, f_n(z)$$

este o funcție olomorfă, atunci

$$D^{n+1} f(z) = 0$$

și deci

$$\overline{D}^{n+1} D^{n+1} f(z) = \Delta^{n+1} f(z) = 0,$$

ceea ce arată că partea reală și partea imaginară a funcției $f(z)$ sînt funcții poliarmonice.

În cele ce urmează vom arăta cum poate fi extins polinomul areolar în spaţiul cu 3 dimensiuni, folosind operatori matriciali în real, în locul operatorilor z şi $\bar{z}$.

3. Derivata areolară în spaţiul cu trei dimensiuni

Gr. C. Moisil şi N. Teodorescu au generalizat noţiunea de derivată areolară în spaţiul cu trei dimensiuni, folosind calculul matricial [3], [4], [7], [8].

Fie un sistem de patru funcţii $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$, $\psi_3(x, y, z)$, $\psi_4(x, y, z)$ continue şi admiţînd derivate parţiale continue de primele două ordine într-un domeniu V. Să considerăm următorul sistem liniar de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_3}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi_4}{\partial z} = \Psi_1 \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_4}{\partial y} - \dfrac{\partial\psi_3}{\partial z} = \Psi_2 \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial z} - \dfrac{\partial\psi_4}{\partial x} = \Psi_3 \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} + \dfrac{\partial\psi_3}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} = \Psi_4 \end{cases} \tag{1}$$

Pentru studiul acestui sistem s-a introdus un simbolism matricial.

Se consideră ansamblul funcţiilor $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ ca o matrice dreptunghiulară, coloană sau linie şi se notează cu

$$\psi = \left\| \begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{matrix} \right\| \quad \text{sau} \quad \overline{\psi} = \| \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 \| \tag{2}$$

Produsul între o matrice pătratică $\gamma = \| \gamma_{ij} \|$ cu $i = 1,2,3,4$ şi o matrice de forma (2), va da tot o matrice de forma (2) după regula obişnuită

$$\varphi = \gamma\,\psi = \left\| \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{matrix} \right\|,$$

unde

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{4} \gamma_{ij}\,\psi_j \qquad (i = 1,2,3,4)$$

sau

$$\overline{\varphi} = \overline{\psi}\gamma = \| \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \|,$$

unde

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{4} \psi_i \gamma_{ij} \quad , \quad (j=1,2,3,4).$$

Se introduce sistemul de matrici

$$\gamma_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \gamma_y = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \gamma_z = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{3}$$

$$\overline{\gamma}_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \overline{\gamma}_y = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \overline{\gamma}_z = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$e = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

unde matricile $\overline{\gamma}_x$, $\overline{\gamma}_y$, $\overline{\gamma}_z$ sînt respectiv transpusele matricilor $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ iar e este matricea unitate.

Cu aceste notații sistemul (1) se poate scrie sub forma matricială

$$\left(\gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi = \Psi. \tag{4}$$

Se notează cu D operatorul

$$D = \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{5}$$

Deci, sistemul (4) devine

$$D\,\psi = \Psi. \tag{4'}$$

Prin analogie cu operatorul D se definește operatorul

$$\overline{D} = \overline{\gamma}_x \frac{\partial}{\partial x} + \overline{\gamma}_y \frac{\partial}{\partial y} + \overline{\gamma}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{6}$$

și aplicîndu-l lui Ψ se obține

$$\overline{D}\,\Psi = \overline{D}\,D\,\psi = e\,\Delta\,\psi = \Delta\,\psi.$$

Deci, funcţiile Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4, satisfac sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \Psi_3}{\partial y} + \dfrac{\partial \Psi_4}{\partial z} = \Delta \psi_1 \\ \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \dfrac{\partial \Psi_4}{\partial y} + \dfrac{\partial \Psi_3}{\partial z} = \Delta \psi_2 \\ \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial z} + \dfrac{\partial \Psi_4}{\partial x} = \Delta \psi_3 \\ \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \dfrac{\partial \Psi_3}{\partial x} + \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial y} = \Delta \psi_4 . \end{cases} \tag{7}$$

Produsul operatorilor D şi $\overline{D}$ este permutabil şi dă operatorul Δ al lui Laplace

$$D\overline{D} = \overline{D}D = e\,\Delta . \tag{8}$$

Prin analogie cu cazul plan Gr. C. Moisil [3] a dat o definiţie restrînsă a derivatei areolare prin operatorul D. Operatorul $\overline{D}$ ar corespunde la o derivată medie. Aceasta este o definiţie restrînsă pentru că s-a presupus că funcţiile componente ale lui ψ admit derivate parţiale de ordinul I.

N. Teodorescu a dat o definiţie largă a derivatei areolare pornind de la formula fundamentală

$$\iint_S (\vec{n}_M \cdot \gamma)\, \psi_M \, d\sigma_M + \iiint_V D\, \psi_Q \, d\,\omega_Q = 0 \tag{9}$$

sau

$$\iint_S \overline{\psi}_M (\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma})\, d\sigma_M + \iiint_V D\overline{\psi}_Q \, d\omega_Q = 0, \tag{9'}$$

unde S este o suprafaţă închisă care mărgineşte volumul V, admiţînd normală în fiecare punct, iar $\vec{n}$ este vectorul normal la suprafaţa S. Prin γ se înţelege vectorul de componente γ_x, γ_y, γ_z iar prin $\overline{\gamma}$ vectorul de componente $\overline{\gamma}_x$, $\overline{\gamma}_y$, $\overline{\gamma}_z$; $(\vec{n} \cdot \gamma)$ şi $(\vec{n} \cdot \overline{\gamma})$ sînt respectiv produsele scalare între $\vec{n}$ şi γ sau $\vec{n}$ şi $\overline{\gamma}$.

Vom spune că o funcţie ψ (respectiv $\overline{\psi}$), continuă pe orice suprafaţă închisă S cu normală în fiecare punct, admite o derivată areolară în orice punct al volumului V mărginit de suprafaţa S, dacă există o funcţie $D\psi$ (respectiv $D\overline{\psi}$) mărginită şi integrabilă în V satisfăcînd la relaţia (9) iar $D\psi$ (respectiv $D\overline{\psi}$) s-a numit derivata areolară a lui ψ (respectiv $\overline{\psi}$) în sens larg. Această definiţie a fost utilizată în lucrarea de faţă.

S-a definit derivata areolară şi ca

$$D\psi_P = -\lim \frac{\iint_S (\vec{n}_M \cdot \gamma)\psi_M \, d\sigma_M}{\text{vol. } V} \tag{10}$$

cînd suprafaţa S se strînge în jurul punctului P în care ea se calculează. (Se poate da şi o definiţie analogă formulei (9')).

Pentru derivata medie $\overline{D}$ se poate da o definiţie asemănătoare.

Aceste definiţii nu presupun existenţa derivatelor parţiale pentru componentele lui ψ.

Plecînd de la formula fundamentală (9) N. Teodorescu [7] a arătat că componentele lui ψ pot fi reprezentate prin următoarea formulă:

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{(\vec{MP}.\vec{\gamma})\ (\vec{n}_M \cdot \gamma)}{\overline{MP}^3}\,\psi_M\, d\sigma_M + \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{(\vec{MP}.\vec{\gamma})}{\overline{MP}^3}\, D\psi_M\, d\omega_M \qquad (11)$$

sau

$$\overline{\psi}_P = \frac{1}{4\pi}\iint_S \overline{\psi}_M \frac{(\vec{n}_M.\vec{\gamma})\ (\vec{MP}.\gamma)}{\overline{MP}^3}\, d\sigma_M + \frac{1}{4\pi}\iiint_V D\overline{\psi}_M\ \frac{(\vec{MP}.\gamma)}{\overline{MP}^3}\ d\omega_M\,, \qquad (11')$$

unde S este suprafaţa care mărgineşte volumul V, dotată cu normală în fiecare punct, funcţia ψ ($\overline{\psi}$) este continuă pe S iar $D\psi$ ($D\overline{\psi}$) mărginită şi integrabilă în V.

După definiţia dată de acad. Gr. C. Moisil [3] se numesc funcţii olomorfe într-un domeniu Ω funcţiile ψ de componente continue, avînd derivate parţiale continue şi care satisfac condiţia

$$D\,\psi = 0$$

în toate punctele domeniului Ω. N. Teodorescu [7] a numit funcţii monogene (α) într-un domeniu Ω funcţiile care admit o derivată areolară în Ω. Atunci cînd derivata areolară este continuă în Ω, funcţiile au fost numite olomorfe (α).

Şi în acest caz funcţiile olomorfe vor juca rolul de constante faţă de integrarea în raport cu derivata areolară.

În aceste condiţii, vom numi la fel ca în plan, polinom areolar de ordinul n, funcţia ψ (matrice) olomorfă (α) care are derivata de ordinul n olomorfă în sensul dat de Gr. C. Moisil şi N. Teodorescu.

Se observă că în acest caz

$$D^{n+1}\,\psi = 0$$

şi

$$\overline{D}^{n+1}\,D^{n+1}\,\psi = \Delta^{n+1}\,\psi = 0\,.$$

Deci, polinomul areolar va fi o funcţie poliarmonică în spaţiul cu 3 dimensiuni.

Pentru calculul polinomului areolar de ordinul n vom folosi definiţia largă a derivatei areolare, aşa cum s-a folosit şi în plan.

Vom începe prin a studia polinomul de ordinul I.

4. Polinomul arcolar de ordinul I. Enunţarea problemei

Să presupunem cazul cel mai simplu al funcţiilor olomorfe, cînd componentele lui ψ satisfac relaţia

$$D\,\psi = 0.$$

Atunci ψ poate fi reprezentată ([3], [4], [7]), conform formulei (11), prin

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})\,(\overrightarrow{n_M} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^3}\, \psi_M\, d\sigma_M \tag{12}$$

și în acest caz

$$\bar{D} D\,\psi = \Delta\psi = 0,$$

deci componentele lui ψ sînt funcții armonice în spațiul cu 3 dimensiuni și reprezentarea lor este dată de formula (12).

În cazul polinomului de ordinul I va trebui să presupunem că ψ admite ca derivată areolară o funcție olomorfă, adică

$$D\,\psi = \varphi\,, \tag{13}$$

unde φ este o funcție olomorfă și deci admite o reprezentare de forma (12).

Datorită condiției suplimentare (13), vom înlocui integrala de volum în expresia lui ψ din (11), printr-o integrală de suprafață, pentru a obține o formulă integrală pentru polinomul de ordinul I asemănătoare cu aceea din plan [6], adică să obținem expresia lui ψ într-un punct din volumul Ω în funcție de valorile lui ψ și ale derivatei sale areolare $D\psi$ pe suprafața Σ care mărginește volumul Ω. Aceasta revine la a integra sistemul (1) în condiția (13).

Polinomul areolar de ordinul I astfel construit va reprezenta și o funcție biarmonică deoarece

$$\bar{D}^2 D^2\psi = \Delta^2\psi = 0$$

căci

$$D^2\psi = 0.$$

Pentru a determina expresia lui ψ în aceste condiții vom pleca de la formula (11):

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})\,(\overrightarrow{n_M} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^3}\, \psi_M\, d\sigma_M + \frac{1}{4\pi} \iiint_\Omega \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{QP}^3}\, \psi_Q\, d\omega_Q\,, \tag{14}$$

unde valoarea lui ψ se calculează într-un punct fix P din interiorul volumului Ω. Punctul M se află pe suprafața Σ care mărginește volumul Ω iar Q este un punct variabil în interiorul lui Ω (fig. 1).

Funcția φ fiind olomorfă, va admite o reprezentare de forma (12), adică

$$\varphi_Q = \frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})\,(\overrightarrow{n_M} \cdot \gamma)}{\overline{MQ}^3}\, \varphi_M\, d\sigma_M\,. \tag{15}$$

Expresia lui φ_Q din (15) o vom înlocui în (14).

Să calculăm integrala

$$A = \frac{1}{4\pi} \iiint_\Omega \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{QP}^3}\, \varphi_Q\, d\omega_Q = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega - \Omega'} \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{QP}^3}\, \varphi_Q\, d\omega_Q +$$

$$+ \frac{1}{16\pi^2} \iiint_{\Omega'} \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{QP}^3} \left[\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\, (\overrightarrow{n_M} \cdot \gamma)\, \varphi_M\, d\sigma_M \right] d\omega_Q\,.$$

Deoarece cînd Q ajunge în M integrala prezintă o singularitate, vom despărți integrala de volum în două integrale, una extinsă la $\Omega - \Omega'$ și alta la Ω', unde Ω' este volumul limitat de suprafața Σ' care este interioară lui Ω și foarte aproape de Σ pe care astfel o izolează.

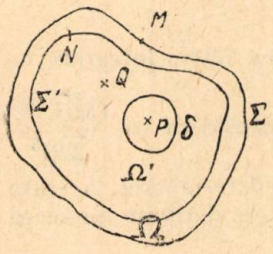

Fig. 1

În acest caz se observă că integrala extinsă la volumul $\Omega - \Omega'$ tinde către zero cînd Ω' tinde către Ω și deci ne va rămîne numai a doua integrală extinsă la Ω'. În această integrală, intervertirea integralei de volum cu aceea de suprafață nu se poate face decît dacă se izolează punctul P printr-o sferă δ de rază suficient de mică.

Fie

$$A_1 = \frac{1}{16\pi^2} \iiint_{\Omega'} \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{QP}^3} \left[\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \varphi_M \, d\sigma_M \right] d\omega_Q =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \iint_{\Sigma} \left[\iiint_{\Omega' - \delta} \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{QP}^3} \frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \, d\omega_Q \right] \varphi_M \, d\sigma_M +$$

$$+ \frac{1}{16\pi^2} \iiint_{\delta} \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{QP}^3} \left[\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \varphi_M \, d\sigma_M \right] d\omega_Q =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \iint_{\Sigma} \left[\iiint_{\Omega'} \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{QP}^3} \frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \, d\omega_Q \right] \varphi_M \, d\sigma_M -$$

$$- \frac{1}{16\pi^2} \iint_{\Sigma} \left[\iiint_{\delta} \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{QP}^3} \frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3} (\vec{n}_M \cdot \gamma) d\omega_Q \right] \varphi_M \, d\sigma_M +$$

$$+ \frac{1}{16\pi^2} \iiint_{\delta} \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{QP}^3} \left[\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \, \varphi_M \, d\sigma_M \right] d\omega_Q .$$

Atunci cînd δ tinde către zero ultimile două integrale se anulează și deci va rămîne numai prima integrală care trebuie calculată:

$$A_2 = \frac{1}{16\pi^2} \iint_{\Sigma} \left[\iiint_{\Omega'} \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{QP}^3} \frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3} d\omega_Q \right] (\vec{n}_M \cdot \gamma) \, \varphi_M \, d\sigma_M .$$

Considerînd analogia cu cazul cînd se folosește în plan variabila complexă z, [6], $\frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}$ ar avea rolul lui $\frac{1}{z-\zeta}$.

Integrala relativă la volumul Ω' se poate transforma într-o integrală de suprafață, conform formulei fundamentale (11), dacă s-ar considera că $\frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}$ este derivata areolară a unei funcții care va trebui să fie determinată. Aceasta echivalează, în plan, cu determinarea unei funcții care are derivata areolară $\frac{1}{z-\zeta}$ și care se știe că este $\frac{\bar{z}}{z-\zeta}$, [6].

Însă, în spațiu, aceasta revine la a determina o matrice care să reprezinte echivalentul lui $\bar{z}$. Spre deosebire de cazul plan, în spațiu se pune problema de a determina un echivalent al lui $\bar{z}$ operator care va diferi de $\bar{z}$ funcție, primul fiind o matrice pătratică iar al doilea o matrice dreptunghiulară (acesta din urmă s-ar putea determina direct știind că $\overline{D}\,\bar{z} = 0$ și $D\bar{z}$ este o matrice dreptunghiulară cu prima linie nulă iar cu celelalte egale cu 1). Echivalentul lui $\bar{z}$ operator va reieși din echivalentul operatorului $\frac{\bar{z}}{z-\zeta}$ singurul care va putea fi determinat direct *). Această deosebire nu există în plan.

În consecință, pentru a putea determina matricea de funcții care să aibă derivata areolară egală cu $\frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}$, va trebui să definim ceea ce vom numi derivata areolară a unei matrici pătratice.

Vom presupune, în cazul de față, că efectuăm derivata areolară sau medie a unei matrici pătratice, atunci cînd efectuăm derivata areolară sau medie pe fiecare coloană separat (fiecare coloană va trebui să fie considerată ca o funcție ψ). Această definiție este justificată deoarece matricea $\frac{(\overrightarrow{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}$ este situată la dreapta nucleului integralei unde de obicei se află o matrice dreptunghiulară coloană (de felul lui ψ).

5. Determinarea în spațiu a echivalentului lui $\bar{z}$ operator

Pentru a determina echivalentul lui z^1 operator, va trebui, după cum am arătat mai sus, să determinăm mai întîi echivalentul operatorului $\frac{\bar{z}}{z-\zeta}$

*) Aceste observații mi-au fost sugerate de prof. N. Teodoroscu și acad. Gr. C. Moisil.

acesta din urmă constituind o primitivă a lui $\frac{1}{z-\zeta}$ față de derivata areolară.

În spațiu va trebui deci, să determinăm o primitivă a matricii $\frac{(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}$ față de derivata areolară (aceasta înseamnă că derivata areolară a funcției căutate trebuie să fie $\frac{(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}$).

După definiția derivatei areolare a unei matrici pătratice, dată mai sus, se observă printr-un calcul simplu că

$$D\frac{(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}=0$$

(în calcul se aplică definiția dată de (5) a derivatei areolare ceea ce înseamnă că se verifică de patru ori sistemul (1), de fiecare dată înlocuind funcțiile componente ale lui ψ cu cîte o coloană de matrice, iar funcțiile Ψ vor reeși nule).

Deci, matricea $\frac{(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}$ este o matrice de patru funcții olomorfe (fiecare coloană constituind o funcție olomorfă în spațiu). Știind că funcțiile olomorfe sînt și funcții armonice, primitiva matricii $\frac{(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}$ față de derivata areolară, va trebui să fie formată din patru funcții matrici dreptunghiulare coloane, (cele patru coloane ale matricii), care să fie funcții biarmonice în spațiu. Elementele matricii $\frac{(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}$ depinzînd numai de distanța $\overline{MQ}$, primitiva față de derivata areolară a acestei matrici va putea fi determinată pornind de la valoarea funcției biarmonice elementare în spațiul cu trei dimensiuni. Se știe că aceasta este $\overline{MQ}$ [5].

Să considerăm grad $\overline{MQ}=\frac{\vec{MQ}}{\overline{MQ}}$ (această operație echivalează cu o derivată medie). Să aplicăm acum derivata medie următoarei matrici (în loc de $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, vom scrie spre simplificare x, y, z):

$$\bar{D}\left(-\frac{1}{2}\frac{(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\right)=-\bar{D}\left\{\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{Vmatrix}0 & x & y & z\\ x & 0 & z & -y\\ y & -z & 0 & x\\ z & y & -x & 0\end{Vmatrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{Vmatrix}-(x^2+y^2+z^2) & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^2 & xy & xz\\ 0 & xy & y^2 & yz\\ 0 & xz & yz & z^2\end{Vmatrix}$$

Derivata areolară a acestei matrici este tocmai matricea căutată

$$D\left\{\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left\|\begin{matrix}-(x^2+y^2+z^2) & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^2 & xy & xz\\ 0 & xy & y^2 & yz\\ 0 & xz & yz & z^2\end{matrix}\right\|\right\}=\frac{(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}.$$

Această matrice se poate pune sub forma unui produs de matrici, unul din factori fiind chiar matricea $\frac{(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}$.

Se știe că $(\vec{MQ}\cdot\gamma)\,(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})=\overline{MQ}^2 e$ și deci înmulțind la stînga matricea de mai sus cu $\frac{(\vec{MQ}\cdot\gamma)}{\overline{MQ}^2}\overline{MQ}^3=\overline{MQ}\,(\vec{MQ}\cdot\gamma)$ se obține

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{MQ}^3}\left\|\begin{matrix}0 & x & y & z\\ x & 0 & -z & y\\ y & z & 0 & -x\\ z & -y & x & 0\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}-(x^2+y^2+z^2) & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^2 & xy & xz\\ 0 & xy & y^2 & yz\\ 0 & xz & yz & z^2\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\left\|\begin{matrix}0 & -x & -y & -z\\ x & 0 & 0 & 0\\ y & 0 & 0 & 0\\ z & 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|=-\left\{\frac{1}{2}[(\vec{MQ}\cdot\gamma)+(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})]\,a\right\},$$

unde

$$a=\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{matrix}\right\|.$$

Deci primitiva căutată va fi

$$\frac{(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\left[-\left\{\frac{1}{2}[(\vec{MQ}\cdot\gamma)+(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})]\,a\right\}\right]=-\frac{1}{\overline{MQ}^3}\left\{\frac{1}{2}[\overline{MQ}^2 e+(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})^2]\,a\right\}\quad(16)$$

unde notînd cu

$$\xi^1(M,Q)=-\left\{\frac{1}{2}[(\vec{MQ}\cdot\gamma)+(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})]\,a\right\}\quad(16')$$

se obține

$$D\left[\frac{(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M,Q)\right]=\frac{(\vec{MQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3}.\quad(16'')$$

Am considerat factorul $\xi^1(M, P)$ la dreapta pentru că el fiind echivalentul lui $\overline{z} - \overline{z}_0$ se bucură de proprietatea

$$D\left[\frac{(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,\xi^1(O, P)\right]_P = \frac{(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}$$

unde O este originea. Această proprietate nu mai este adevărată pentru cazul cînd se ia factorul ξ^{*1} la stînga, care are următoarea expresie

$$\xi^{*1}(M, Q) = -\frac{1}{2}\,a\,[(\overrightarrow{MQ}.\gamma) + (\overrightarrow{MQ}.\overline{\gamma})] \qquad (16''')$$

însă calculul polinomului cu operatorul ξ^{*1} la stînga nu diferă de cel cu operatorul la dreapta.

Operatorii ξ^1 sau ξ^{*1} vor reprezenta echivalenții la dreapta sau la stînga ai operatorului $\overline{z}-\overline{z}_0$ în spațiu.

6. Expresia polinomului de ordinul I

Aplicînd formula (11) funcției $\dfrac{(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,\xi^1(M,P)$ pentru domeniul Ω' limitat de suprafața Σ', vom avea

$$\frac{(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,\xi^1(M,P) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma'}\frac{(\overrightarrow{NP}.\overline{\gamma})\,(\overrightarrow{n}_N.\gamma)}{\overline{NP}^3}\left[\frac{(\overrightarrow{MN}.\overline{\gamma})}{\overline{MN}^3}\,\xi^1(M,N)\right]d\sigma_N +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega'}\frac{(\overrightarrow{QP}.\overline{\gamma})}{\overline{QP}^3}\,\frac{(\overrightarrow{MQ}.\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\,d\omega_Q,$$

unde N este un punct de pe suprafața Σ'.
Atunci termenul A_2 devine

$$A_2 = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\;\xi^1(M,P)\,(\overrightarrow{n}_M.\gamma)\;\varphi_M\,d\sigma_N -$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\iint_{\Sigma}\left[\iint_{\Sigma'}\frac{(\overrightarrow{NP}.\overline{\gamma})}{\overline{NP}^3}\,(\overrightarrow{n}_N.\gamma)\,\frac{(\overrightarrow{MN}.\overline{\gamma})}{\overline{MN}^3}\,\xi^1(M,N)\,d\sigma_N\right](\overrightarrow{n}_M.\gamma)\,\varphi_M\,d\sigma_N =$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,\xi^1(M,P)\,(\overrightarrow{n}_M.\gamma)\,\varphi_M\,d\sigma_M -$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\iint_{\Sigma'}\frac{(\overrightarrow{NP}.\overline{\gamma})}{\overline{NP}^3}\,(\overrightarrow{n}_N.\gamma)\left[\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MN}.\overline{\gamma})}{\overline{MN}^3}\,\xi^1(M,N)\,(\overrightarrow{n}_M.\gamma)\,\varphi_M\,d\sigma_M\right]d\sigma_N$$

Notăm cu

$$\psi_{10N} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MN}.\overline{\gamma})}{\overline{MN}^3} \xi^1 (M, N) (\overrightarrow{n_M}.\gamma) D\psi_M \, d\sigma_M .$$

Deci cînd facem pe Σ' să tindă către Σ, integrala ψ_{10_N} are sens cînd N se va afla pe Σ căci $D\psi_M$ fiind continuă pe Σ e și mărginită iar A_2 devine

$$\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{(\overrightarrow{QP}.\overline{\gamma})}{\overline{QP}^3} D\psi_Q \, d\omega_Q = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3} \xi^1 (M, P) (\overrightarrow{n_M}.\gamma) D\psi_M \, d\sigma_M -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3} (\overrightarrow{n_M}.\gamma) \psi_{10M} \, d\sigma_M .$$

(Funcția ψ_{10N} este continuă și deci integrabilă căci integrala care o reprezintă este uniform convergentă).

A treia integrală reprezintă o funcție cu derivata areolară nulă și deci o funcție olomorfă. Aceasta rezultă dintr-o teoremă demonstrată de N. Teodorescu în [7] care arată că fiind dată o funcție φ de componente continue, atunci

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3} (\overrightarrow{n_M}.\gamma) \varphi_M \, d\sigma_M$$

reprezintă o funcție olomorfă.

Expresia (14) a lui ψ va deveni atunci

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3} (\overrightarrow{n_M}.\gamma) \, [\psi_M - \psi_{10M}] \, d\sigma_M +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3} \xi^1 (M, P) (\overrightarrow{n_M}.\gamma) D\psi_M \, d\sigma_M \qquad (17)$$

care reprezintă expresia polinomului areolar de ordinul I. Se observă că formula corespunde celei obținute în plan [6], căci prima integrală este o funcție olomorfă, iar celei de a doua dacă i se scoate termenul $\xi^1 (M,P)$, ceea ce rămîne reprezintă de asemenea o funcție olomorfă. Termenul $\xi^1 (M,P)$ este deci echivalentul lui $\overline{z}-\overline{z}_0$ din plan.

7. Verificarea formulei (17)

La determinarea acestui polinom s-a folosit definiția largă a derivatei areolare, pornind de la formula fundamentală (9). Într-adevăr, să verificăm calculul derivatei areolare a lui ψ_P prin această formulă *). Știind că prima inte-

*) Faptul că s-a utilizat derivata areolară în sens larg reiese și din modul de calcul de pînă acum. Rolul acestei verificări este de a arăta cum se calculează derivata areolară a diverselor integrale.

grală are derivata areolară nulă, vom calcula derivata areolară numai pentru a doua integrală (fig. 2):

$$\iiint_D D\psi_Q \, d\omega_Q = -\frac{1}{4\pi} \iint_S (\vec{n}_P \cdot \gamma) \left[\iint_\Sigma \frac{(\vec{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^3} \xi^1(M,P) (\vec{n}_M \cdot \gamma) \varphi_M \, d\sigma_M \right] d\sigma_P$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \left[\iint_S (\vec{n}_P \cdot \gamma) \frac{(\vec{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^3} \xi^1(M,P) \, d\sigma_P \right] (\vec{n}_M \cdot \gamma) \varphi_M d\sigma_M .$$

Însă pentru funcția $\dfrac{(\vec{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^3} \xi^1(M,P)$, ținînd seama de (16''), formula fundamentală (9) devine

$$\iint_S (\vec{n}_P \cdot \gamma) \frac{(\vec{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^3} \xi^1(M,P) \, d\sigma_P = -\iiint_D \frac{(\vec{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3} d\omega_Q$$

deci:

$$\iiint_D D\psi_Q \, d\omega_Q = \frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \left[\iiint_D \frac{(\vec{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3} d\omega_Q \right] (\vec{n}_M \cdot \gamma) \varphi_M \, d\sigma_M =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\iint_\Sigma \frac{(\vec{MQ} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MQ}^3} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \varphi_M \, d\sigma_M \right] d\omega_Q = \frac{1}{4\pi} \iiint_D \varphi_Q \, d\omega_Q$$

căci φ are derivata areolară nulă și admite reprezentarea (15). De aici rezultă că $D\psi_Q = \varphi_Q$ în orice punct din interiorul lui Ω după definiția în sens larg a derivatei areolare.

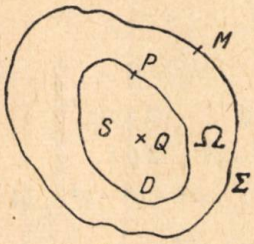

Fig. 2

Formula (17) a polinomului areolar de ordinul I reprezintă soluția sistemului (1) cînd funcțiile Ψ admit derivată areolară ξ nulă și ψ satisface ecuația $\Delta^2\psi = 0$ care arată că este o funcție biarmonică.

Expresia (17) a polinomului areolar de ordinul I generalizează funcțiile liniare, funcțiile olomorfe jucînd rolul de constante.

În cazul cînd se folosește operatorul $\xi^{*1}(M,P)$ la stînga, polinomul ψ_P poate fi pus sub forma

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \frac{(\vec{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^3} (\vec{n}_M \cdot \gamma) [\psi_M - \psi_{10M}] \, d\sigma_M +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \xi^{*1}(M,P) \frac{(\vec{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^3} (\vec{n}_M \cdot \gamma) D\psi_M \, d\sigma_M , \qquad (17')$$

unde în acest caz

$$\psi_{10_M} = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \xi^{*1}(N, M)\, \frac{(\overrightarrow{NM}.\overline{\gamma})}{\overline{NM}^3}(\overrightarrow{n_N}.\gamma)\, D\psi_N\, d\sigma_N .$$

Calculul se face identic ca în cazul operatorului la dreapta.

8. Puterile superioare ale operatorilor eechivalenţi al lui $\bar{z}$ în spaţiu

Pentru calculele ulterioare sînt necesare cîteva relaţii (în loc de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, corespunzătoare celor două puncte P şi M vom scrie numai x, y, z, spre a simplifica scrisul)

$$(\overrightarrow{MP}.\gamma) = \begin{Vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & -z & y \\ y & z & 0 & -x \\ z & -y & x & 0 \end{Vmatrix}$$

$$(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma}) = \begin{Vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & -y \\ y & -z & 0 & x \\ z & y & -x & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{cases} (\overrightarrow{MP}.\gamma)\ (\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma}) = (\overrightarrow{MP}.\gamma)\ (\overrightarrow{MP}.\gamma) = (\overline{MP}^2 e \\ (\overrightarrow{MP}.\gamma)^2 = (\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})^2 = \begin{Vmatrix} x^2+y^2+z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2-y^2-z^2 & 2xy & 2xz \\ 0 & 2xy & y^2-z^2-x^2 & 2yz \\ 0 & 2xz & 2yz & z^2-y^2-x^2 \end{Vmatrix} \\ (\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})^3 = \overline{MP}^2 (\overrightarrow{MP}.\gamma) \qquad (\overrightarrow{MP}.\gamma)^3 = \overline{MP}^2 (\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma}) \\ (\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})^4 = \overline{MP}^4 e \qquad (MP.\overrightarrow{\gamma})^4 = \overline{MP}^4 e \\ (\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})^5 = \overline{MP}^4 (\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma}) \qquad (\overrightarrow{MP}.\gamma)^5 = \overline{MP}^4 (\overrightarrow{MP}.\gamma) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{18}$$

După felul cum a fost dedus polinomul de ordinul I se observă că pentru polinoamele de ordin superior trebuie să se determine primitivele de ordin su-

perior față de derivata areolară ale matricii $\frac{(\vec{MP}.\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}$. Este destul de probabil ca forma expresiei lor să aibă tot o perioadă egală cu 4 cum o au și puterile lui $(\vec{MP}.\gamma)$ sau $(\vec{MP}.\bar{\gamma})$. Deci primele patru primitive succesive ale matricii $\frac{(\vec{MP}.\bar{\gamma})}{MP^3}$ vor trebui să fie deduse direct pornind de la expresia funcțiilor poliarmonice elementare în spațiul cu 3 dimensiuni.

Se știe că [5], funcția elementară în spațiul cu 3 dimensiuni care satisface ecuația

$$\Delta^p V_p = 0$$

este

$$V_p = \frac{1}{\overline{MP}^{3-2p}}$$

care se numește funcția poliarmonică elementară de ordinul p în spațiul cu 3 dimensiuni.

Pornind de la aceste expresii, se găsesc următoarele relații:

$$D\left[-\frac{(\vec{MP}.\gamma)}{2\overline{MP}}\right] = -\frac{1}{\overline{MP}^3}\left\{\frac{1}{2}\left[\overline{MP}^2 e + (\vec{MP}.\bar{\gamma})^2\right] a\right\},$$

$$D\left[-\frac{1}{2.1}\overline{MP}\, e\right] = -\frac{1}{2}\frac{(\vec{MP}.\gamma)}{\overline{MP}},$$

$$D\left[-\frac{1}{2.1.(3+1)}\overline{MP}(\vec{MP}.\bar{\gamma})\right] = -\frac{1}{2.1}\overline{MP}\, e.$$

Pentru deducerea acestor relații se procedează analog ca la polinomul de ordinul I ținînd seama de relațiile (18).

Vom obține următoarele forme echivalente cu operatorii de variabilă complexă din plan

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{z}}{z} \sim -\dfrac{1}{\overline{MP}^3}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\overline{MP}^2 e + (\vec{MP}.\bar{\gamma})^2\right] a\right\} \\ \dfrac{1}{2!}\dfrac{\bar{z}^2}{z} \sim -\dfrac{1}{2}\dfrac{(\vec{MP}.\gamma)}{\overline{MP}} \\ \dfrac{1}{3!}\dfrac{\bar{z}^3}{z} \sim -\dfrac{1}{2.1}\overline{MP}\, e \\ \dfrac{1}{4!}\dfrac{\bar{z}^4}{z} \sim -\dfrac{1}{2.1.(3+1)}\overline{MP}(\vec{MP}.\bar{\gamma}). \end{cases} \tag{19}$$

În continuare celelalte expresii vor avea forme asemănătoare și deci pentru $n \geqslant 1$ vom avea

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\mathrm{i}}{(4n+1)!}\dfrac{\bar{z}^{4n+1}}{z} \sim -\dfrac{\left\{\dfrac{1}{2}\,[\overline{MP}^2 e+(\vec{MP}.\gamma)^2]a+2\,n\,(\vec{MP}.\bar{\gamma})^2\right\} MP^{4n-3}}{2^n.1\,(3+1)(2+1)(2+1)\ldots([1+4(n-1)][3+1+4(n-1)](2n+1)[2+1+4(n-1)]} \\
\dfrac{1}{(4n+2)!}\dfrac{\bar{z}^{4n+2}}{z} \sim -\dfrac{\overline{MP}^{4n-1}(\vec{MP}.\gamma)}{2^{n+1}.1\,(3+1)\,(2+1)\,(2+1)\cdots[1+4\,(n-1)]\,[3+1+4\,(n-1)]\,(2n+1)\,[2+1+4\,(n-1)]} \\
\dfrac{1}{(4n+3)!}\dfrac{\bar{z}^{4n+3}}{z} \sim -\dfrac{\overline{MP}^{4n+1}\,e}{2^{n+1}.1\,(3+1)\,(2+1)\,(2+1)\cdots[3+1+4\,(n-1)]\,(2n+1)\,[2+1+4\,(n-1)]\,[1+4\,n]} \\
\dfrac{1}{[4(n+1)]!}\dfrac{\bar{z}^{4(n+1)}}{z} \sim -\dfrac{\overline{MP}^{4n+1}(\vec{MP}.\bar{\gamma})}{2^{n+1}.1(3+1)\,(2+1)\,(2+1)\cdots(2n+1)\,[2+1+4\,(n-1)].[1+4n]\,[3+1+4n].}
\end{array}\right. \tag{20}$$

Pentru a demonstra valabilitatea formulelor (20) se procedează prin recurență. Deoarece formulele (19) au fost demonstrate direct, să presupunem deci că formulele (20) sînt valabile pentru un n dat și vom căuta să deducem echivalentul lui $\dfrac{\bar{z}^{4n+5}}{(4n+5)!\,z}$ ca o consecință a lor. Deoarece nu există un procedeu de integrare directă va trebui să-l presupunem pe $\dfrac{\bar{z}^{4n+5}}{(4n+5)!\,z}$ cunoscut și să verificăm prin derivări că obținem toți termenii pînă la $\dfrac{\bar{z}^{4n+1}}{(4n+1)!\,z}$.

Presupun deci că

$$\frac{1}{(4n+5)!}\frac{\bar{z}^{4n+5}}{z} \sim -\frac{\left\{\dfrac{1}{2}\,[\overline{MP}^2\,e+(\vec{MP}.\bar{\gamma})^2]\,a+2\,(n+1)\,(\vec{MP}.\bar{\gamma})^2\right\}\overline{MP}^{4n+1}}{2^{n+1}.1\,(3+1)\,(2+1)\,(2+1)\ldots(1+4n)\,(3+1+4n)\,[2(n+1)+1]\,[2+1+4n]}$$

Derivata areolară va fi (în loc de $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ vom scrie numai x, y, z, pentru a simplifica scrisul):

$$D\left[-\left\{\frac{1}{2}[\overline{MP}^2 e + (\vec{MP}\cdot\bar{\gamma})^2]a + 2(n+1)(\vec{MP}\cdot\bar{\gamma})^2\right\}\overline{MP}^{4n+1}\right] =$$

$$= D\left\{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4n+1}{2}}\left[\begin{vmatrix} -(x^2+y^2+z^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & xy & xz \\ 0 & xy & y^2 & yz \\ 0 & xz & yz & z^2 \end{vmatrix} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -2(n+1)\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2-y^2-z^2 & 2xy & 2xz \\ 0 & 2xy & y^2-z^2-x^2 & 2yz \\ 0 & 2xz & 2yz & z^2-y^2-x^2 \end{vmatrix}\right]\right\} =$$

$$= -D\left\{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4n+1}{2}}\begin{vmatrix} (2n+3)(x^2+y^2+z^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2n+1)x^2 - 2(n+1)(y^2+z^2) & (4n+3)xy & (4n+3)xz \\ 0 & (4n+3)xy & (2n+1)z^2 - 2(n+1)(x^2+z^2) & (4n+3)yz \\ 0 & (4n+3)xz & (4n+3)yz & (2n+1)z^2 - 2(n+1)(n^2+y^2) \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= -(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4n-1}{2}}\begin{vmatrix} 0 & [2(n+1)+1](2+1+4n)x(x^2+y^2+z^2) & [2(n+1)+1](2+1+4n)y(x^2+y^2+z^2) & [2(n+1)+1][2+1+4n]z(x^2+y^2+z^2) \\ [2(n+1)+1](2+1+4n)x(x^2+y^2+z^2) & 0 & [2(n+1)+1][2+1+4n]z(x^2+y^2+z^2) & -[2(n+1)+1](2+1+4n)y(x^2+y^2+z^2) \\ [2(n+1)+1][2+1+4n]y(x^2+y^2+z^2) & -[2(n+1)+1][2+1+4n]z(x^2+y^2+z^2) & 0 & [2(n+1)+1](2+1+4n)x(x^2+y^2+z^2) \\ [2(n+1)+1][2+1+4n]z(x^2+y^2+z^2) & [2(n+1)+1][2+1+4n]y(x^2+y^2+z^2) & -[2(n+1)+1](2+1+4n)x(x^2+y^2+z^2) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -[2(n+1)+1](2+1+4n)[x^2+y^2+z^2]^{\frac{4n+1}{2}} \begin{Vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & -y \\ y & -z & 0 & x \\ z & y & -x & 0 \end{Vmatrix} = -[2(n+1)+1](2+1+4n)\overline{MP}^{4n+1}(\vec{MP}.\bar{\gamma})$$

şi se obţine că

$$\frac{1}{[4(n+1)]!}\frac{\bar{z}^{4(n+1)}}{z^{\sim}} \frac{\overline{MP}^{4n+1}(\vec{MP}.\bar{\gamma})}{2^{n+1}.1(3+1)(2+1)(2+1)\ldots(2n+1)[2+1+4(n-1)][(1+4n)[3+1+4n]}$$

adică tocmai expresia prevăzută în formulele (20).

Să calculăm derivata areolară a termenului precedent. Va trebui să obţinem echivalentul $\frac{\bar{z}^{4n+3}}{(4n+3)!\,z}$ din formulele (20).

Într-adevăr

$$D[-\overline{MP}^{4n+1}(\vec{MP}.\bar{\gamma})] = -D\left\{[x^2+y^2+z^2]^{\frac{4n+1}{2}} \begin{Vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & -y \\ y & -z & 0 & x \\ z & y & -x & 0 \end{Vmatrix}\right\} =$$

$$= -[x^2+y^2+z^2]^{\frac{4n-1}{2}} \begin{Vmatrix} (3+1+4n)(x^2+y^2+z^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (3+1+4n)(x^2+y^2+z^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3+1+4n)(x^2+y^2+z^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (3+1+4n)(x^2+y^2+z^3) \end{Vmatrix} =$$

$$= -(3+1+4n)[x^2+y^2+z^2]^{\frac{4n+1}{2}} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = -(3+1+4n)\,\overline{MP}^{4n+1}\,e$$

şi se obţine deci

$$\frac{1}{(4n+3)!}\frac{\bar{z}^{4n+3}}{z} \sim -\frac{\overline{MP}^{4n+1}\, e}{2^{n+1}\cdot 1(3+1)(2+1)(2+1)\ldots[3+1+4(n-1)](2n+1)[(2+1+4(n-1)](1+4n)}$$

valoare care există în formulele (20).

Derivînd mai departe se obţine

$$D[-\overline{MP}^{4n+1} e] = -D(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4n+1}{2}} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= -(1+4n)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4n-1}{2}} \begin{Vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & -z & y \\ y & z & 0 & -x \\ z & -y & x & 0 \end{Vmatrix} = -(1+4n)\,\overline{MP}^{4n-1}(\vec{MP}\,.\,\gamma)$$

şi deci

$$\frac{1}{(4n+2)!}\frac{\bar{z}^{4n+2}}{z} \sim -\frac{\overline{MP}^{4n-1}(\vec{MP}\,.\,\gamma)}{2^{n+1}\,.\,1(3+1)\,(2+1)\,(2+1)\ldots[1+4(n-1)][3+1+4(n-1)]\,(2n+1)\,[2+1+4(n-1)]}$$

a cărui expresie coincide cu aceea din formulele (20).

Mai departe vom avea

$$D[-\overline{MP}^{4n-1}(\vec{MP}\,.\,\gamma)] = -D\left\{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4n-1}{2}} \begin{Vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & -z & y \\ y & z & 0 & -x \\ z & -y & x & 0 \end{Vmatrix}\right\} =$$

$$= -(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4n-3}{2}} \begin{Vmatrix} 2(2n+1)(x^2+y^2+z^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(2n+1)x^2 - 4n(y^2+z^2) & 2(4n-1)xy & 2(4n-1)xz \\ 0 & 2(4n-1)xy & 2(2n-1)y^2 - 4n(x^2+z^2) & 2(4n-1)yz \\ 0 & 2(4n-1)xz & 2(4n-1)yz & 2(2n-1)z^2 - 4n(x^2+y^2) \end{Vmatrix} =$$

$$= 2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4n-3}{2}} \left\{ \begin{Vmatrix} -(x^2+y^2+z^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & xy & xz \\ 0 & xy & y^2 & yz \\ 0 & xz & yz & z^2 \end{Vmatrix} - \right.$$

$$\left. - 2n \begin{Vmatrix} x^2+y^2+z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2-y^2-z^2 & 2xy & 2xz \\ 0 & 2xy & y^2-x^2-z^2 & 2yz \\ 0 & 2xz & 2yz & z^2-x^2-y^2 \end{Vmatrix} \right\} =$$

$$= -2\overline{MP}^{4n-3} \left\{ \frac{1}{2} [\overline{MP}^2 e + (\vec{MP} \cdot \bar{\gamma})^2] a + 2n (\vec{MP} \cdot \bar{\gamma})^2 \right\}.$$

și deci

$$\frac{1}{(4n+1)!} \frac{\bar{z}^{4n+1}}{z} \sim - \frac{\overline{MP}^{4n-3} \left\{ \frac{1}{2} [\overline{MP}^2 e + (\vec{MP} \cdot \bar{\gamma})^2] a + 2n (\vec{MP} \cdot \bar{\gamma})^2 \right\}}{2^n \cdot 1 (3+1)(2+1)(2+1) \ldots [1+4(n-1)][3+1+4(n-1)](2n+1)[2+1+4(n-1)]}$$

care coincide cu expresia din formulele (20). Deci, prin procedeul de demonstrație prin recurență am arătat valabilitatea formulelor (20) pentru orice n.

În formulele (19) și (20) dînd factor comun la stînga pe $\frac{(\vec{MP}\,.\,\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}$ care este echivalentul lui $\frac{1}{z}$ și folosind relațiile (18), se obțin echivalenții puterilor lui $\bar{z}$ la dreapta și anume:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{z} &\sim -\left\{\frac{1}{2}\left[(\vec{MP}\,.\gamma)+(\vec{MP}\,.\,\bar{\gamma})\right]a\right\} = \xi^1(M,\ P)\\
\frac{\bar{z}^2}{2\,!} &\sim -\ \frac{1}{1.2}(\vec{MP}\,.\gamma)^2 = \xi^2(M,\ P)\\
\frac{\bar{z}^3}{3\,!} &\sim -\ \frac{1}{2.1}\ \overline{MP}^2(\vec{MP}\,.\gamma) = \xi^3(M,P)\\
\frac{\bar{z}^4}{4\,!} &\sim -\ \frac{1}{2.1\ (3+1)}\overline{MP}^4 e = \xi^4(M,\ P)
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

și pentru $n \geqslant 1$ avem

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\bar{z}^{4n+1}}{(4n+1)\,!} &\sim -\frac{\overline{MP}^{4n}\left\{\frac{1}{2}[(\vec{MP}.\gamma)+(\vec{MP}.\gamma)]\,a+2n\,(\vec{MP}.\bar{\gamma})\right\}}{2^n.\,1\,(3+1)(2+1)(2+1)\ldots[1+4\,(n-1)]\,[3+1+4(n-1)]\,(2n+1)\,[2+1+4(n-1)]} = \xi^{4n+1}(M,P)\\
\frac{\bar{z}^{4n+2}}{(4n+2)\,!} &\sim -\frac{\overline{MP}^{4n}\,(\vec{MP}\,.\,\bar{\gamma})^2}{2^{n+1}1(3+1)(2+1)(2+1)\ldots[1+4(n-1)][3+1+4(n-1)](2n+1)[2+1+4(n-1)]} = \xi^{4n+2}(M,P)\\
\frac{\bar{z}^{4n+3}}{(4n+3)\,!} &\sim -\frac{\overline{MP}^{4n+2}\,(\vec{MP}\,.\,\gamma)}{2^{n+1}\,1(3+1)\,(2+1)\,(2+1)\ldots[3+1+4\,(n-1)]\,(2n+1)\,[2+1+4\,(n-1)]\,(1+4n)} = \xi^{4n+3}(M,\ P)\\
\frac{\bar{z}^{(4n+1)}}{4\,(n+1)\,!} &\sim -\frac{\overline{MP}^{\,4(n+1)}\,e}{2^{n+1}.\,1\,(3+1)\,(2+1)\,(2+1)\ldots(2n+1)\,[2+1+4\,(n-1)].\,(1+4n)\,[3+1+4n]} = \xi^{4(n+1)}(M,P)
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Se vede că expresiile lui ξ^k au forme care se repetă din 4 în 4.

Atunci cînd se folosesc echivalenţii lui $\bar{z}^n$ la stînga, se obţin următorii operatori:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi^{*1}(M,\ P) = -\frac{1}{2}\, a\,[(\vec{MP}\,.\,\gamma) + (\vec{MP}\,.\,\bar{\gamma})]\\
&\xi^{*2}(M,\ P) = \xi^{2}(M,\ P)\\
&\xi^{*3}(M,\ P) = \xi^{3}(M,\ P)\\
&\xi^{*4}(M,\ P) = \xi^{4}(M,\ P)\\
&\xi^{*4n+1}(M,\ P) = -\frac{\overline{MP}^{4n}\left\{\frac{1}{2}\, a\,[(\vec{MP}\,.\,\gamma) + (\vec{MP}\,.\,\bar{\gamma})] + 2n\,(\vec{MP}\,.\,\bar{\gamma})\right\}}{2^n.\,1\,(3+1)\,(2+1)\,(2+1)\ldots[1+4\,(n-1)]\,[3+1+4\,(n-1)]\,(2n+1)\,[2+1+4\,(n-1)]}\\
&\xi^{*4n+2}(M,\ P) = \xi^{4n+2}(M,\ P)\\
&\xi^{*4n+3}(M,\ P) = \xi^{4n+3}(M,\ P)\\
&\xi^{*4(n+1)}(M,\ P) = \xi^{4(n+1)}(M,\ P).
\end{aligned}\right\} \quad (21')$$

Cu aceste rezultate se poate trece la calculul oricărui polinom de ordin superior lui I. Vom folosi în calcul, operatori la dreapta. Rezultatele se pot transpune cu uşurinţă şi pentru operatorii la stînga.

9. Polinomul areolar de ordinul II

După definiția polinomului areolar, va trebui ca a doua derivată areolară a lui ψ să fie o funcție olomorfă și deci

$$D^2\psi_P = \varphi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\,.\,\overline{\gamma})}{\overline{MP^3}}\,(\overrightarrow{n_M}\,.\,\gamma)\,D^2\psi_M\,d\sigma_M\,. \tag{22}$$

Aplicînd formula (17) a polinomului de ordinul I expresia lui $D\psi$ va fi

$$D\psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\,.\,\overline{\gamma})}{\overline{MP^3}}\,(\overrightarrow{n}_M\,.\,\gamma)\,(D\psi_M - \psi_{11M})\,d\sigma_M +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\,.\,\overline{\gamma})}{\overline{MP^3}}\,\xi^1(M,\,P)\,(\overrightarrow{n_M}\,.\,\gamma)\,D^2\psi_M\,d\sigma_M \tag{23}$$

Formula de reprezentare (11) ne dă

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\,.\,\overline{\gamma})}{\overline{MP^3}}\,(\overrightarrow{n_M}\,.\,\gamma)\,\psi_M\,d\sigma_M + \frac{1}{4\pi}\iiint_{D} \frac{(\overrightarrow{QP}\,.\,\overline{\gamma})}{\overline{QP^3}}\,D\psi_Q\,\omega_Q\,.$$

Cînd se înlocuiește $D\psi$ în integrala de volum, ținînd însă seama de calculele făcute la polinomul de ordinul I, se obține

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\,.\,\overline{\gamma})}{\overline{MP^3}}\,(\overrightarrow{n_M}\,.\,\gamma)\,[\psi_M - \psi_{10M}]\,d\sigma_M +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\,.\,\overline{\gamma})}{\overline{MP^3}}\,\xi^1(M,\,P)\,(\overrightarrow{n_M}\,.\,\gamma)\,[D\psi_M - \psi_{11M}]\,d\sigma_M + A,$$

unde am notat cu

$$\psi_{11M} = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{NM}\,.\,\overline{\gamma})}{\overline{NM^3}}\,\xi^1(N,\,M)\,(\overrightarrow{n_N}\,.\,\gamma)\,D^2\,\psi_N\,d\sigma_N$$

$$\psi_{10M} = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{NM}\,.\,\overline{\gamma})}{\overline{NM^3}}\,\xi^1(N,\,M)\,(\overrightarrow{n_N}\,.\,\gamma)\,[D\psi_N - \psi_{11N}]\,d\sigma_N\,.$$

integrale care au sens cînd punctul M se află pe Σ. (Funcțiile ψ_{11M} și ψ_{10M} sînt continue și deci integrabile căci integralele care se prezintă sînt uniform convergente).

Prin A se înțelege termenul care se obține prin înlocuirea celei de a doua integrale din expresia lui $D\psi_Q$ în integrala de volum. Pentru acest calcul se iau precauțiile indicate în figura 1. Vom avea

$$A = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega-\Omega'} \frac{(\overrightarrow{QP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{QP}^3}\left[\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M,Q)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M\,d\sigma_M\right]d\omega_Q +$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\iiint\limits_{\Omega'}\frac{(\overrightarrow{QP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{QP}^3}\left[\iint\limits_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M,Q)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M\,d\sigma_M\right]d\omega_Q.$$

Cînd $\Omega' \to \Omega$ integrala relativă la domeniul $\Omega - \Omega'$ va tinde către zero și va rămîne numai a doua integrală, la care pentru a putea inversa ordinea de integrare se iau precauțiile indicate la calculul polinomului de ordinul I și astfel va deveni

$$A_1 = \frac{1}{16\pi^2}\iiint\limits_{\Omega'}\frac{(\overrightarrow{QP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{QP}^3}\left[\iint\limits_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\gamma)}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M,Q)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M\,d\sigma_M\right]d\omega_Q =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\iint\limits_{\Sigma}\left[\iiint\limits_{\Omega'-\delta}\frac{(\overrightarrow{QP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{QP}^3}\frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M,Q)\,d\omega_Q\right](\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M d\sigma_M +$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\iiint\limits_{\delta}\frac{(\overrightarrow{QP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{QP}^3}\left[\iint\limits_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M,Q)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M\,d\sigma_M\right]d\omega_Q =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\iint\limits_{\Sigma}\left[\iiint\limits_{\Omega'}\frac{(\overrightarrow{QP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{QP}^3}\frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M,Q)\,d\omega_Q\right](\overrightarrow{n_M}\gamma)\cdot D^2\psi_M\,d\sigma_M -$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\iint\limits_{\Sigma}\left[\iiint\limits_{\delta}\frac{(\overrightarrow{QP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{QP}^3}\frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M,Q)\,d\omega_Q\right](\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M\,d\sigma_M +$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\iiint\limits_{\delta}\frac{(\overrightarrow{QP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{QP}^3}\left[\iint\limits_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M,Q)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M\,d\sigma_M\right]d\omega_Q$$

Cînd δ tinde către zero se observă că ultimele două integrale tind către zero și deci nu va rămîne de calculat decît prima integrală. Pentru calculul acestei integrale este nevoie de o primitivă față de derivata areolară a lui $\frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M,Q)$ care este cunoscută din formulele (19) și (21)

$$D\left[\frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^2(M,Q)\right] = \frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M,Q)$$

Aplicăm acestei primitive formula fundamentală (11)

$$\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^2(M,P)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma'}\frac{(\overrightarrow{NP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{NP}^3}(\overrightarrow{n_N}\cdot\gamma)\left[\frac{(\overrightarrow{MN}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MN}^3}\xi^2(M,N)\right]d\sigma_N+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega'}\frac{(\overrightarrow{QP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{QP}^3}\left[\frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M,Q)\right]d\omega_Q.$$

Ţinînd seama de această relaţie, prima integrală din expresia lui A_1 devine

$$A_2=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^2(M,P)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M\,d\sigma_M-$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\iint_{\Sigma}\left\{\iint_{\Sigma'}\frac{(\overrightarrow{NP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{NP}^3}(\overrightarrow{n_N}\cdot\gamma)\left[\frac{(\overrightarrow{MN}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MN}^3}\xi^2(M,N)\right]d\sigma_N\right\}(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M\,d\sigma_M=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^2(M,P)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M\,d\sigma_M-$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\iint_{\Sigma'}\frac{(\overrightarrow{NP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{NP}^3}(\overrightarrow{n_N}\cdot\gamma)\left[\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MN}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MN}^3}\xi^2(M,N)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M\,d\sigma_M\right]d\sigma_N.$$

Notăm cu

$$\psi_{20N}=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MN}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MN}^3}\xi^2(M,N)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M\,d\sigma_M.$$

Cînd facem suprafaţa Σ' să tindă către Σ, integrala ψ_{20N} are sens căci $D^2\psi_M$ fiind continuă pe Σ este şi mărginită, (integrala care reprezintă, pe ψ_{20} este uniform convergentă şi deci ψ_{20} este continuă şi integrabilă) iar A_2 devine egal cu A şi vom avea

$$A=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^2(M,P)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)D^2\psi_M\,d\sigma_M-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\psi_{20M}\,d\sigma_M$$

și polinomul de ordinul II va avea expresia

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\,[\psi_M - \psi_{10M} - \psi_{20M}]\,d\sigma_M + \tag{24}$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^1(M,P)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\,[D\,\psi_M - \psi_{11M}]\,d\sigma_M +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^2(M,P)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\,D^2\psi_M\,d\sigma_M.$$

10. Verificarea expresiei (24) *)

Să calculăm derivata acestui polinom cu ajutorul formulei fundamentale (9). Acest calcul are rolul de a verifica faptul că s-a folosit expresia în sens larg derivatei areolare și ajută la determinarea derivatelor succesive a diverselor integrale din (24).

Notăm prima integrală cu $\psi_{,0P}$, a doua va fi ψ_{10P}, iar a treia ψ_{20P}. Se știe că $D\psi_{,0Q} = 0$ și $D\psi_{10Q} = \psi_{,1Q}$ unde

$$\psi_{,1Q} = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\,[D\,\psi_M - \psi_{11M}]\,d\sigma_M.$$

este funcția olomorfă care se obține la derivarea unui polinom de ordinul I (s-a arătat la calculul derivatei polinomului de ordinul I).

Se aplică formula fundamentală (9) pentru cea de a treia integrală din (24) (fig. 2)

$$\iiint_D D\psi_{20Q}\,d\omega_Q = -\frac{1}{4\pi}\iint_S (\overrightarrow{n_P}\cdot\gamma)\left[\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^2(M,P)(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\,D^2\psi_M\,d\sigma_M\right]d\sigma_P =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \left[\iint_S (\overrightarrow{n_P}\cdot\gamma)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^2(M,P)\,d\sigma_P\right](\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\,D^2\psi_M\,d\sigma_M.$$

Aplicînd formula (9) pentru $\dfrac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^2(M,P)$ se obține

$$\iint_S (\overrightarrow{n_P}\cdot\gamma)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^2(M,P)\,d\sigma_P = -\iiint_D \frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\xi^1(M\,Q)\,d\omega_Q$$

*) Folosirea derivatei areolare în sens larg pentru polinomul de ordinul II reiese și din modul de calcul de pînă acum. În acest punct se arată cum se calculează derivata areolară a diverselor integrale.

și deci

$$\iiint_D D\psi_{2Q}\,d\omega_Q = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \left[\iiint_D \frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\,\xi^1(M,Q)\,d\omega_Q\right](\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\,D^2\psi_M\,d\sigma_M =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iiint_D\left[\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\,\xi^1(M,Q)\,(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\,D^2\psi_M\,d\sigma_M\right]d\omega_Q = \iiint_D \psi_{11Q}\,d\omega_Q$$

Astfel că

$$D\,\psi_{20Q} = \psi_{11Q}.$$

Deci

$$D\,\psi_Q = \psi_{,1Q} + \psi_{11Q} = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\,[D\,\psi_M - \psi_{11M}]\,d\sigma_M +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}\,\xi^1(M,Q)\,(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\,D^2\psi_M\,d\sigma_M$$

care coincide cu expresia (23) a polinomului de ordinul I. Procedînd la fel

$$D^2\psi_Q = D\,\psi_{,1Q} + D\,\psi_{11Q} = \psi_{,2Q},$$

unde

$$\psi_{,2Q} = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MQ}^3}(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\,D^2\psi_M\,d\sigma_M,$$

este funcția olomorfă care se obține după cea de a doua derivare a unui polinom de ordinul II.

Se observă că $\psi_{,2Q}$ coincide cu φ_Q din (22).

Deci derivata areolară a unui polinom de ordinul II este un polinom de ordinul I și așa mai departe. Datorită notațiilor adoptate ea se poate calcula prin reguli mecanice. Aceste reguli le vom da la polinomul de ordinul n.

Pentru calculul polinomului de ordinul II am folosit definiția în sens larg a derivatei areolare.

11. Polinomul areolar de ordinul n

Polinomul de ordinul n se obține cînd $D^n\psi$ este o funcție olomorfă și expresia lui va fi

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\left[\psi_M - \sum_{i=1}^{n}{}'\,\psi_{i0_M}\right]d\sigma_M +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,\xi^1(M,P)\,(\overrightarrow{n_M}\cdot\gamma)\left[D\,\psi_M - \sum_{i=1}^{n-1}{}'\,\psi_{i1M}\right]d\sigma_M +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\vec{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^2(M,P)(\vec{n}_M\cdot\gamma)\left[D^2\psi_M-\sum_{i=1}^{n-2}\psi_{i2M}\right]d\sigma_M+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\vec{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^k(M,P)(\vec{n}_M\cdot\gamma)\left[D^k\psi_M-\sum_{i=1}^{n-k}\psi_{ikM}\right]d\sigma_M+ \qquad (25)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\vec{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^{n-1}(M,P)(\vec{n}_M\cdot\gamma)\left[D^{n-1}\psi_M-\psi_{1\,n-1M}\right]d\sigma_M+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\vec{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^n(M,P)(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,D^n\psi_M\,d\sigma_M.$$

unde ψ și derivatele ei areolare sînt continue pe Σ, suprafață închisă dotată cu normală în fiecare punct. Am notat cu

$$\psi_{ijP}=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\vec{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}\xi^i(M,P)(\vec{n}_M\cdot\gamma)\left[D^{j+i}\psi_M-\sum_{n=1}^{n-(j+i)}\psi_{hi+jM}\right]d\sigma_M. \qquad (26)$$

Cel de al doilea indice j arată că ψ_{ijP} intervine cu semnul — în integrala de rang j (prima este de rang o și deci $a\,j+1$ este de rang j) și ea se obține din valoarea integralei de rang $i+j$ în care operatorul ξ^{i+j} este schimbat cu operatorul ξ^i (ξ^0 se presupune că este e, matricea unitate).

Deci pentru un polinom de ordinul n putem avea

$$j=0,1,2,\ldots,n-1$$

iar

$$i=1,2,\ldots,n-j.$$

Vom nota cu

$$\begin{cases}\psi_{,kP}=\dfrac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\dfrac{(\vec{MP}.\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}(\vec{n}_M.\gamma)\left[D^k\psi_M-\sum_{i=1}^{n-k}\psi_{ikM}\right]d\sigma_M & k=0,1,\ldots,n-1\\ \psi_{,nP}=\dfrac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\dfrac{(\vec{MP}.\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}(\vec{n}_M.\gamma)\,D^n\psi_M\,d\sigma_M\end{cases} \qquad (27)$$

indicele P arată că valoarea integralei este calculată în punctul P. Se vede că [7]

$$D\,\psi_{,k}\,P=0.$$

Pentru a demonstra valabilitatea formulei (25) se procedează prin recurență. Presupunem că formula este valabilă pentru un polinom de ordinul $n-1$ și căutăm să o deducem pentru un polinom de ordinul n. Procedeul de integrare ar fi tocmai cel folosit la deducerea polinomului de ordinul II. Se

poate însă demonstra și prin verificare, arătînd că derivata areolară a polinomului de ordinul n coincide cu expresia polinomului de ordinul $n-1$ cunoscut (la fel ca la polinomul de ordinul II).

Pentru aceasta va trebui să demonstrăm formula de derivare pentru o integrală de tipul ψ_{ijP}.

Aplicînd formula (9) (calculul fiind asemănător cu cel de la polinomul de ordinul II, nu-l vom repeta), se găsește că

$$\begin{cases} D\psi_{ijP} = \psi_{i-1j+1P} & \text{pentru } \begin{pmatrix} 1 < i < n-j \\ 0 \leqslant j \leqslant n-2 \end{pmatrix} \\ D\psi_{1jP} = \psi_{,j+1P} & \text{pentru } 0 \leqslant j \leqslant n-1 \\ D\psi_{,jP} = 0 & \text{pentru } 0 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \tag{28}$$

Aplicînd formulele (28) polinomului de ordinul n se vede ușor că se obține polinomul de ordinul $n-1$ presupus cunoscut. În deducerea polinomului areolar de ordinul n s-a folosit definiția în sens larg a derivatei areolare. El reprezintă soluția sistemului

$$D^{n+1}\psi_P = 0 \tag{29}$$

și verifică ecuația

$$\Delta^{n+1}\psi_P = 0 \tag{30}$$

adică dă o reprezentare în spațiu a unor funcții poliarmonice de ordinul $n+1$ de forma (29).

Aplicînd succesiv formulele (28) pentru a găsi derivata de ordinul r a lui ψ_{ijP} se găsește că

$$\begin{cases} D^r\psi_{ijP} = \psi_{i-rj+rP} & r < i < n-j;\ 0 \leqslant j \leqslant n-r-1 \\ D^r\psi_{rjP} = \psi_{,j+rP} & 0 \leqslant j \leqslant n-r \\ D^r\psi_{r-1jP} = 0 & 0 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \tag{31}$$

Se observă că la derivarea de ordinul r se micșorează cu r primul indice și se mărește cu r cel de al doilea. Deci

$$\psi_{,kP} = D^i\psi_{ik-iP}.$$

Folosind notațiile de mai sus polinomul de ordinul n are expresia

$$\psi_P = \psi_{,0P} + \psi_{10P} + \psi_{20P} + \ldots + \psi_{k0P} + \psi_{k+10P} + \ldots + \psi_{n0P} \tag{32}$$

Derivata de ordin k va fi

$$D^k\psi_P = \psi_{,kP} + \psi_{1kP} + \psi_{2kP} + \ldots + \psi_{nkP} = \psi_{,kP} + \sum_{i=1}^{n-k}\psi_{ikP}. \tag{33}$$

Din formula (33) rezultă că

$$\psi_{,kP} = D^k\psi_P - \sum_{i=1}^{n-k}\psi_{ikP}. \tag{34}$$

Din relațiile (34) și (27) reiese că expresia $D^k\psi_P - \sum_{i=1}^{n-k}\psi_{kP}$ este o funcție olomorfă.

Din relația (33) funcția $\psi_{,kP}$ are și interpretarea de funcția olomorfă care rezultă după derivarea de k ori a polinomului de ordin n. Funcția $\psi_{,kP}$ joacă rolul unei constante la integrarea în raport cu derivata areolară.

Notăm

$$\psi_{iP} = [\xi^i ; \psi_{,i+j}]_P . \tag{35}$$

Atunci polinomul de ordinul n va avea expresia

$$\psi_P = \psi_{,0P} + [\xi^1 ; \psi_{,1}]_P + [\xi^2 ; \psi_{,2}]_P + \ldots + [\xi^k ; \psi_{,k}]_P + \ldots + [\xi^n ; \psi_{,n}]_P \tag{36}$$

unde $\psi_{,i}$ sînt funcții olomorfe și ξ^i sînt echivalenții lui $\frac{\bar{z}^i}{i!}$ din plan.

Această formă generalizează expresia polinomului areolar din plan care este

$$f(P) = f_0(P) + \bar{z} f_1(P) + \bar{z}^2 f_2(P) + \ldots + \bar{z}^n f_n(P),$$

unde f_n sînt funcții olomorfe [6].

În cazul în care se folosesc operatorii ξ^{*n} la stînga, se pot găsi formule asemănătoare, folosind expresiile (21′) ale operatorilor ξ^{*n}. (În locul operatorilor ξ^k la dreapta matricii $\frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}$ se vor scrie operatorii ξ^{*k} la stînga matricii $\frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}$).

Procedeul de calcul și tot aparatul matematic construit aici poate fi folosit pentru integrarea și a altor sisteme de ecuații cu derivate parțiale asemănătoare celui dat de relațiile (1).

Polinomul areolar astfel construit, ne dă numai o soluție a sistemului (1), și generalizează formula lui Taylor pentru polinoame. Noțiunea aceasta poate fi generalizată și la dezvoltările în serie.

Din formula (25) se vede că ψ_P este reprezentată într-un punct din interiorul domeniului Ω prin valorile ei pe Σ precum și ale derivatelor sale areolare succesive pe Σ.

Astfel de formulă poate fi utilizată cu succes în probleme la limită.

Polinomul de ordinul n este și o funcție poliarmonică, deoarece

$$\Delta^{n+1} \psi_P = 0 .$$

Avantajul calculului matricial este că se lucrează cu expresii în variabilă reală fără a mai fi nevoie să se folosească numerele ipercomplexe.

12. Forma duală a polinomului areolar de ordinul n pentru matrici dreptunghiulare linii

Dacă se pornește de la formula (9′) pentru definiția derivatei areolare, va trebui să se lucreze cu matrici dreptunghiulare linii $\bar{\psi}_P$ în loc de matrici dreptunghiulare coloane ψ_P.

Să presupunem că avem relațiile

$$\dot{\psi} = C \dot{\varphi}$$

unde $\dot{\varphi}$ și $\dot{\psi}$ sînt matrici dreptunghiulare coloane iar C o matrice patratică.

Fie $C = AB$ unde A și B sînt două matrici patratice.
Se știe că

$$\overline{C} = \overline{B}\,\overline{A},$$

unde notăm cu bară matricile transpuse.

Fie de asemenea $\overline{\psi} = \overline{\varphi}\,\overline{C}$ unde $\overline{\varphi}$ și $\overline{\psi}$ sînt matrici dreptunghiulare linii. Dacă elementele matricii φ sînt egale cu cele ale matricei $\overline{\varphi}$ se observă că elementele matricii ψ vor fi egale cu ale matricii $\overline{\psi}$. Bazîndu-ne pe aceste proprietăți se vede că matricele nucleelor integralelor care dau polinomul de ordinul n se vor transpune și se vor permuta între ele.

Se obține deci

$$\overline{\psi}_P = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \left[\overline{\psi}_M - \sum_{i=1}^{n} \overline{\psi}_{io\,M}\right](\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma})\frac{(\vec{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_M +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \left[D\overline{\psi}_M - \sum_{i=1}^{n-1}\overline{\psi}_{i1\,M}\right](\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\overline{\xi}^1(M,P)\frac{(\vec{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_M + \ldots \qquad (37)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \left[D^k\overline{\psi}_M - \sum_{i=1}^{n-k}\overline{\psi}_{ikM}\right](\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\overline{\xi}^k(M,P)\frac{(\vec{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_M +$$

$$\ldots + \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma D^n\overline{\psi}_M\,(\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\overline{\xi}^n(M,P)\,\frac{(\vec{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_M$$

unde $\overline{\psi}$ cît și derivatele ei areolare sînt continue pe Σ, suprafață închisă care admite normală în fiecare punct.

La derivarea unei matrici patratice sau linie se face convenția de derivare pe linie și nu pe coloană.

Am notat cu $\overline{\xi}^k$ transpusa matricii ξ^k, $\overline{\psi}_M$ matricea coloană ψ_M transpusă în linie și

$$\overline{\psi}_{ijP} = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \left[D^{j+i}\overline{\psi}_M - \sum_{n=1}^{n-(j+i)}\psi_{n\,i+j\,M}\right](\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\overline{\xi}^i(M,P)\frac{(\vec{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_M \qquad (38)$$

$$\begin{cases} \overline{\psi}_{,\,kP} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iint_\Sigma \left[D^k\overline{\psi}_M - \sum_{i=1}^{n-k}\overline{\psi}_{ikM}\right](\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\frac{(\vec{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_M & k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \overline{\psi}_{,\,nP} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iint_\Sigma D^n\overline{\psi}_M\,(\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\frac{(\vec{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_M . \end{cases} \qquad (39)$$

Convențiile de derivare (28) și (31) le menținem aceleași și pentru matricile linii ca și pentru matricile coloane.

Notăm de asemenea

$$\overline{\psi}_{ijP} = [\overline{\psi}, {}_{i+j} ; \overline{\xi}^{j}]_P . \tag{40}$$

Atunci vom obține pentru polinomul areolar (37) încă două forme corespunzătoare formelor (32) și (36) și anume:

$$\overline{\psi}_P = \overline{\psi}_{,0P} + \overline{\psi}_{10P} + \ldots + \overline{\psi}_{k0P} + \ldots + \overline{\psi}_{n0P} \tag{41}$$

$$\overline{\psi}_P = \overline{\psi}_{,0P} + [\overline{\psi}_{,1} ; \overline{\xi}^{1}]_P + \ldots + [\overline{\psi}_{,k} ; \overline{\xi}^{k}]_P + \ldots + [\overline{\psi}_{,n} ; \overline{\xi}^{n}]_P . \tag{42}$$

Se observă că prin $\overline{\xi}^{n}$ s-au notat de această dată operatorii la stînga nucleului $\dfrac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^3}$.

Se pot deduce formule asemănătoare lucrînd cu operatorii ξ^{*n} dar de această dată ei vor fi la dreapta nucleului $\dfrac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^3}$.

13. Dezvoltarea unei funcții ψ_P după valorile ei pe Σ și ale derivatelor ei medii pe Σ

Ca exemplu de aplicare a metodei de mai sus și la integrarea altor sisteme asemănătoare cu sistemul (1) vom da rezultatele integrării sistemului (7).

Vom căuta, mai general, să determinăm valoarea unei funcții $\overline{\psi}_P$ într-un punct P din interiorul volumului Ω în funcție de valorile ei și ale derivatelor ei medii pe Σ cînd derivata $\overline{D}^n \psi = \varphi$ este o funcție de componente continue, admițînd derivate parțiale de ordinul I continue și cu derivată medie nulă în orice punct din Ω.

Procedeul de calcul fiind asemănător cu cel de la polinomul areolar de ordinul n, vom da numai rezultatele. Formulele corespunzătoare formulelor (9) și (9′) se pot da și pentru derivata medie

$$\iint_{\Sigma} (\overrightarrow{n_M} \cdot \overline{\gamma})\, \psi_M \, d\sigma_M + \iiint_{\Omega} \overline{D}\, \psi_Q \, d\omega_Q = 0 \tag{43}$$

$$\iint_{\Sigma} \overline{\psi}_M \, (\overrightarrow{n_M} \cdot \gamma)\, d\sigma_M + \iiint_{\Omega} \overline{D}\, \overline{\psi}_Q \, d\omega_Q = 0 \tag{44}$$

iar formulelor (11) și (11′) pentru reprezentarea funcțiilor ψ_p le corespund

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^3} (\overrightarrow{n_M} \cdot \overline{\gamma})\, \psi_M \, d\sigma_M + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \gamma)}{\overline{QP}^3} \overline{D}\, \psi_Q \, d\omega_Q \tag{45}$$

$$\overline{\psi}_P = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \overline{\psi}_M (\overrightarrow{n_M} \cdot \gamma) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{MP}^3} d\sigma_M + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \overline{D}\, \overline{\psi}_Q \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{QP}^3} d\omega_Q . \tag{46}$$

Acestor formule le va corespunde o nouă formă de reprezentare, pentru funcția ψ sau $\overline{\psi}$, de această dată în funcție de derivatele medii succesive.

În acest caz vom transcrie numai rezultatele, procedeele de calcul rămînînd aceleași ca în cazul polinomului areolar.

Operatorii echivalenți ai lui $\frac{z^n}{n!\bar{z}}$ de această dată vor fi

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{z}{\bar{z}} \sim -\frac{1}{\overline{MP}^3}\frac{1}{2}\left[\vec{MP}^2\, e + (\vec{MP}\,.\,\gamma)^2\right] a \\
&\frac{1}{2!}\frac{z^2}{\bar{z}} \sim -\frac{1}{2}\frac{(\vec{MP}\,.\,\bar{\gamma})}{\overline{MP}} \\
&\frac{1}{3!}\frac{z^3}{\bar{z}} \sim -\frac{1}{2.1}\overline{MP}\, e \\
&\frac{1}{4!}\frac{z^4}{\bar{z}} \sim -\frac{1}{2.1\,(3+1)}\overline{MP}\,(\vec{MP}.\gamma)
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

și pentru $n \geqslant 1$ avem

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{(4n+1)!}\frac{z^{4n+1}}{\bar{z}} \sim -\frac{\left\{\frac{1}{2}[\vec{MP}^2\, e + (\vec{MP}\,.\,\gamma)^2]\, a + 2n\,(\vec{MP}\,.\,\gamma)^2\right\}\overline{MP}^{4n-3}}{2^n.1\,(3+1)\,(2+1)\,(2+1)\ldots[1+4\,(n-1)]\,[3+1+4\,(n-1)]\,(2n+1)[2+1+4\,(n-1)]} \\
&\frac{1}{(4n+2)!}\frac{z^{4n+2}}{\bar{z}} \sim -\frac{\overline{MP}^{4n-1}(\vec{MP}\,.\,\bar{\gamma})}{2^{n+1}.1\,(3+1)\,(2+1)\,(2+1)\ldots[1+4\,(n-1)]\,[3+1+4\,(n-1)]\,(2n+1)\,[2+1+4\,(n-1)]} \\
&\frac{1}{(4n+3)!}\frac{z^{4n+3}}{\bar{z}} \sim -\frac{\overline{MP}^{4n+1}\, e}{2^{n+1}.1\,(3+1)\,(2+1)\,(2+1)\ldots[1+4(n-1)]\,[3+1+4(n-1)]\,(2n+1)\,[2+1+4\,(n-1)][1+4n} \\
&\frac{1}{[4(n+1)]!}\frac{z^{4(n+1)}}{\bar{z}} \sim -\frac{\overline{MP}^{4n+1}(\vec{MP}\,.\,\gamma)}{2^{n+1}.1(3+1)\,(2+1)\,(2+1)\ldots[1+4\,(n-1)][3+1+4(n-1)](2n+1)[2+1+4(n-1)](1+4n)\,[3+1+4n]}
\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Dacă se dă $\frac{(\vec{MP}.\gamma)}{\overline{MP}^3}$ factor comun la stînga cînd se utilizează formula (45), atunci puterile lui z vor fi:

$$z \sim -\left\{\frac{1}{2}[(\vec{MP}.\gamma)+(\vec{MP}.\bar{\gamma})]\,a\right\} = \eta_i^1(M,P)$$

$$\frac{1}{2!}z^2 \sim -\frac{1}{2}(\vec{MP}.\gamma)^2 = \eta_i^2(M,P)$$

$$\frac{1}{3!}z^3 \sim -\frac{1}{2.1}\overline{MP}^2(\vec{MP}.\bar{\gamma}) = \eta_i^3(M,P)$$

$$\frac{1}{4!}z^4 \sim -\frac{1}{2.1\ (3+1)}\overline{MP}^4 e = \eta_i^4(M,P)$$

pentru $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{4n+1)!}z^{4n+1} \sim -\frac{\overline{MP}^{4n}\left\{\frac{1}{2}[(\vec{MP}.\gamma))+(\vec{MP}.\bar{\gamma})]\,a+2n(\vec{MP}.\gamma)\right\}}{2^n.1(3+1)(2+1)(2+1)\ldots[1+4(n-1)][3+1+4(n-1)](2n+1)[2+1+4(n-1)]} = \eta^{4n+1}(M,P)$$

$$\frac{1}{(4n+2)!}z^{4n+2} \sim -\frac{\overline{MP}^{4n}(\vec{MP}.\gamma)^2}{2^{n+1}.1(3+1)(2+1)(2+1)\ldots[1+4(n-1)][3+1+4(n-1)](2n+1)[2+1+4(n-1)]} = \eta^{4n+2}(M,P)$$

$$\frac{1}{(4n+3)!}z^{4n+3} \sim -\frac{\overline{MP}^{4n+2}(\vec{MP}.\bar{\gamma})}{2^{n+1}.1(3+1)(2+1)(2+1)\ldots[1+4(n-1)][3+1+4(n-1)](2n+1)[2+1+4(n-1)][1+4n]} = \mu^{4n+3}(M,P)$$

$$\frac{1}{[4(n+1)]!}z^{(4n+1)} \sim -\frac{\overline{MP}^{4n+1}e}{2^{n+1}.1(3+1)(2+1)(2+1),..[1+4(n-1)][3+1+4(n-1)][2n+1][2+1+4(n-1)][1+4n][3+1+4n]} = \eta_i^{4(n+1)}(M,P)$$

(49)

In cazul în care se utilizează echivalenții lui z^n la stînga se obțin

$$\left.\begin{aligned}
&\eta^{*1}(M,\ P) = -\frac{1}{2}\,a\,[(\vec{MP}\gamma) + (\vec{MP}.\bar{\gamma})]\\
&\eta^{*2}(M,\ P) = \eta_i^{2}(M,\ P)\\
&\eta^{*3}(M,\ P) = \eta_i^{3}(M,\ P)\\
&\eta^{*4}(M,\ P) = \eta_i^{4}(M,\ P)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\text{pentru } n \geqslant 1\\
&\eta^{*4n+1}(M,\ P) = -\frac{\overline{MP}^{4n}\left\{\frac{1}{2}\,a\,[(\vec{MP}.\gamma) + (\vec{MP}.\bar{\gamma})] + 2n\,(\vec{MP}.\gamma)\right\}}{2^n.1\,(3+1)\,(2+1)(2+1)\ldots[1+4(n-1)][3+1+4(n-1)]\,(2n+1)\,[2+1+4(n-1)]}\\
&\eta^{*4n+2}(M,\ P) = \eta_i^{4n+2}(M,\ P)\\
&\eta^{*4n+3}(M,\ P) = \eta_i^{4n+3}(M,\ P)\\
&\eta^{*4(n+1)}(M,\ P) = \eta_i^{4(n+1)}(M,\ P)
\end{aligned}\right\}\ (50)$$

Valorile lui η_i^n, η_i^{*n} se obțin din valorile lui ξ^n și ξ^{*n} înlocuind pe γ cu $\bar{\gamma}$ și pe $\bar{\gamma}$ cu γ.

Dacă presupunem că avem o funcție ψ pentru care

$$\bar{D}^n\,\psi = \varphi$$

unde φ are componentele continue, cu derivate parțiale de ordinul I continue și avînd derivata medie nulă, expresia lui ψ_P se va putea determina în funcție de valorile lui ψ pe suprafața Σ precum și ale derivatelor ei medii pe Σ.

Se observă că ψ este și o funcție poliarmonică deoarece

$$\Delta^{n+1}\psi = 0.$$

Pentru ψ vom avea următoarea formulă de reprezentare

$$\begin{aligned}\psi_P = &\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}(\overrightarrow{n_M}\cdot\bar{\gamma})\left[\psi_M - \sum_{i=0}^{n}\psi_{i0M}\right]d\sigma_M + \\ &+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\eta^1(M,P)(\overrightarrow{n_M}\cdot\bar{\gamma})\left[\bar{D}\psi_M - \sum_{i=1}^{n-1}\psi_{i1M}\right]d\sigma_M + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\eta^k(M,P)(\overrightarrow{n_M}\cdot\bar{\gamma})\left[\bar{D}^k\psi_M - \sum_{i=1}^{n-k}\psi_{ikM}\right]d\sigma_M + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\eta^n(M,P)(\overrightarrow{n_M}\cdot\bar{\gamma})\,\bar{D}^n\psi_M\,d\sigma_M,\end{aligned} \tag{51}$$

unde ψ și derivatele ei medii sînt continue pe Σ, suprafață închisă avînd normală în fiecare punct.

S-a notat cu

$$\psi_{ijP} = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\eta^i(M,P)(\overrightarrow{n_M}\cdot\bar{\gamma})\left[\bar{D}^{j+i}\psi_M - \sum_{n=1}^{n-(j+i)}\psi_{ni+jM}\right]d\sigma_M \tag{52}$$

și

$$\begin{cases}\psi_{,kP} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}(\overrightarrow{n_M}\cdot\bar{\gamma})\left[\bar{D}^k\psi_M - \sum_{i=1}^{n-k}\psi_{ikM}\right]d\sigma_M, \\ \psi_{,nP} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}(\overrightarrow{n_M}\cdot\bar{\gamma})\,\bar{D}^n\psi_M\,d\sigma_M \end{cases} \qquad k = 0,\ 1,\ldots,n-1 \tag{53}$$

cu toate convențiile făcute la punctul 11.

Expresia lui ψ_P mai poate fi pusă și sub forma

$$\bar{\psi}_P = \psi_{,0P} + [\eta^1\ ;\ \psi_{,1}]_P + \cdots + [\eta^k\ ;\ \psi_{,k}]_P + \cdots + [\eta^n\ ;\ \psi_{,n}]_P, \tag{54}$$

unde

$$\bar{D}\psi_{,kP} = 0$$

formă care dă dezvoltarea lui ψ_P după puterile lui $z(\eta)$ și este asemănătoare expresiei (36).

Folosind expresiile (50) ale lui η^{*n} se pot găsi expresii asemănătoare pentru ψ_P.

În cazul în care se utilizează reprezentarea (46), vom putea găsi următoarea formulă pentru $\overline{\psi}_P$ (matrice linie):

$$\overline{\psi}_P = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left[\overline{\psi}_M - \sum_{i=1}^{n}\overline{\psi}_{iOM}\right](\vec{n}_M\cdot\gamma)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_M +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left[\overline{D}\,\overline{\psi}_M - \sum_{i=1}^{n-1}\overline{\psi}_{i1M}\right](\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\overline{\eta}^1(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_M +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (55)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left[\overline{D}^k\overline{\psi}_M - \sum_{i=1}^{n-k}\overline{\psi}_{ikM}\right](\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\overline{\eta}^k(M,\ P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_M +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\overline{D}^n\overline{\psi}_M(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\overline{\eta}^n(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_M,$$

unde $\overline{\psi}$ cît și derivatele ei medii sînt continue pe Σ, suprafață închisă avînd normală în fiecare punct.

Notațiile sînt cele obișnuite.

Formula (55) se poate scrie și sub forma

$$\overline{\psi}_P = \overline{\psi}_{,0P} + [\,\overline{\psi}_{,1}\,;\,\overline{\eta}^1\,]_P + \ldots + [\,\overline{\psi}_{,k}\,;\,\overline{\eta}^k\,]_P + \ldots + [\,\overline{\psi}_{,n}\,;\,\overline{\eta}^n\,]_P \quad (56)$$

Prin $\overline{\eta}^n$ am notat operatorii la stînga nucleului $\dfrac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}$. Se pot deduce formule asemănătoare cînd se utilizează operatorii $\overline{\eta}^{*n}$ dar de data aceasta ei vor fi la dreapta nucleului $\dfrac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}$. În cazul cînd se folosește reprezentarea (45) se face convenția ca o matrice patratică să fie derivată pe coloane iar în cazul reprezentării (46) se face convenția ca ea să fie derivată pe linii.

АРЕОЛЯРНЫЙ МНОГОЧЛЕН ПОРЯДКА n В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Определение ареолярной производной, данное в пространстве Н. Теодореску и Г. К. Моисилом, позволило распространить понятие «ареолярный многочлен», данное Н. Теодореску и изученное им для плоскости, в которой применяется комплексная переменная $z = x + iy$.

В пространстве, пользуясь матричным алгорифмом, получают выражения для ареолярного многочлена в зависимости от действительной переменной, избегая таким образом введения гиперкомплексных чисел.

Ареолярный многочлен n-го порядка в пространстве определяется так же, как и на плоскости, как голоморфная функция (α), ареолярная производная которой n-го порядка есть голоморфная функция.

Пользуясь постоянно аналогией с случаем плоскости, определили операторы, эквивалентные $\bar{z}^k$ в плоскости. Было установлено, что в пространстве эквивалентны $\bar{z}^k$ различаются в зависимости от того, являются ли они операторами или функциями, причем первые суть квадратные метрики, а остальные метрики столбцы или линии.

Вывод формы этих операторов привел к определению ареолярной производной квадратной матрицы, с применением полигармонических элементарных функций.

Были даны интегральные формулы для выражения ареолярного многочлена ψ,n-го порядка, которые дают выражение ψ_P в точке P внутри объема Ω в зависимости от значения ψ и его ареолярных производных на поверхности Σ, ограничивающей объем Ω. Эти интегральные формулы применимы в задачах с граничными условиями.

Выражение ареолярного многочлена обобщает формулу Тейлора для многочленов, причем получаются выражения, формально подобные выражениям для случая плоскости.

Ареолярный многочлен n-й степени есть полигармоническая функция, так как $D^{n+1}\,\psi = 0$, и является решением системы уравнений с частными производными.

В настоящей работе строится простой математический символизм для операций дифференцирования или интегрирования по отношению к ареолярной производной.

Метод, примененный для интегрирования системы уравнений с частными производными, данной ареолярной производной, может быть применен и для интегрирования других подобных систем. В настоящей работе даются, как применение, результаты, полученные при разложении функции ψ по значениям функции и ее средних производных на поверхности Σ.

LE POLYNÔME ARÉOLAIRE D'ORDRE n DANS L'ESPACE À TROIS DIMENSIONS

(RÉSUMÉ)

La définition de la dérivée aréolaire, donnée dans l'espace par les professeurs N. Teodorescu et Gr. C. Moisil, a permis l'extension de la notion de polynôme aréolaire, donnée par N. Teodorescu et étudiée par lui dans le cas plan, où l'on utilise la variable complexe $z = x + iy$.

Dans l'espace, on obtient, en utilisant l'algorithme matriciel, des expressions pour le polynôme aréolaire en fonction de la variable réelle, évitant ainsi l'introduction des nombres hypercomplexes.

Le polynôme aréolaire d'ordre n dans l'espace est défini comme dans le plan, comme une fonction holomorphe (α) dont la dérivée aréolaire d'ordre n est une fonction holomorphe.

Utilisant constamment l'analogie avec le cas plan, on définit des opérateurs équivalents à $\bar{z}^k$ du plan. On a vu que, dans l'espace, les équivalents de $\bar{z}^k$ diffèrent selon qu'ils sont des opérateurs ou des fonctions, les premiers étant des matrices quadratiques, les autres des matrices colonnes ou des matrices lignes.

La déduction de la forme de ces opérateurs a conduit à la définition de la dérivée aréolaire d'une matrice quadratique; on a utilisé dans ce but les fonctions polyharmoniques élémentaires.

On a donné des formules intégrales pour l'expression du polynôme aréolaire ψ d'ordre n qui donne l'expression de ψ_P en un point P à l'intérieur du volume Ω en fonction des valeurs de ψ et de ses dérivées aréolaires sur la surface Σ qui limite le volume Ω. Ces formules intégrales sont applicables aux problèmes à la limite.

L'expression du polynôme aréolaire généralise la formule de Taylor pour les polynômes, fournissant des expressions formellement semblables au cas plan.

Le polynôme aréolaire d'ordre n est une fonction polyharmonique, car $D^{n+1}\psi = 0$ et il constitue une solution d'un système d'équations aux dérivées partielles.

Dans le présent travail, on construit un symbolisme mathématique simple, pour les opérations de dérivation ou d'intégration par rapport à la dérivée aréolaire.

La méthode utilisée pour l'intégration du système d'équations aux dérivées partielles, donnée par la dérivée aréolaire, peut servir pour l'intégration d'autres systèmes similaires. Dans ce travail on expose, à titre d'application, les résultats du développement de la fonction ψ d'après ses valeurs et celles de ses dérivées moyennes sur la surface Σ.

BIBLIOGRAFIE

1. Biţadze A. V., *Un analog în spaţiu al integralei de tip Cauchy şi aplicaţiile sale.* Docl. Akad. Nauk SSSR, 1953, vol. XVII, nr. 6.
2. Kristzen Adolf, *Areolar monogene und polyanalytische Funktionen.* Comentarii Matematici Helvetici, 1948, vol. 21, p. 73.
3. Moisil Gr. C., *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.* Bucureşti 1931.
4. Moisil Gr. C. şi Teodorescu N., *Fonctions holomorphes dans l'espace.* Buletinul societăţii de Ştiinţe din Cluj, septembrie, 1931, t. VI.
5. Nicolescu Miron, *Recherches sur les fonctions polyharmoniques.* Annales scientifiques de l'école normale supérieure, t. LII.
6. Teodorescu N., *La dérivée aréolaire et ses applications dans la physique mathématique,* (teză de doctorat). Paris, 1931.
7. — *Sur l'emploi de relations globales dans quelques problèmes physiques.* Anali di Matematica pura et applicata, 1932—1933, seria IV, t. XI.
8. — *La dérivée aréolaire.* Annales Roumaines de mathématiques, Bucarest, 1936.
9. Pompeiu D., *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe.* Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1912, t. 33, nr. 1, p. 108; 1913, t. 35, nr. 1, p. 277.
10. Rieder, *Über areolar-harmonische Functionen.* Acta Matematica, 1946, t. 78, nr. 3—4.

Exemplar TULIŞDONA

LISTA COMUNICĂRILOR ŢINUTE ÎN CADRUL INSTITUTULUI DE MATEMATICĂ AL ACADEMIEI R.P.R., ÎN ANUL 1954

1. Caius Iacob, *Mişcarea unui solid într-un curent variabil cu înălţimea*, 19 ianuarie 1954.
2. G. Marinescu, *Asupra diferenţialei şi derivatei în spaţiile Banach*, 9 martie 1954.
3. R. Cristescu, *Asupra unei noţiuni de convergenţă*, 16 martie 1954.
4. G. Vrănceanu, *Proprietăţi globale ale unor spaţii riemaniene*, 23 martie 1954.
5. Marius Stoka, *Asupra geometriei gonometrice a familiilor de cercuri*, 13 aprilie 1954.
6. Felix Albrecht, *Asupra unei teoreme a lui Wazewski*, 20 aprilie 1954.
7. C. Popovici, *Asupra construcţiei bazei întregilor lui Dirichlet*, 4 mai 1954.
8. V. Vîlcovici, *Asupra mişcărilor de vibraţie a unei plăci fluide*, 18 mai 1954.
9. G. Vrănceanu, *Legăturile noastre ştiinţifice cu matematicienii cehoslovaci*, 1 iunie 1954.
10. I. Elianu, *Invarianţi matriciali absoluţi pentru sistemele de tip Laplace*, 6 iulie 1954.
11. G. Marinescu, *Spaţii Banach de distribuţii*, 14 septembrie 1954.
12. Gr. C. Moisil, *Funcţionarea în mai mulţi timpi a mecanismelor automate*, 21 septembrie 1954.
13. G. Ioanin, *Teoria contactorilor multipoziţionali*, 21 septembrie 1954.
14. O. Onicescu, *O teoremă fundamentală a mecanicii statistice*, 5 octombrie 1954.
15. A. Ghermănescu, *Soluţiile generalizate ale ecuaţiilor fizicii matematice*, 12 octombrie 1954.
16. Mariana Nedelcu, *Analiza schemelor cu relee temporizate*, 19 octombrie 1954.
17. Paul Constantinescu, *O metodă de sinteză a schemelor de contacte*, 26 octombrie 1954.
18. Gr. C. Moisil, *Asupra teoriei caracteristicilor ecuaţiilor cu derivate parţiale*, 9 noiembrie 1954.
19. S. Constantinescu Cătuneşti, *Plăci oblice*, 23 noiembrie 1954.

LISTA COMUNICĂRILOR ŢINUTE ÎN CADRUL INSTITUTULUI DE MATEMATICĂ AL ACADEMIEI R.P.R., ÎN ANUL 1955

1. C. Foiaş, G. Gussi şi V. Poenaru, *O metodă directă în studiul sistemelor diferenţiale*, 4 ianuarie 1955.
2. Ştefan Şandor, *Asupra ecuaţiilor diferenţiale de ordin superior cu coeficienţi aproape periodici*, 18 ianuarie 1955.
3. Al. Solianu, *Despre n-complectitudine în grupuri*, 18 ianuarie 1955.
4. Edmond Nicolau, *Unele probleme variaţionale relative la endovibratori*, 1 februarie 1955.
5. C. Popovici, *Asupra descompunerii în factori primi a întregilor lui Gauss*, 1 februarie 1955.
6. Al. Lascu, *Asupra împărţirii întregi*, 15 februarie 1955.
7. Ivan Singer, *Contribuţii la teoria K. B. linealelor*, 15 februarie 1955.
8. S. Vasilache, *Asupra caracterizării transformărilor Laplace şi Fourier cu ajutorul teoriei distribuţiilor*, 15 martie 1955.
9. V. Vîlcovici, *Asupra teoremei valorilor extreme*, 29 martie 1955.
10. Marius Stoka, *Asupra măsurii mulţimilor de varietăţi dintr-un spaţiu Rn*, 29 martie 1955.
11. Petre Teodorescu, *O metodă de rezolvare a problemei plane a elasticităţii cu condiţii oarecare pe un contur dreptunghiular*, 19 aprilie 1955.
12. C. Popovici, *Teoria locală a numerelor ideale după Zolotarev în cazul întregilor lui Dirichlet*, 19 aprilie 1955.
13. N. Teodorescu, *Bazele unei teorii generale a mărimilor*, 17 mai 1955.
14. Eugen Mihăilescu, *Forme normale în calculul propoziţiilor bivalente*, 21 iunie 1955.
15. Gr. C. Moisil, *Raportul delegaţiei R.P.R. la cel de-al patrulea congres al matematicienilor din Republica Cehoslovacă*, 20 septembrie 1955.
16. Corneliu Constantinescu, *Cîteva aplicaţii ale metricii hiperbolice*, 18 octombrie 1955.
17. Gr. C. Moisil, *Raport asupra călătoriei ştiinţifice din Republica Populară Polonă*, 1 noiembrie 1955.
18. N. Teodorescu, *Raport asupra călătoriei ştiinţifice în Republica Democrată Germană.*
19. G. Vrănceanu, *Proprietăţi intrinsece ale spaţiilor neolonome*, 15 noiembrie 1955.
20. S. Stoilov, *Activitatea Institutului de matematică în anul 1955 şi pregătirea Congresului al IV-lea al matematicienilor romîni*, 19 decembrie 1955.
21. Gr. C. Moisil, *Maşinile de calcul şi spiritul modern în matematică*, 19 decembrie 1955.
22. Miron Nicolescu, *Proprietăţi de medie ale funcţiilor armonice într-un semiplan.*
23. Monica Pavel, *Unele proprietăţi ale retractelor liniare*, 20 decembrie 1955.
24. C. Teleman, *Asupra spaţiilor A_2 local euclidiene conforme*, 20 decembrie 1955.

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

1070

(941)

f 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

KAT

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Országos Mérési Könyvtár BUDAPEST

3-4

ANUL VII

IULIE — DECEMBRIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI

MATEMATICE

3-4

ANUL VII

IULIE — DECEMBRIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Academician S. STOILOW - redactor responsabil; academician G. VRĂNCEANU - redactor adjunct; academician MIRON NICOLESCU; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R.P.R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; T. GANEA; A. HALANAY

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul VII, nr. 3—4 Iulie—decembrie 1956

SUMAR

Pag.

S. STOILOW, Asupra convergenţei continue 247
S. MARCUS, Contribuţii la o analiză a funcţiilor reale bazată pe noţiunea de categorie (în sensul lui Baire) 251
RADU BĂDESCU, Asupra unor ecuaţii funcţionale din spaţiul Hilbert complex L^2 273
ROMULUS CRISTESCU, Clase de spaţii liniare semiordonate pseudonormate 291
ARNO KAHANE, Asupra unor ecuaţii diferenţiale ale căror soluţii se pot afla cu ajutorul soluţiilor ecuaţiei $\theta'' = h(t)\,\theta$ 307
MARCEL N. ROŞCULEŢ, Algebre infinite, comutative, asociate la sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale 321
VICTOR VÂLCOVICI, Fundamentele mecanicii 373
PAUL CONSTANTINESCU, Asupra reducerii numărului de contacte prin introducerea circuitelor în punte. Conductibilităţi directe conjugate 399

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome VII, no 3—4 Juillet—décembre 1956

SOMMAIRE

	Page
S. STOILOW, Sur la convergence continue	247
S. MARCUS, Contribution à une analyse des fonctions réelles, basée sur la notion de catégorie (au sens de Baire)	251
RADU BĂDESCU, Sur quelques équations fonctionnelles dans l'espace de Hilbert complet L^2	273
ROMULUS CRISTESCU, Classes d'espaces linéaires semi-ordonnés pseudo-normés	291
ARNO KAHANE, Sur certaines équations différentielles dont la solution peut être trouvée à l'aide des solutions de l'équation $0'' = h(t)\,0$.	307
MARCEL N. ROŞCULEŢ, Algèbres infinies commutatives, associées à des systèmes d'équations aux dérivées partielles	321
VICTOR VÂLCOVICI, Les fondements de la Mécanique	373
PAUL CONSTANTINESCU, Sur la réduction du nombre de contacts en introduisant les circuits en pont. comutaives, Conductibilités directes conjuguées	399

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том VII, № 3-4 Июль—декабрь 1956

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

С. СТОЙЛОВ, О непрерывной конвергенции 247

С. МАРКУС, К вопросу об анализе функций действительного переменного, основанном на понятии о категории (в смысле Бэра) 251

Р. БЭДЕСКУ, О некоторых функциональных уравнениях в комплексном гильбертовом пространстве L^2 273

Р. КРИСТЕСКУ, Классы псевдонормированных линейных полуупорядоченных пространств 291

А. КАХАНЕ, О некоторых дифференциальных уравнениях, решения которых можно найти при помощи решений уравнения $\theta'' = h(t) \cdot \theta$ 307

М. Н. РОШКУЛЕЦ, Бесконечные алгебры, ассоциированные с системами уравнений с частными производными 321

В. ВЫЛКОВИЧ, Основание механики 373

П. КОНСТАНТИНЕСКУ, О сокращении числа контактов путем введения мостиковых цепей. Непосредственная сопряженная проводимость . . 399

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 3—4, 1956

ASUPRA CONVERGENŢEI CONTINUE *)

DE

S. STOILOW

1. Este cunoscută noţiunea de convergenţă *continuă* a unui şir de funcţii Ea a fost definită pentru prima oară în mod general de H. H a h n, în prima ediţie (1921) a cărţii sale : *Theorie der reellen Funktionen* şi folosită, de atunci, de mai mulţi autori.

Un şir de funcţii $f_n(x)$, definite într-un spaţiu metric X oarecare şi cu valori reale sau complexe, se zice *continuu convergent* în $x_0 \in X$, dacă pentru orice şir $\{x_n\}$ cu $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ şi

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \tag{1}$$

există un număr finit $f(x_0)$ depinzînd numai de x_0 şi astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_n) = f(x_0). \tag{2}$$

Dacă X este compact şi $f_n(x)$ sînt toate continue în X, convergenţa continuă în X (adică în fiecare punct $x \in X$) este echivalentă cu convergenţa uniformă în X. Noţiunea de convergenţă continuă a fost folosită mai ales în acest caz, avantajele ei manifestîndu-se în formularea unor propoziţii sau în simplificarea unor demonstraţii**).

În nota aceasta vom examina şirurile continuu convergente într-un spaţiu metric X, fără a presupune funcţiile şirului continue în X.

2. Convergenţa continuă în $x_0 \in X$ implică, evident, convergenţa în x_0, căci, dacă în (1) luăm $x_n = x_0$, trebuie să avem, conform cu (2),

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Dar funcţia $f(x)$ [definită pentru orice $x \in X$, dacă şirul este continuu convergent în X] trebuie să fie neapărat continuă în tot X.

Într-adevăr, fie $\{x_n\}$ un şir satisfăcînd la (1). Pentru $\varepsilon > 0$ dat, există un n_1, astfel că, pentru $n > n_1$, avem

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon, \tag{3}$$

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 18 iunie 1956.

**) A se vedea de exemplu [1].

S-au considerat şi şiruri de funcţii cu valori într-un spaţiu metric oarecare. A se vedea de exemplu [2].

pentru că șirul este presupus continuu convergent în tot X, deci în x_1.

Tot astfel există un $n_2 > n_1$, astfel că, pentru $n > n_2$, avem

$$\left| f_n(x_2) - f(x_2) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

și așa mai departe, pentru orice x_n din șirul de mai sus.

Să considerăm acum un șir $\{x'_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ ales astfel ca să avem

$$\begin{aligned}
&x'_{n_1} = x'_{n_1+1} = \ldots\ldots\ldots = x'_{n_2-1} = x_1 \\
&x'_{n_2} = x'_{n_2+1} = \ldots\ldots\ldots = x'_{n_3-1} = x_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x'_{n_k} = x'_{n_k+1} = \ldots\ldots\ldots = x_{n_{k+1}-1} = x_k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Cum șirul $f_n(x)$ este continuu convergent în x_0, iar $\{x'_n\}$ este un subșir al lui $\{x_n\}$ avem

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x'_n) = f(x_0). \tag{5}$$

Dar, după modul cum am ales $\{x'_n\}$ avem, după (3), pentru

$$n_1 \leqslant n \leqslant n_2 - 1$$

inegalitatea

$$| f_n(x'_n) - f(x_1) | < \varepsilon.$$

Tot astfel, după (4), pentru

$$n_2 \leqslant n \leqslant n_3 - 1$$

avem inegalitatea

$$| f_n(x'_n) - f(x_2) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

și așa mai departe.

Deci, după (5), avem

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Șirul $\{x_n\}$ fiind ales arbitrar cu condiția $x_n \to x_0$, aceasta înseamnă că $f(x)$ este continuă în x_0, punct arbitrar al lui X.

Deci: *Un șir de funcții arbitrare definite într-un spațiu metric X, continuu convergent în orice punct din X, tinde către o funcție continuă în X.*

3. Este ușor de dat exemple de funcții necontinue, dar convergînd continuu în [0,1].

Să definim, pentru aceasta, $f_n(x) = 0$ pentru $x \neq r_n$ și $f_n(r_n) = \frac{1}{n}$, unde r_n sînt numerele raționale din [0,1].

Este evident că șirul $f_n(x)$ astfel definit converge continuu în [0,1] către $f(x) \equiv 0$.

Dar convergența continuă a șirului $f_n(x)$ nu este de loc necesară pentru ca funcția limită $f(x)$ să fie continuă. Există chiar șiruri de funcții $f_n(x)$ *continue* fiecare, care converg *ne*continuu către o funcție $f(x)$ *continuă*.

Să considerăm, de exemplu, tot în [0,1], funcțiile $f_n(x)$ definite după cum urmează:

$$1^\circ\ f_n(x) = 0 \quad \text{pentru } x = \frac{1}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1;$$

$$2^\circ\ f_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = 1,\ f_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = -1;$$

3° $f_n(x)$ este *liniară* în intervalele:

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right],\ \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right] \text{ și } \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right].$$

Funcțiile $f_n(x)$ astfel definite sînt continue în [0,1] și avem

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) \equiv 0.$$

Dar dacă luăm, de exemplu,

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

obținem

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_n) = -1.$$

4. Dacă X este compact, convergența continuă în X implică convergența uniformă.

Dacă nu ar fi așa, pentru un anumit $\varepsilon > 0$, oricare ar fi numărul natural N, ar exista un $x_N \in X$ și un $n_N > N$ astfel ca

$$|f_{n_N}(x_N) - f(x_N)| > \varepsilon. \tag{6}$$

Luînd $N = 1, 2, 3, \ldots$ succesiv, punctele x_N au un punct de acumulare ξ în X.

Pentru un șir $x_{N_1}, x_{N_2}, \ldots$ extras din șirul $\{x_N\}$ și ales astfel ca $x_{N_k} \to \xi$, avem deci conform cu (6)

$$|f_{n_{N_k}}(x_{N_k}) - f(x_{N_k})| > \varepsilon. \tag{7}$$

Dar, după cele ce am văzut la paragraful 2, $f(x)$ este continuă în $x = \xi$ și deci

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{N_k}) = f(\xi).$$

Deci, (7) contrazice convergența continuă în ξ.

5. În rezumat se poate deci enunța propoziția următoare:

Condiția necesară și suficientă pentru ca un șir de funcții arbitrare (reale sau complexe) *definite într-un spațiu metric X să fie continuu*

convergent în X, este ca şirul să tindă uniform în interiorul) lui X către o funcţie continuă în X.*

Se arată într-adevăr, îndată, că un şir care îndeplineşte această din urmă condiţie este continuu convergent.

Nici una din cele două părţi cuprinse în această condiţie nu este însă suficientă singură. Am văzut la paragraful 3 că limita poate fi continuă fără ca convergenţa să fie continuă. Pe de altă parte se ştie că şiruri uniform convergente de funcţii necontinue tind, în general, către funcţii necontinue şi deci, după paragraful 2, nu sînt continuu convergente în sensul definit la paragraful 1.

О НЕПРЕРЫВНОЙ КОНВЕРГЕНЦИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Для того чтобы ряд произвольных функций с действительными или комплексными значениями, определенных в метрическом пространстве X, непрерывно сходился в X, необходимо и достаточно, чтобы этот ряд равномерно сходился внутри X к непрерывной функции.

Можно заметить, что ни одна из двух частей этого условия, взятая отдельно, не является достаточной для того, чтобы ряд сходился непрерывно.

SUR LA CONVERGENCE CONTINUE

(RÉSUMÉ)

Pour qu'une suite de fonctions arbitraires, à valeurs réelles ou complexes, définies dans un espace métrique X soit continûment convergente dans X, il est nécessaire et suffisant que la suite converge uniformément à l'intérieur de X vers une fonction continue.

On peut remarquer qu'aucun des deux termes de cette dernière condition n'est suffisant, à lui seul, pour que la suite converge continûment.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Carathéodory, Mathematische Annalen, 1929, vol. 101, p. 515—533.
2. M. Zorn, Transaction of American Mathematical Society, 1939, p. 1—22.

*) Prin aceasta se înţelege că şirul converge uniform în orice submulţime relativ compactă a lui X.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 3—4, 1956

CONTRIBUŢII LA O ANALIZĂ A FUNCŢIILOR REALE BAZATĂ PE NOŢIUNEA DE CATEGORIE IN SENSUL LUI BAIRE*)

DE

S. MARCUS

În această lucrare se studiază cîteva noţiuni de analiză calitativă (sau descriptivă) a funcţiilor reale.

Spre deosebire de analiza metrică, unde ideia de bază este aceea de *măsură* iar mulţimile neglijabile sînt cele de măsură nulă, aici ideia centrală este aceea de *categorie* (în sensul lui Baire) iar mulţimile neglijabile sînt cele de prima categorie (mulţimi slabe, în terminologia lui N. Bourbaki: mulţimi în snop, în terminologia lui A. Denjoy).

Cele mai multe dintre teoremele demonstrate în această lucrare au fost enunţate, fără demonstraţie, în [1], [2] şi [3]. Definiţiile noţiunilor introduse sînt date de asemenea şi în aceste note.

Analogul calitativ al teoremei lui Lebesgue a densităţii

Într-un spaţiu topologic cu bază numerabilă are loc *teorema lui Lindelöf*: Orice familie de mulţimi deschise $\{G_\iota\}$ conţine un şir G_{ι_n}, aşa ca

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_{\iota_n} = \sum G_\iota.$$

Într-un spaţiu topologic cu bază numerabilă are loc o *teoremă de acoperire de tip calitativ* (corespondentul teoremei de acoperire a lui Vitali din teoria metrică): *Din orice familie* $\{G_\iota\}$ *de mulţimi deschise care acoperă o mulţime* A *în sensul lui Vitali* (oricare ar fi vecinătatea V a unui punct x, există o mulţime G_ι, astfel ca $x \in G_\iota \subset V$) *se poate extrage o subfamilie numerabilă de mulţimi deschise disjuncte* $\{G_{\iota_p}\}$ *care să acopere mulţimea* A, *eventual cu excepţia unei submulţimi nedense din* A.

Fie G_{ι_1} o mulţime deschisă din $\{G_\iota\}$. Dacă $G_{\iota_1} \supset A$, teorema e demonstrată. Dacă $G_{\iota_1} \not\supset A$, fie un punct $a \in A - G_{\iota_1}$. Există (din cauză că acope-

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică, în şedinţa din 18 iunie 1956.

rirea este de tip Vitali) o mulțime deschisă G_{ι_2} ce conține pe a și este disjunctă cu G_{ι_1}. Dacă $G_{\iota_1} + G_{\iota_2} \supset A$, teorema e demonstrată. Dacă $G_{\iota_1} + G_{\iota_2} \not\supset A$, continuăm extragerea. Numărul de extrageri este cel mult infinit numerabil, din cauza existenței unei baze numerabile.

Fie acum un punct $\bar{a} \in A - \sum_{p=1}^{\infty} G_{\iota_p}$. Fie G_ι^* o mulțime deschisă din $\{G_\iota\}$ ce conține pe $\bar{a}$. Nu putem avea $G_\iota^* G_{\iota_p} \neq 0$ pentru orice p, deoarece ar însemna că șirul G_{ι_p} n-a epuizat extragerea de mulțimi deschise disjuncte, ceea ce ar contrazice ipoteza. Avem deci, pentru un anume p, $G_\iota^* G_{\iota_p} \neq 0$. Mulțimea deschisă $G = G_\iota^* G_{\iota_p}$ nu conține nici un punct din $A - \sum_{p=1}^{\infty} G_{\iota_p}$. Deci, în orice vecinătate a unui punct din $A - \sum G_{\iota_p}$ putem găsi o mulțime deschisă care nu conține puncte din $A - \sum G_{\iota_p}$. Mulțimea $A - \sum G_{\iota_p}$ este deci nedensă.

T e o r e m a 1. *Într-un spațiu topologic cu bază numerabilă, mulțimea M a punctelor în care are loc o proprietate $\mathfrak{P}$ numerabil-aditivă și ereditară* (o proprietate $\mathfrak{P}^*$ de mulțime are loc într-un punct dacă aparține unei vecinătăți a acelui punct) *posedă ea însăși proprietatea $\mathfrak{P}$.*

Demonstrație. Fiecărui punct α din M îi corespunde o vecinătate V_α care posedă proprietatea $\mathfrak{P}$. Aplicînd teorema lui Lindelöf, găsim un șir de mulțimi deschise, V_n, astfel ca

$$\sum_{\alpha \in M} V_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} V_n.$$

Proprietatea $\mathfrak{P}^*$, fiind numerabil-aditivă, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, deci $\sum_{\alpha \in M} V_\alpha$, posedă proprietatea $\mathfrak{P}$. Folosind ereditatea proprietății $\mathfrak{P}^*$, deducem că M posedă proprietatea $\mathfrak{P}^*$.

Exemple. Măsura nulă, risipirea, sînt proprietăți numerabil aditive și ereditare. Deci: Mulțimea punctelor unei mulțimi E, în care E este de măsură nulă, este ea însăși de măsură nulă; mulțimea punctelor din E, în care E este risipită, este ea însăși risipită.

Conexiunea nu este o proprietate ereditară, iar aditivitatea funcționează numai în anume condiții.

Există însă proprietăți care, fără să fie numerabil-aditive și ereditare, se supun totuși teoremei de mai sus. Astfel, proprietatea unei mulțimi de a fi o mulțime frontieră nu este aditivă și totuși o mulțime local-frontieră este ea însăși o mulțime frontieră.

„Prima categorie" este o proprietate numerabil-aditivă și ereditară. Deci:

T e o r e m a 1′. *Într-un spațiu topologic cu bază numerabilă, mulțimea M a punctelor din $\mathfrak{M}$, în care $\mathfrak{M}$ este de prima categorie, este ea însăși de prima categorie.*

C o r o l a r. *Dacă o mulțime este de prima categorie în fiecare punct al ei, atunci ea este de prima categorie.*

În 1930, Banach a demonstrat această teoremă pentru spații metrice. Pînă atunci, ea era demonstrată numai pentru spații metrice separabile. Teorema se poate însă justifica și într-un spațiu topologic oarecare, dacă se face uz de teorema lui Zorn.

Această teoremă a lui Banach este corespondentul, pe plan calitativ, al teoremei lui Lebesgue asupra punctelor de densitate. Am dat mai sus o demonstrație particulară a acestei teoreme, pentru a pune în evidență că, într-un anume cadru, destul de larg pentru a cuprinde teoria lui Denjoy și Hincin, teorema lui Banach decurge dintr-o teoremă de acoperire la fel ca și teorema lui Lebesgue (Este ușor de văzut că în locul teoremei lui Lindelöf s-ar fi putut folosi în demonstrație teorema de acoperire a lui Vitali de tip calitativ).

Teorema 2. *Dacă o mulțime E posedă proprietatea lui Baire, atunci* :

a) *ea este în mod frecvent pe E de a doua categorie* ;

b) *complementara $1-E$ este în mod frecvent pe E, de prima categorie* *).

Demonstrație. Afirmația a) este chiar cuprinsul teoremei lui Banach. Pentru a justifica afirmația b), ținem seama că proprietatea lui Baire este echivalentă cu condiția ca mulțimea $D(E) \cdot D(1-E)$ să fie nedensă, [4], **) 1. (Prin $D(E)$ se înțelege mulțimea punctelor în care E nu este de prima categorie. Condiția de mai sus, necesară și suficientă ca o mulțime E să posede proprietatea lui Baire, aparține lui Sierpinski). Deci, dintre toate punctele mulțimii E, doar în punctele unei mulțimi de prima categorie mulțimea $1-E$ poate fi de a doua categorie. Deci $1-E$ este, în mod frecvent pe E, de prima categorie. Sau, din cauza simetriei raționamentului, E este, în mod frecvent pe $1-E$, de prima categorie.

Teorema de mai sus este analogul următoarei teoreme din analiza aproximativă metrică. Dacă mulțimea E este măsurabilă, ea admite aproape orice punct al ei ca punct de densitate și aproape orice punct al complementarei $1-E$ ca punct de dispersie.

Teoremei de mai sus i se poate da o interpretare sugestivă, asemănătoare cu interpretarea pe care a dat-o Luzin teoremei metrice corespunzătoare. Astfel, dacă, într-un spațiu topologic, o mulțime E care posedă proprietatea lui Baire nu este de prima categorie și dacă nici complementara $1-E$ nu este de prima categorie, atunci este imposibil ca mulțimea E să fie distribuită omogen. Vor exista zone de aglomerare pentru E, corespunzătoare punctelor în care E este de categoria a doua, dar complementara $1-E$ e de prima categorie, și locuri de rarefiere, corespunzătoare punctelor în care $1-E$ este de categoria a doua, dar E este de prima categorie. Din cauza ipotezelor făcute, niciuna dintre aceste zone nu este neglijabilă (adică de prima categorie).

Limite aproximative calitative

Definiții. Fie $f(x)$ o funcțională definită într-un spațiu topologic. Numim limită aproximativă calitativă superioară a lui $f(x)$ într-un

*) Spunem că proprietatea P are loc frecvent pe mulțimea E, dacă ea nu are loc cel mult în punctele unei submulțimi de prima categorie din E.

**) p. 56.

punct x_0 și notăm

$$\lim_{x \to x_0} \text{cal sup } f(x)$$

marginea inferioară a acelor numere y pentru care mulțimea

$$\underset{x}{E} [f(x) < y]$$

este de prima categorie în punctul x_0.

Numim limită aproximativă calitativă inferioară în punctul x_0 și notăm

$$\lim_{x \to x_0} \text{cal inf } f(x)$$

marginea superioară a acelor numere y pentru care mulțimea

$$\underset{x}{E} [f(x) < y]$$

este de prima categorie în x_0.

Dacă cele două limite, superioară și inferioară sînt egale, spunem că $f(x)$ admite în punctul x_0 o limită aproximativă calitativă, care este valoarea comună a limitelor calitative superioară, și inferioară și notăm

$$\lim_{x \to x_0} \text{cal } f(x).$$

Pentru o funcție de o variabilă numerică se definesc și limitele aproximative calitative, superioară și inferioară, unilaterale (la stînga și la dreapta). Dacă într-un punct cele patru limite unilaterale sînt egale, funcția admite o limită calitativă în acel punct. Cea mai mare dintre limitele calitative superioare unilaterale și cea mai mică dintre limitele calitative inferioare unilaterale se mai numesc limite calitative extreme. Dacă cele două limite calitative la stînga sînt egale, valoarea lor comună este limita calitativă la stînga a funcției și se notează

$$\lim_{x \to x_0^-} \text{cal } f(x).$$

Dacă cele două limite calitative la dreapta sînt egale, valoarea lor comună se numește limita calitativă la dreapta a funcției și se notează

$$\lim_{x \to x_0^+} \text{cal } f(x).$$

Observație. În definițiile de mai sus nu se schimbă nimic dacă în loc de mulțimile

$$E_1 = \underset{x}{E} [f(x) > y], \quad E_1' = \underset{x}{E} [f(x) < y]$$

considerăm mulțimile

$$E_2 = \underset{x}{E} [f(x) \geqq y], \quad E_2' = \underset{x}{E} [f(x) \leqq y].$$

Într-adevăr, fie $\{y_1\}$ și $\{y_2\}$ mulțimile valorilor y pentru care E_1, respectiv E_2, sînt de prima categorie în punctul x_0. Avem, din cauza ereditații

$$\{y_2\} \subset \{y_1\}.$$

Deci

$$\inf \{y_1\} \leqq \inf \{y_2\}.$$

Dacă arătăm că avem și

$$\{y_1\} \subset \{y_2\}',$$

atunci va rezulta că E_1 și E_2 au aceeași margine inferioară și afirmația e demonstrată. Într-adevăr, avem

$$\underset{x}{E}\,[f(x) > y_1] \supset \underset{x}{E}\left[f(x) \geqq y_1 + \frac{1}{n}\right].$$

Mulțimea din dreapta este, oricare ar fi n, din cauza eredității, de prima categorie în x_0, deci

$$y_1 + \frac{1}{n} \in \{y_2\}$$

pentru orice n. Deci avem într-adevăr

$$\{y_1\} \subset \{y_2\}'$$

și deci

$$\inf \{y_1\} = \inf \{y_2\}.$$

În ce situație stă limita calitativă față de limita ordinară? Avem relațiile

$$\lim_{x \to x_0} \inf f(x) \leqq \lim_{x \to x_0} \text{cal inf } f(x) \leqq \lim_{x \to x_0} \text{cal sup } f(x) \leqq \lim_{x \to x_0} \sup f(x) \qquad (\alpha)$$

care rezultă imediat, dacă ținem seama că lim sup $f(x)$ este marginea inferioară a acelor numere y, pentru care mulțimea

$$\underset{x}{E}\,[f(x) > y]$$

admite pe x_0 ca punct izolat (Într-un punct izolat o mulțime este în mod banal de prima categorie).

În ce privește a doua inegalitate (α), ea rezultă din faptul că complementara mulțimii

$$\underset{x}{E}\,[f(x) < y]$$

este

$$\underset{x}{E}\,[f(x) \geqq y].$$

Dacă prima mulțime este de prima categorie în x_0, atunci în mod sigur a doua mulțime este de a doua categorie în x_0. Deci orice y, pentru care prima mulțime este de prima categorie în x_0, este mai mic decît orice y pentru care a doua mulțime este de prima categorie în x_0. Ținînd seama și de *observația* de mai sus, rezultă a doua inegalitate (α). Șirul de inegalități de mai sus ne arată că *dacă o funcție $f(x)$ admite într-un punct o limită ordinară, atunci ea admite în acel punct și o limită calitativă. și cele două limite coincid.*

Deci, noțiunea de „limită calitativă" reprezintă o adevărată extensiune a noțiunii de „limită".

T e o r e m a 3. *Dacă o funcție $f(x)$ admite într-un punct x_0 o limită printr-o mulțime E care este un rezidual în punctul x_0, atunci funcția $f(x)$ admite și o limită calitativă în punctul x_0 și cele două limite coincid.*

Avem

$$\underset{x \in E}{E}\,[f(x) > y] \subset \underset{x}{E}\,[f(x) > y].$$

Să notăm cu E_1 și E_2 mulțimea din stînga, respectiv cea din dreapta; cu $\{y_1\}$ și $\{y_2\}$ valorile lui y pentru care mulțimile E_1, respectiv E_2, sînt de prima categorie în punctul x_0. Din cauza proprietății de ereditate a mulțimilor de prima categorie avem

$$\{y_2\} \subset \{y_1\}.$$

Pe de altă parte, avem

$E_2 - E_1 \subset 1 - E =$ o mulțime de prima categorie în punctul x_0. Tot din cauza eredității rezultă că $E_2 - E_1$ este o mulțime de prima categorie în x_0. Deoarece $E_1 \subset E_2$, avem

$E_2 = E_1 +$ o mulțime de prima categorie în x_0.

Deci, $\{y_1\} \subset \{y_2\}$. În consecință

$$\{y_1\} \equiv \{y_2\}.$$

Rezultă că

$$\lim_{x \to x_0} \text{cal sup} = \inf \quad \{y\}.$$

Să notăm cu $\{y^*\}$ mulțimea acelor valori y pentru care

$$\underset{x}{E}\,[f(x) > y\,;\ x \in E]$$

admite pe x_0 ca punct izolat. Avem

$$\{y^*\} \subset \{y_1\},$$

deoarece într-un punct izolat o mulțime este de prima categorie.

Deci $$\inf \{y_1\} \leq \inf \{y^*\}.$$

În mod analog se arată că, dacă notăm cu $\{\bar{y}_1\}$, $\{\bar{y}_2\}$ valorile lui y pentru care mulțimile

$$\underset{x}{E}\,[f(x) < y\,;\ x \in E], \quad \underset{x}{E}\,[f(x) < y]$$

sînt de prima categorie în x_0 avem

$$\{\bar{y}_1\} = \{\bar{y}_2\}$$

și

$$\lim_{x \to x_0} \text{cal inf} = \sup \{\bar{y}_1\}.$$

De asemenea, dacă notăm cu $\{\bar{y}^*\}$ mulțimea valorilor lui y pentru care

$$\underset{x}{E}\,[f(x) < y\,;\ x \in E]$$

admite pe x_0 ca punct izolat, rezultă

$$\{\bar{y}^*\} \subset \{\bar{y}_1\},$$

deci

$$\sup \{\bar{y}^*\} \leqq \sup \{\bar{y}_1\}.$$

Însă, pentru orice y_1 și $\bar{y}_1$ avem

$$\bar{y}_1 < y_1.$$

Într-adevăr, dacă

$$\underset{x}{E} [f(x) < \bar{y}_1; \quad x \in E]$$

este în punctul x_0 de prima categorie, complementara ei față de E

$$\underset{x}{E} [f(x) \geqq \bar{y}_1; \quad x \in E]$$

este un rezidual în x_0 (deoarece E însăși este un rezidual în x_0). Cu atît mai mult, pentru orice $y < \bar{y}_1$ mulțimea

$$\underset{x}{E} [f(x) \geqq y; \quad x \in E]$$

este un rezidual în x_0. Deci orice valoare y_1 pentru care mulțimea de mai sus este de prima categorie în x_0, satisface relației

$$\bar{y}_1 < y_1.$$

Rezultă

$$\sup \{\bar{y}_1\} \leqq \inf \{y_1\}.$$

Avem deci

$$\sup \{\bar{y}^*\} \leqq \sup \{\bar{y}_1\} \leqq \inf \{y_1\} \leqq \inf \{y^*\}.$$

Deoarece $f(x)$ are, prin ipoteză, în x_0, o limită prin E, avem

$$\sup \{\bar{y}^*\} = \inf \{y^*\}$$

sau

$$\lim_{x \to x_0 \text{ prin } E} \inf f(x) = \lim_{x \to x_0 \text{ prin } E} \sup f(x),$$

deci

$$\sup \{\bar{y}_1\} = \inf \{y_1\}$$

sau

$$\lim_{x \to x_0} \text{cal inf } f(x) = \lim_{x \to x_0} \text{cal sup } f(x).$$

Această teoremă admite reciproca :

T e o r e m a 4. *Dacă o funcție $f(x)$ definită într-un spațiu topologic admite într-un punct x_0 o limită calitativă egală cu l, atunci există un rezidual E în punctul x_0, astfel ca $f(x)$ să admită pe l ca limită în punctul x_0, prin mulțimea E.*

Fie ε un număr pozitiv arbitrar. Mulțimea

$$E_1^{(\varepsilon)} = \underset{x}{E} [f(x) \geqq l + \varepsilon]$$

este de prima categorie în punctul x_0, deci $1 - E_1$ este un rezidual în x_0. Mulțimea

$$E_2^{(\varepsilon)} = \underset{x}{E} [f(x) \leqq l - \varepsilon]$$

este de prima categorie în x_0, deci $1 - E_2$ este un rezidual în x_0. Deci și mulțimea

$$E = (1 - E_1)(1 - E_2)$$

este un rezidual în x_0, adică există o vecinătate $V(\varepsilon)$ a punctului x_0, astfel ca VE să fie un rezidual față de V. Pentru orice punct $x \in E\,V$ avem

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

Este ușor de văzut că $f(x)$ admite în punctul x_0 o limită prin mulțimea E, egală cu l. Într-adevăr, fie un alt număr pozitiv ε^*. Dacă $\varepsilon^* < \varepsilon$, atunci avem

$$|f(x) - l| < \varepsilon^*$$

pentru orice $x \in E\,V(\varepsilon)$.

Dacă $\varepsilon^* > \varepsilon$, avem

$$E_1(\varepsilon^*) \supset E_1(\varepsilon),\ E_2(\varepsilon^*) \supset E_2(\varepsilon),$$

$$1 - E_1(\varepsilon^*) \subset 1 - E_1(\varepsilon),\ 1 - E_2(\varepsilon^*) \subset 1 - E_2(\varepsilon),$$

deci

$$E(\varepsilon^*) \subset E(\varepsilon)$$

și avem

$$|f(x) - l| < \varepsilon^*$$

pentru $x \in E(\varepsilon^*)\,V(\varepsilon)$.

Deci oricare ar fi numărul pozitiv ε^*, putem găsi un subrezidual E^* din E în punctul x_0, astfel ca

$$|f(x) - l| < \varepsilon^*$$

pentru $x \in E^*$.

Deci $f(x)$ admite în punctul x_0 o limită prin E rezidual în x_0, egală cu l.

Putem da acum o condiție necesară și suficientă pentru existența limitei calitative, care ne va da posibilitatea să stabilim unele proprietăți de calcul.

Necesar și suficient ca o funcțională $f(x)$, definită într-un spațiu topologic, să admită într-un punct x_0 al acestui spațiu o limită calitativă egală cu l este ca fiecărui număr pozitiv ε să-i corespundă o vecinătate $V(x_0, \varepsilon)$ a punctului x_0, astfel încît să avem

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

pentru orice punct x din $V(x_0, \varepsilon)$, eventual cu excepția unor puncte x aparținînd unei submulțimi $P \subset V(x_0, \varepsilon)$, de prima categorie față de $V(x_0, \varepsilon)$.

Aplicații. Suma a două funcții $f_1(x)$, și $f_2(x)$ care au în punctul x_0 ca limite calitative numerele l_1 și l_2, admite în x_0 o limită calitativă egală cu $l_1 + l_2$.

Demonstrație. Fie ε un număr pozitiv. Există două vecinătăți $V_1(x_0,\varepsilon)$ și $V_2(x_0,\varepsilon)$ ale lui x_0, astfel ca

$$|f_1(x)-l_1|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ dacă } x\in V_1^*(x_0,\varepsilon)$$

și

$$|f_2(x)-l_2|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ dacă } x\in V_2^*(x_0,\varepsilon)$$

(prin V_1^*, V_2^* am notat vecinătățile V_1, V_2 lipsite, eventual, de cîte o anume mulțime de prima categorie).

Fie

$$V^*=V_1^*\cap V_2^*.$$

Avem

$$|f_1(x)+f_2(x)-l_1-l_2|\leqq|f_1(x)-l_1|+|f_2(x)-l_2|\leqq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

dacă $x\in V^*(x_0,\varepsilon)$.

În mod analog se demonstrează că suma unui număr finit de funcții admițînd o limită calitativă într-un punct admite în acel punct o limită calitativă egală cu suma limitelor calitative ale termenilor.

De asemenea, se arată ușor că diferența și produsul a două funcții care admit în x_0 cîte o limită calitativă, admit ele însele o limită calitativă egală cu diferența, respectiv produsul, limitelor calitative ale factorilor.

Teorema 5. *Dacă $f(x)$ și $g(x)$ diferă doar pe o mulțime care este de prima categorie într-un punct x_0, atunci limitele lor calitative extreme coincid în x_0.*

Fie, pentru o valoare y, mulțimile

$$E_1=\underset{x}{E}\,[f(x)>y],\quad E_2=\underset{x}{E}\,[g(x)>y].$$

Mulțimile E_1 și E_2 sînt în același timp de prima categorie sau nu în x_0. Rezultă imediat

Teorema 6. *Dacă două funcții $f(x)$ și $g(x)$ coincid pe o mulțime E care posedă proprietatea lui Baire, atunci limitele lor calitative extreme coincid în mod frecvent pe mulțimea E.*

Conform teoremei 2, mulțimea E este în mod frecvent, pe ea însăși, de a doua categorie, iar $1-E$ este, în mod frecvent, pe E, de prima categorie. Deci, în mod frecvent pe E se aplică teorema anterioară: funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ diferă doar pe $1-E$, care fiind de prima categorie în mod frecvent pe E, limitele calitative extreme ale lui $f(x)$ și $g(x)$ coincid în mod frecvent pe E.

Continuitatea aproximativă calitativă

O funcție $f(x)$ este calitativ continuă într-un punct x_0 dacă limita calitativă în acest punct există și este egală cu $f(x_0)$. Rezultă imediat că o funcție continuă într-un punct este și calitativ continuă în acest punct.

De asemenea, suma, diferența, produsul a două funcții calitativ continue într-un punct sînt funcții calitativ continue în acel punct.

Teorema 7. *Funcțiile cu proprietatea lui Baire sînt, în mod frecvent, calitativ continue.* Într-adevăr, o condiție necesară și suficientă ca o funcție să posede proprietatea lui Baire (într-un spațiu metric separabil), este ca ea să fie continuă, cînd facem abstracție de o mulțime de prima categorie [4]*). Dar aceasta atrage, în mod frecvent, continuitatea calitativă.

Această teoremă este analogă teoremei lui Denjoy : O funcție măsurabilă, aproape peste tot finită, este aproape peste tot aproximativ continuă.

Reciproca teoremei lui Denjoy, datorită lui Stepanov, își are și ea un echivalent calitativ :

Teorema 7'. *O funcție, în mod frecvent uniform calitativ continuă, posedă proprietatea lui Baire.*

Aplicații la continuitatea liniară

Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcție de punct definită într-un spațiu euclidian cu n dimensiuni. În altă parte [5] am pus în evidență următoarea proprietate a funcțiilor $f(x_1, \ldots, x_n)$ liniar continue (proprietate care le apropie de funcțiile continue) :

O funcție $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definită într-un domeniu G din spațiul euclidian cu n dimensiuni, liniar continuă în acest domeniu, este complet determinată de valorile luate pe o mulțime densă peste tot în G.

Proprietatea aceasta are și următorul aspect, important pentru cele ce urmează :

Nici o modificare a valorilor unei funcții liniar continue $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în punctele ei de discontinuitate nu ne poate conduce la o funcție continuă.

Se pune atunci în mod firesc problema : Fiind dată o funcție liniar continuă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dar care nu este continuă, putem modifica valorile ei în punctele de discontinuitate în așa fel încît să obținem o funcție calitativ continuă ?

La această întrebare se poate răspunde prin

Teorema 8 (*de prelungire a funcțiilor liniar continue*). *Fiind dată o funcție $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liniar continuă într-un domeniu G, condiția necesară și suficientă ca să existe o funcție*

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

calitativ continuă în G (eventual cu excepția unei mulțimi nedense) și care să coincidă cu $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, în punctele în care aceasta din urmă este continuă, este ca

$$\lim \text{cal } F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

să existe în G (exceptînd, eventual, o mulțime nedensă).

În acest caz funcția

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

*) p. 306.

este unic determinată (exceptînd eventual o anume mulțime nedensă) și este dată de

$$H(x_1, x_2, \ldots x_n) = \begin{cases} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ în punctele de continuitate} \\ \lim \text{cal } F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ în rest (exceptînd eventual o anume mulțime nedensă).} \end{cases}$$

Condiția este necesară. Demonstrăm că: Dacă $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcție liniar continuă în G și dacă există o funcție $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, calitativ continuă în G — N (N nedensă) și care să se reducă la $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în punctele în care aceasta din urmă este continuă, atunci:

1) Există o mulțime nedensă N^*, astfel ca $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să admită o limită calitativă unică în orice punct din $G - N^*$;

2) În orice punct din $G - N^*$, $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are ca valoare limita calitativă unică a lui $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Demonstrație. Deoarece, conform unei teoreme a lui Baire, $\mathcal{C}$ (mulțimea punctelor de continuitate ale lui $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este de categoria a doua în orice porțiune din G, rezultă că $\mathcal{C}$ este de categoria a doua în orice punct din G; cum, pe de altă parte, $\mathcal{C}$, fiind un G_δ (mulțimea punctelor de continuitate ale oricărei funcții este un G_δ), se bucură de proprietatea lui Baire (orice mulțime boreliană posedă proprietatea lui Baire), rezultă, conform unei condiții a lui Sierpinski care a mai fost folosită mai sus, că $\mathcal{D}$ (mulțimea punctelor de discontinuitate) este de a doua categorie doar în punctele unei mulțimi nedense N_1. Să notăm $N^* = N + N_1$; N^* este de asemenea nedensă în G. Fie acum un punct $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ din $G - N^*$. În acest punct $\mathcal{D}$ este de prima categorie. Deoarece $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ coincid pe $\mathcal{C}$, rezultă, conform teoremei 5, că limitele lor calitative extreme coincid în punctul $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Însă $H(x_1, x_2, \ldots x_n)$ este calitativ continuă în punctul $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ deci admite o limită calitativă unică, egală cu $H(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$. Deci și $F(x_1 x_2, \ldots, x_n)$ admite o limită calitativă unică, egală cu $H(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Necesitatea condiției este demonstrată.

Condiția este suficientă. Dacă $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, liniar continuă în G, admite o limită calitativă unică în $G - N^*$ (N^* nedensă), atunci funcția

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ în } \mathcal{C} \\ \lim \text{cal } F(x_1, \ldots, x_n) \text{ în celelalte puncte din } G - N^* \end{cases}$$

este calitativ continuă în $G - N^*$.

Demonstrație. Fie $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in G - N^*$. Mulțimea $\mathcal{D}$ este de prima categorie în $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Deci $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diferă pe o mulțime de prima categorie în punctul $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Conform teoremei 5, ele au, în acest punct, aceleași limite calitative extreme. Însă $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are o limită calitativă unică (prin ipoteză). Deci și $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are o limită calitativă unică, egală cu

$$\lim \text{cal } F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

care este, prin definiție, chiar valoarea funcției $H\ (x_1, x_2, ..., x_n)$ în punctul $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Deci $H(x_1, x_2, ..., x_n)$ este calitativ continuă în orice punct din $G - N^*$.

Suficiența condiției este demonstrată.

Un alt aspect al teoremei de mai sus este următorul:

Fiind dată o funcție $F\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liniar continuă în G, dacă două funcții $H_1\ (x_1, x_2, ..., x_n)$ și $H_2\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, calitativ continue în $G - N$ (N nedensă), se reduc la $F\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în punctele în care aceasta din urmă este continuă, atunci funcțiile $H_1\ (x_1, x_2, ..., x_n)$ și $H_2\ (x_1, x_2, ..., x_n)$ coincid în tot domeniul G (exceptînd, eventual, o anume mulțime nedensă N^*).

Cum se explică predominanța, în toate formulările de mai sus, a mulțimii excepționale nedense? Conform unei celebre teoreme a lui Baire, pentru o funcție liniar continuă mulțimea $\mathfrak{C}$ este de a doua categorie în orice punct din $\mathfrak{D} - \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ nedensă). Deci, $\mathfrak{D}$ însăși este o mulțime de prima categorie, conform teoremei lui Banach. De aici rezultă:

O funcție liniară continuă $f\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este în mod frecvent continuă în domeniul G. Deci, dacă vrem să distingem între diferite genuri de funcții liniar continue, trebuie să luăm în considerare mulțimile de prima categorie și să nu considerăm ca neglijabile decît mulțimile nedense.

Derivata aproximativă calitativă

Fie $F\ (x)$ o funcție reală de o variabilă reală. Numim derivata superioară calitativă la dreapta a funcției $F\ (x)$ într-un punct x_0 și notăm

$$\overline{F}^{+}_{\text{cal}}\ (x_0)$$

limita superioară calitativă la dreapta a lui $H\ (x)$

$$H\ (x) = \frac{F\ (x) - F\ (x_0)}{x - x_0}$$

cînd $x \to x_0$.

În mod simetric se definește derivata inferioară calitativă la dreapta $\underline{F}^{+}_{\text{cal}}\ (x)$ cît și derivatele $\overline{F}^{-}_{\text{cal}}\ (x)$ și $\underline{F}^{-}_{\text{cal}}\ (x)$. Cea mai mică dintre derivatele inferioare unilaterale se numește derivata calitativă inferioară și se notează $\underline{F}_{\text{cal}}\ (x)$. Cea mai mare dintre derivatele calitative superioare unilaterale se numește derivata calitativă superioară și se notează $\overline{F}_{\text{cal}}\ (x)$.

$F\ (x)$ se spune derivabilă calitativ în x_0 dacă

$$\overline{F}_{\text{cal}}\ (x_0) = \underline{F}_{\text{cal}}\ (x_0).$$

Valoarea comună se notează

$$F'_{\text{cal}}(x_0)$$

și se numește derivata calitativă a funcției $F\ (x)$ în punctul x_0. Mai putem scrie

$$F'_{\text{cal}}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \text{cal}\ \frac{F\ (x) - F\ (x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \text{prin}\ \mathfrak{R}\ \frac{F\ (x) - F\ (x_0)}{x - x_0},$$

unde $\mathfrak{R}$ este un rezidual în x_0.

O funcție $F(x)$ derivabilă în x_0 este derivabilă calitativ în x_0 și cele două derivate coincid.

Suma și diferența a două funcții derivabile calitativ sînt de asemenea derivabile calitativ și

$$[F(x) \pm G(x)]'_{cal} = F'_{cal}(x) \pm G'_{cal}(x).$$

Determinarea unei funcții continue, cînd există derivata ei calitativă

Lemă de tip Zygmund. *Fie $F(x)$ continuă în $[a, b]$. Dacă mulțimea Y a valorilor luate de $F(x)$ în*

$$E = \underset{x}{E}\,[\overline{F}^{+}_{cal}(x) \leqq 0]$$

este total discontinuă, atunci $F(x)$ este monoton crescătoare în $[a,b]$.

Demonstrație. Deoarece

$$\overline{F}^{+}_{cal}(x) \leqq \overline{F}^{+}(x)$$

avem

$$E^* = \underset{x}{E}\,[\overline{F}^{+}(x) \leqq 0] \subset E = \underset{x}{E}\,[\overline{F}^{+}_{cal}(x) \leqq 0].$$

Fie Y^* mulțimea valorilor pe care le ia funcția $F(x)$ pe mulțimea E^*. Avem

$$Y^* \subset Y.$$

Mulțimea Y^* este total discontinuă în $[a, b]$, ca submulțime a lui Y, care este prin ipoteză total discontinuă în $[a, b]$. Conform lemei lui Zygmund [6]*) funcția $F(x)$ este monoton crescătoare în $[a, b]$.

Corolarul 1. *Dacă derivata superioară calitativă a unei funcții $F(x)$ continue este nenegativă în $[a,b]$, atunci $F(x)$ este monoton crescătoare în $[a,b]$.*

Corolarul 2. *Dacă derivatele calitative a două funcții continue $F_1(x)$ și $F_2(x)$ există și sînt egale în orice punct din $[a, b]$, atunci $F_1(x)$ și $F_2(x)$ diferă printr-o constantă.*

Acest corolar comportă o generalizare, prin intermediul următoarei

Teorema 9. *Dacă $F(x)$ este continuă în $[a, b]$ și dacă „aproape pretutindeni**), în $[a, b]$ avem*

$$\overline{F}^{+}_{cal} \geqq 0,$$

atunci $F(x)$ este monoton crescătoare în $[a, b]$.

Demonstrație. Deoarece

$$\overline{F}^{+}_{cal}(x) \leqq \overline{F}^{+}(x),$$

rezultă

$$E = \underset{x}{E}\,[\overline{F}^{+}_{cal}(x) \geqq 0] \subset E^* = \underset{x}{E}\,[\overline{F}^{+}(x) \geqq 0].$$

---

*) p. 137.

**) Se spune că o proprietate de punct are loc aproape pretutindeni, dacă ea nu este îndeplinită cel mult pe o mulțime numerabilă.

Însă

$$[a, b] - E^* \subset [a, b] - E$$

și deoarece $[a, b] - E$ este numerabilă, cu atît mai mult $[a, b] - E^*$ este numerabilă. Conform teoremei 17, din [6]*), $F(x)$ este monoton crescătoare în $[a, b]$.

Teorema 10 *(simetrică). Dacă, aproape pretutindeni în* $[a, b]$, *avem*

$$\underline{F}^+_{\text{cal}} \leqq 0,$$

$F(x)$ *fiind continuă în* $[a, b]$, *atunci* $F(x)$ *este monoton descrescătoare în* $[a, b]$.

Corolar. *Dacă o funcție continuă* $F(x)$ *este derivabilă calitativ aproape pretutindeni în* $[a, b]$ *și dacă această derivată este nulă aproape pretutindeni, atunci* $F(x)$ *se reduce la o constantă în tot intervalul* $[a, b]$.

Observație. Toate proprietățile de mai sus rămîn valabile dacă se înlocuiește derivata calitativă prin derivata aproximativă a lui Denjoy și Hincin.

Se extind de asemenea teoremele lui Schaeffer și Dini, obținîndu-se rezultate care înglobează pe cele precedente.

Teorema 11. *O funcție* $F(x)$ *continuă, care admite aproape pretutindeni derivată calitativă superioară la dreapta finită, este determinată (în afară de o constantă aditivă) de către acest număr derivat dat aproape pretutindeni.*

Demonstrație (Se imită raționamentul din [6]**). Fie $F(x)$ și $G(x)$ două funcții continue, cu

$$\overline{F}^+_{\text{cal}}(x) = \overline{G}^+_{\text{cal}}(x)$$

aproape pretutindeni. Fie $H(x) = F(x) - G(x)$. Avem

$$\underline{H}^+_{\text{cal}}(x) + \overline{G}^+_{\text{cal}}(x) \leqq \overline{F}^+_{\text{cal}}(x) \leqq \overline{H}^+_{\text{cal}}(x) + \overline{G}^+_{\text{cal}}(x),$$

deci

$$\underline{H}^+_{\text{cal}}(x) \leqq 0 \leqq \overline{H}^+_{\text{cal}}(x) \text{ aproape pretutindeni.}$$

Aplicînd funcției $H(x)$, teorema de mai sus, împreună cu simetrica ei, obținem

$$H(x) \equiv \text{const.}$$

Teorema 12 *(Generalizarea teoremei lui Dini). Dacă funcția* $F(x)$ *este continuă în* $[a, b]$, *atunci marginile superioară și inferioară ale numerelor derivate ale lui Dini calitative sînt egale cu marginile superioară, respectiv inferioară, a raportului*

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1},$$

unde x_1 *și* x_2 *sînt puncte oarecare din* $[a, b]$.

*) p. 137.
**) p. 138.

Demonstrație (Se imită raționamentul din [6]*). Fie

$$m \leqq \overline{F}^{+}_{cal}(x) \leqq M, \text{ pentru } x \in [a, b].$$

Aplicăm funcției $F(x) - mx$, a cărei derivată calitativă superioară la dreapta este nenegativă în $[a, b]$, teorema 9. Aplicăm apoi teorema 10 funcției $F(x) - Mx$, a cărei derivată calitativă inferioară la dreapta este nepozitivă. Rezultă că $F(x) - mx$ este monoton crescătoare în $[a, b]$, iar $F(x) - Mx$ este monoton descrescătoare în $[a, b]$. Deci, dacă $a \leqq x_1 \leqq x_2 \geqq b$, avem

$$F(x_2) - mx_2 \geqq F(x_1) - mx_1,$$

$$m(x_2 - x_1) \leqq F(x_2) - F(x_1).$$

În mod analog

$$F(x_2) - F(x_1) \leqq M(x_2 - x_1).$$

Deci

$$m \leqq \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq M.$$

Corolar. *Dacă unul oarecare din cele patru numere derivate calitative ale unei funcții continue este o funcție continuă într-un punct x_0, atunci și celelalte trei numere derivate calitative sînt continue în acel punct și egale cu primul, adică funcția este derivabilă calitativ în acel punct.*

Funcții care au în mod frecvent aceiași derivată calitativă

Teorema 13. *Dacă două funcții $F(x)$ și $G(x)$ nu diferă decît pe o mulțime de prima categorie într-un punct x_0, atunci ele au în acest punct aceleași derivate calitative extreme.*

Demonstrație. Deoarece derivatele calitative extreme ale funcțiilor $F(x)$ și $G(x)$ sînt limitele calitative extreme ale funcțiilor

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}, \quad \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0},$$

teorema este o consecință directă a teoremei corespunzătoare asupra limitelor calitative extreme (teorema 5).

Teorema 14. *Dacă $F(x)$ și $G(x)$ coincid pe o mulțime E cu proprietatea lui Baire, atunci derivatele lor calitative extreme coincid în mod frecvent pe E.*

Demonstrație. Conform teoremei lui Banach și datorită faptului că posedă proprietatea lui Baire, mulțimea E este în mod frecvent un rezidual. În fiecare punct din E în care E este un rezidual, funcțiile $F(x)$ și $G(x)$ au aceleași derivate calitative extreme, conform teoremei precedente.

Corolar. *Două funcții $F(x)$ și $G(x)$ derivabile calitativ și coincizînd pe o mulțime E cu proprietatea lui Baire au în mod frecvent pe E aceleași derivate calitative.*

*) p. 139.

Teorema 15. *Dacă funcția $F(x)$ este derivabilă prin mulțimea E, cu proprietatea lui Baire, în mod frecvent pe E, atunci $F(x)$ este derivabilă calitativ în mod frecvent pe E și avem*

$$F'_{\text{cal}}(x) = F'_E(x),$$

în mod frecvent.

Demonstrație. Datorită teoremei lui Banach și datorită faptului că E este cu proprietatea lui Baire, E este, în mod frecvent pe E, un rezidual. Datorită teoremei 3 și datorită ipotezei, derivata calitativă a lui $F(x)$ există în mod frecvent pe E, fiind egală chiar cu derivata lui $F(x)$ prin rezidualul constituit de mulțimea E.

Derivata calitativă simetrică

Definiții. Spunem că o funcție $f(x)$ este derivabilă calitativ, simetric, într-un punct x_0, dacă există un rezidual $\mathfrak{R}$ în x_0 astfel ca raportul

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

cu

$$x' \in \mathfrak{R},\ x'' \in \mathfrak{R},\ x' \leqq x_0 \leqq x'',\ x' \neq x''$$

să admită o limită, atunci cînd $x'' - x'$ tinde la zero.

Dacă limita există, ea poartă numele de derivata calitativă simetrică a funcției $f(x)$ în punctul x_0.

Dacă $f(x)$ admite o derivată calitativă simetrică în fiecare punct al unui interval (a, b), rezidualul $\mathfrak{R}$ fiind același pentru fiecare punct, spunem că $f(x)$ admite o derivată calitativă simetrică uniformă în intervalul (a, b).

Cu aceste definiții putem enunța

Teorema 16. *Dacă o funcție $f(x)$ admite într-un interval (a, b) o derivată calitativă simetrică uniformă, atunci:*

1° *funcția $f(x)$ posedă proprietatea lui Baire;*

2° *anularea identică a derivatei calitative simetrice uniforme atrage reducerea funcției $f(x)$ la o constantă calitativă* (Prin „*constantă calitativă*" înțelegem o funcție constantă pe un rezidual din (a, b)).

Demonstrație. În punctele care aparțin lui $\mathfrak{R}$ existența derivatei calitative simetrice atrage existența derivatei calitative și egalitatea ei cu cea simetrică. Deci, în orice punct din $\mathfrak{R}$, $f(x)$ este continuă prin $\mathfrak{R}$, ceea ce înseamnă că, abstracție făcînd de o mulțime de prima categorie, $f(x)$ este continuă în (a, b). Însă aceasta este o condiție necesară și suficientă ca $f(x)$ să posede proprietatea lui Baire, în (a, b).

Pentru a justifica partea a doua a teoremei, fie $\mathfrak{R}$ un rezidual prin care $f(x)$ admite o derivată simetrică nulă în orice punct din (a, b). Fie $x_1 \in \mathfrak{R}$ și $x_2 \in \mathfrak{R}$ (fig. 1).

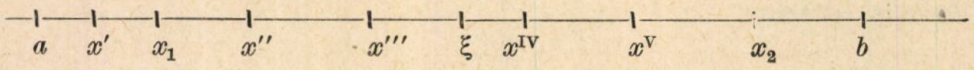

Fig. 1

Numărul pozitiv ε fiind dat, există $x_1 > x' \in \mathfrak{R}$ și $x_1 < x'' \in \mathfrak{R}$ astfel ca

$$| f(x'') - f(x') | < \varepsilon (x'' - x').$$

Însă, cum $x_1 \in \mathfrak{R}$, putem lua $x' = x_n$,

$$| f(x'') - f(x_1) | < \varepsilon (x'' - x_1). \tag{1}$$

Fie ξ marginea superioară a punctelor $x'' \in \mathfrak{R}$, care satisfac relația (1) și sînt inferioare lui x_2.

Dacă $\xi < x_2$, atunci $f(x)$, avînd în ξ o derivată simetrică prin $\mathfrak{R}$, există $\xi > x''' \in \mathfrak{R}$ și $\xi < x^{IV} \in \mathfrak{R}$ astfel ca

$$| f(x^{IV}) - f(x''') | < \varepsilon (x^{IV} - x'''). \tag{2}$$

Însă x''' trebuind să fie la stînga lui ξ și să aparțină lui $\mathfrak{R}$, îl putem alege astfel ca, rămînînd oricît de aproape de ξ, să avem

$$| f(x''') - f(x_1) | < \varepsilon (x''' - x_1). \tag{3}$$

Însumînd (1) cu (3), obținem

$$| f(x^{IV}) - f(x_1) | < \varepsilon (x^{IV} - x_1),$$

relație care contrazice faptul că ξ este marginea superioară a punctelor $x \in \mathfrak{R}$, pentru care avem relația (1).

Deci ipoteza că $\xi < x_2$ este falsă. Avem $\xi = x_2$. Însă $x_2 \in \mathfrak{R}$, deci putem alege un punct $x_2 > x^V \in \mathfrak{R}$, suficient de aproape de x_2, astfel încît să avem

$$| f(x_2) - f(x^V) | < \varepsilon (x_2 - x^V) \tag{4}$$

și

$$| f(x^V) - f(x_1) | < \varepsilon (x^V - x_1). \tag{5}$$

Însumînd (4) cu (5), avem

$$| f(x_2) - f(x_1) | < \varepsilon (x_2 - x_1)$$

și deoarece ε este un număr pozitiv oarecare, iar membrul stîng al ultimei inegalități nu depinde de ε, avem

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Însă x_1 și x_2 au fost luate arbitrar în $\mathfrak{R}$. Deci $f(x)$ este constantă în $\mathfrak{R}$, adică se reduce la o constantă calitativă în (a, b).

Teorema este complet demonstrată.

Exemplu. Fie o funcție $f(x)$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} K \text{ pentru } x \in \mathfrak{R} \text{ (rezidual de măsură nulă),} \\ x \text{ pentru } x \in (a, b) - \mathfrak{R}. \end{cases}$$

Această funcție admite, în orice punct din (a, b), o derivată calitativă simetrică uniformă identic nulă. Funcția se reduce, într-adevăr, la o constantă calitativă.

Pe de altă parte, această funcție nu este derivabilă și nici măcar continuă, în niciun punct (exceptînd punctul $x = K$, în cazul $a < K < b$).

Teoremă reciprocă. *Dacă o funcție $f(x)$ este o constantă calitativă într-un interval (a, b), atunci ea admite o derivată simetrică uniformă, identic nulă în intervalul (a, b).*

Teorema rezultă imediat din faptul că expresia

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'},$$

unde $x' \in \mathfrak{R}$, $x'' \in \mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}$ fiind rezidualul pe care $f(x)$ este constantă), este identic nulă.

Este evident că o constantă calitativă este o funcție care posedă proprietatea lui Baire.

Spațiul funcțiilor cu proprietatea lui Baire și funcțiile calitativ derivabile

Fie $\mathfrak{L}$ spațiul funcțiilor mărginite, cu proprietatea lui Baire. Îl metrizăm cu

$$| f_1 - f_2 | = \sup_{x \in I} | f_1(x) - f_2(x) |,$$

I fiind intervalul de definiție al funcțiilor.

Acest spațiu este complet. În adevăr, un șir convergent de funcții cu proprietatea lui Baire în I are ca limită o funcție cu proprietatea lui Baire în I.

Fie P proprietatea unei funcții f din $\mathfrak{L}$ de a nu avea în nici un punct din I o derivată simetrică calitativă finită. Definim o mulțime V_n în felul următor : $f \in V_n$, dacă există un șir de puncte.

$$x_1, x_2, \ldots, x_s, \ldots$$

din intervalul I (șir în care termenii ar putea, eventual, să coincidă de la un anume rang) astfel ca, pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe un număr $s(\varepsilon)$ cu proprietatea

$$\left| \frac{f(x_s - h) - f(x_s + k)}{h + k} \right| < n + \varepsilon$$

pentru $x_s - h$ și $x_s + k$ ($h > 0$, $k > 0$) aparținînd unui anume rezidual în punctul x_s.

Este ușor de văzut că o funcție $f \in \mathfrak{L}$ și care nu posedă proprietatea P aparține unui V_n. Într-adevăr, există cel puțin un punct x_0 în I, în care $f(x)$ admite o derivată simetrică calitativă, deci există un n astfel ca

$$\left| \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 + k)}{h + k} \right| < n$$

pentru $x_0 - h$ și $x_0 + k$ ($h > 0$, $k > 0$) aparținînd unui anume rezidual în x_0. În locul șirului

$$x_1, x_2, \ldots, x_s, \ldots$$

poate fi luat, aici, chiar șirul

$$x_0, x_0, \ldots, x_0, \ldots$$

Să arătăm că *mulțimea V_n este închisă.*
Fie

$$f_1, f_2, \ldots, f_l, \ldots \to f$$

un șir de funcții din V_n, tinzînd către funcția f. Avem

$$\left|\frac{f(x-h)-f(x+k)}{h+k}\right| \leqq \left|\frac{f(x-h)-f_l(x-h)}{h+k}\right| + \left|\frac{f_l(x-h)-f_l(x+k)}{h+k}\right| + \left|\frac{f_l(x+k)-f(x+k)}{h+k}\right|.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{l\to\infty} f_l = f$, putem alege pe l suficient de mare pentru ca primul și al treilea termen din dreapta să fie inferiori, fiecare în parte, lui $\frac{\varepsilon}{3}$.

Fie un l astfel ales. Funcției f_l îi corespunde un șir de puncte din I:

$$x_1^l, x_2^l, \ldots, x_s^l, \ldots$$

astfel ca pentru un punct anumit x_s^l din șir să avem

$$\left|\frac{f_l(x_s^l-h)-f_l(x_s^l+k)}{h+k}\right| < n + \frac{\varepsilon}{3}$$

cu $x_s^l - h$ și $x_s^l + k$ $(h > 0, k > 0)$ aparținînd unui anume rezidual $\mathcal{R}(x_s^l)$ în punctul x_s^l. Avem deci

$$\left|\frac{f(x_s^l-h)-f(x_s^l+k)}{h+k}\right| < n + \varepsilon$$

cu $x_s^l - h$, $x_s^l + k$ aparținînd lui $\mathcal{R}(x_s^l)$ $(h > 0,\ k > 0)$.

Deci $f \in V_n$. Mulțimea V_n este închisă.

Să arătăm acum că *V_n este o mulțimea frontieră.* Pentru aceasta trebuie să arătăm că complementara lui V_n este densă. Trebuie deci să arătăm că oricît de aproape de o funcție φ din $\mathfrak{L}$ se află o funcție din $\mathfrak{L} - V_n$.

Funcția φ, avînd proprietatea lui Baire, este uniform calitativ continuă în I. Cu alte cuvinte, există un rezidual $\mathcal{R}$, astfel ca funcția

$$\varphi\ (x/\mathcal{R})$$

să fie continuă.

Fie $\varepsilon > 0$. Fiecărui punct $x_0 \in \mathcal{R}$ îi corespunde număr $\eta > 0$, astfel ca

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

pentru $x \in \mathcal{R}$ și $|x - x_0| < \eta$. Căpătăm astfel o familie $\mathcal{J}$ de intervale care acoperă $\mathcal{R}$ în sensul lui Vitali. Conform teoremei de acoperire a lui Vitali — de tip calitativ — putem extrage o familie $\{\mathcal{J}_n\}$ numerabilă, de intervale disjuncte, care să acopere $\mathcal{R}$, exceptînd cel mult o submulțime nedensă din $\mathcal{R}$.

Fiecărui interval $\mathcal{J}_n$ îi atașăm un dreptunghi de dimensiuni 2η, 2ε cu centrul în punctul de coordonate x_0, $\varphi(x_0)$. În dreptunghiul

din figura 2 înscriem o linie frîntă, pornind din colțul de jos din stînga al dreptunghiului și astfel ca fiecare segment care o alcătuiește să aibă în valoare absolută, o pantă egală cu $n + 1$.

Fie $\Phi(x)$ funcția definită pe $\mathcal{R} - \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ este mulțimea nedensă

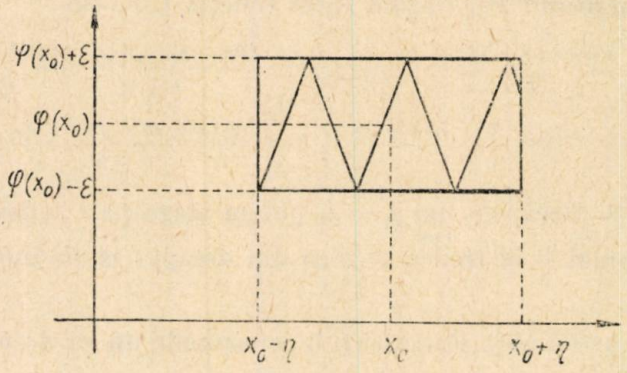

Fig. 2

excepțională din teorema de acoperire Vitali, de tip calitativ) și dată de graficul liniei frînte din figura 2.

Să definim o nouă funcție

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \Phi(x), & \text{dacă } x \in \mathcal{R} - \mathcal{M}, \\ \varphi(x), & \text{dacă } x \notin \mathcal{R} - \mathcal{M}. \end{cases}$$

Funcția $\varphi_\varepsilon(x)$ diferă de $\varphi(x)$ prin mai puțin de ε. Într-adevăr, pentru $x \notin \mathcal{R} - \mathcal{M}$, avem

$$| \varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x) | < \varepsilon,$$

relație care rezultă din însăși felul în care a fost definită funcția $\varphi_\varepsilon(x)$. Pentru $x \notin \mathcal{R} - \mathcal{M}$, avem

$$| \varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x) | = 0 < \varepsilon.$$

Funcția $\varphi_\varepsilon(x)$ posedă proprietatea lui Baire. Într-adevăr, ea este continuă prin rezidualul $\mathcal{R}$—$\mathcal{M}$, în orice punct din $\mathcal{R} - \mathcal{M}$, deoarece provine dintr-o linie frîntă, modificată în punctele unei mulțini de prima categorie.

În sfîrșit, $\varphi_\varepsilon(x) \in V_n$, deoarece panta oricărui segment al liniei frînte considerate este egală, în valoare absolută, cu $n + 1$, deci depășește, în orice punct din $\mathcal{R} - \mathcal{M}$, pe $n + \omega$ (pentru un ω suficient de mic), iar în punctele care nu aparțin lui $\mathcal{R}$—N, $\varphi_\varepsilon(x)$ este calitativ - discontinuă, deci raportul de diferențe finite nu este mărginit.

Am demonstrat decă că $\mathcal{Q} - V_n$ este o mulțime densă. Rezultă că V_n este o mulțime frontieră. Cum V_n este și închisă, rezultă că V_n este o mulțime nedensă. Deci, mulțimea

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n,$$

ce cuprinde toate funcțiile care nu posedă proprietatea P, este o mulțime de prima categorie. Conform teoremei lui Baire, V este și o mulțime frontieră. Complementara $\mathfrak{L} - V$ nu mai este o mulțime de prima categorie. Deci

Teorema 17. *În spațiul funcțiilor reale, definite și mărginite pe un același segment I, având proprietatea lui Baire pe I, funcțiile care admit în cel puțin un punct derivată calitativă simetrică finită formează o mulțime de prima categorie.*

Această teoremă este analogă teoremei lui St. Mazurkiewicz și St. Banach ([7], [8]) asupra situației pe care o au funcțiile derivabile în spațiul funcțiilor continue. O teoremă asemănătoare, pentru derivata aproximativă, a fost dată de V. Jarnik [9].

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИЗЕ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ОСНОВАННОМ НА ПОНЯТИИ О КАТЕГОРИИ (В СМЫСЛЕ БЭРА).

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В этой статье рассматриваются несколько понятий из качественного (или дескриптивного) анализа функций действительного переменного.

В отличие от метрического анализа, в котором основной является идея меры, а множества, которыми можно пренебречь, нульмерны, здесь центральной идеей является идея категории (в смысле Бэра), а множества, которыми можно пренебречь, суть множества первой категории (слабые множества по терминологии Н. Бурбаки; сноопообразные множества по терминологии А. Данжуа).

Большинство теорем, доказываемых в этой статье, были приведены без доказательства в [1], [2] и [3]. Определения введенных понятий также даны в этих заметках.

CONTRIBUTION À UNE ANALYSE DES FONCTIONS RÉELLES, BASÉE SUR LA NOTION DE CATÉGORIE (AU SENS DE BAIRE)

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on étudie quelques notions d'analyse qualitative (ou descriptive) des fonctions réelles.

A l'encontre de l'analyse métrique, où l'idée fondamentale est celle de *mesure* et les ensembles négligeables sont ceux de mesure nulle, l'idée centrale est, ici, celle de catégorie (au sens de Baire) et les ensembles négligeables sont ceux de la première catégorie (ensembles maigres, dans la terminologie de N. Bourbaki; ensembles gerbés, dans la terminologie de A. Denjoy).

La plupart des théorèmes démontrés dans ce travail ont été annoncés, sans démonstration, dans [1], [2] et [3]. Les définitions des notions introduites ont aussi été données dans ces Notes.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Marcus, *Limita aproximativă calitativă.* Comunicările Acad. R.P.R., t. III, nr. 1—2, ianuarie—februarie 1953, p. 9.
2. — *Continuitatea aproximativă calitativă.* Comunicările Acad. R.P.R., t. III, nr. 3—4, martie—aprilie 1953, p. 117.
3. — *Derivata aproximativă calitativă.* Comunicările Acad. R.P.R., t. III, nr. 11—12, noiembrie—decembrie 1953, p. 361.
4. C. Kuratowski, *Topologie I.* Varşovia-Wroclaw, 1948.
5. S. Marcus, *Asupra determinării unei funcţii parţial continue prin valorile luate pe o mulţime densă.* Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 11, noiembrie 1955, p. 1563.
6. S. Saks, *Théorie de l'intégrale.* Varşovia, 1933.
7. S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables.* Studia Math., 1931, t. III, p. 92—94.
8. S. Banach, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Functionenmengen.* Studia Math.,, 1931, t. III, p. 174—179.
9. V. Jarnik, *Sur la dérivée approximative unilatérale* Mém. Soc. R. Sci. Bohème, Cl. Sci. 1934, nr. 9.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 3—4, 1956

ASUPRA UNOR ECUAŢII FUNCŢIONALE DIN SPAŢIUL HILBERT COMPLEX L^2*)

DE

RADU BĂDESCU

Calculul efectiv al valorilor caracteristice ce corespund soluţiilor unei ecuaţii integrale de tipul Fredholm, valori care sînt zerourile funcţiei determinante $D(\mu)$, este în strînsă legătură cu determinarea zerourilor unei funcţii întregi, problemă care a fost teoretic rezolvată de J. Hadamard în cunoscutul său memoriu apărut în 1892 [1], [2]. Unele dificultăţi de ordin practic în aplicarea acestor rezultate, pentru determinarea valorilor caracteristice referitoare la o serie de ecuaţii integrale sau funcţionale, au făcut pe unii cercetători să trateze direct problema pornind de la ecuaţia însăşi sau de la transformarea funcţională legată de procesul de aproximaţii succesive ce conducea la soluţia căutată. Teoremele date de Hilbert [3], Fischer [4], Courant [5], referitoare la valorile proprii ale transformărilor liniare, completările aduse de Weyl [6] şi analizele mai profunde ale lui Kellogg [7] şi Wavre [8] ale transformărilor simetrice care nu sînt complet continue, ca şi cazul transformărilor complet continue simetrizabile studiat de Reid [9], au permis determinarea valorilor proprii, sau ale inverselor lor, valorile caracteristice, prin metode variaţionale sau funcţionale. Există însă unele transformări liniare nesimetrice, aparent foarte deosebite unele de altele, pentru care se pot pune în evidenţă cu o metodă directă de prelungire analitică, expresiile analitice ale valorilor proprii. Şi noi ne-am ocupat în diverse rînduri [10] de anumite ecuaţii integrale sau funcţionale prezentînd aspecte extrem de diferite, cărora le-am aplicat aceleaşi metode de rezolvare, aşa că ne-am propus să începem un studiu al transformărilor liniare pentru a stabili un minimum de condiţii suficiente pentru determinarea directă a expresiilor analitice ale valorilor proprii. În acest prim articol vom considera numai o clasă simplă de transformări liniare dintr-un anumit subspaţiu E al spaţiului Hilbert L^2, real sau complex, care lasă invariant pe E şi care permit determinarea soluţiilor $\Phi(z) \in E$ ale ecuaţiei funcţionale

$$\Phi(z) - \mu\,\Theta[\Phi(z)] = \psi(z), \tag{1}$$

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 18 iunie 1956.

$\psi(z)$ fiind o funcție cunoscută, μ un parametru complex, iar $\Theta[\Phi(z)]$ transformarea liniară menționată care a fost aplicată funcției $\Phi(z)$ ca element al subspațiului E. Determinarea valorilor caracteristice respective se va putea face cu ajutorul metodei de prelungire analitică utilizate.

1. Să considerăm deci în spațiul L^2 un subspațiu E care, avînd structura liniară și metrica definită de produsul scalar cu norma corespunzătoare, este închis prin raport cu convergența în medie pentru toate elementele sale. Acest spațiu va fi definit printr-o mulțime numerabilă de elemente $\theta_m(z)$, $(m = 0, 1, \ldots)$, depinzînd de variabila complexă z și formînd un *sistem ortonormat complet*. Aceste elemente vor putea fi, de exemplu, atașate unei curbe simple rectificabile C, care aparține unui compact $\bar{D}$ al planului z. În aceste ipoteze, produsul scalar va fi definit prin simbolul

$$\langle \theta_m, \theta_n \rangle = \int_C \theta_m(z)\, \bar{\theta}_n(z)\, ds = 0, \quad \text{pentru} \quad m \neq n, \tag{2}$$

în care integrala, extinsă curbei C, este luată în sensul lui Lebesgue — iar norma elementelor $\theta_m(z)$, egală cu unitatea, va fi dată de expresia

$$\| \theta_m(z) \| = \left[\int_C | \theta_m(z) |^2 \, ds \right]^{1/2} = 1, \quad \text{pentru} \quad m = n. \tag{3}$$

În aceste formule, $\bar{\theta}_m(z)$ este conjugata lui $\theta_m(z)$, iar ds, elementul de arc al curbei C.

Spațiul definit astfel de elementele $\theta_m(z)$ și de combinațiile lor liniare în număr finit sau infinit are caracteristicile următoare :

a) este un spațiu *liniar*, ale cărui elemente satisfac axiomelor cunoscute ale spațiilor vectoriale. În special, există un element zero, pentru care avem $0 \cdot \theta_m(z) = 0$, oricare ar fi $\theta_m(z) \in E$ și z aproape peste tot în D ;

b) este un spațiu *metric*, ale cărui produse scalare și norme sînt definite prin relații analoge cu (2) și (3), distanța dintre două elemente $\psi_1(z)$ și $\psi_2(z)$ fiind dată de norma diferenței lor $\| \psi_1 - \psi_2 \|$;

c) este o mulțime *închisă* prin raport cu convergența în medie, adică orice șir infinit $\psi_n(z) \in E$ va tinde către o limită aparținînd lui E, dacă

$$\| \psi_m(z) - \psi_n(z) \| < \varepsilon, \quad (m, n > N_\varepsilon) \tag{4}$$

pentru z aproape peste tot în D, adică în mod abreviat $z \in D$ (a.p.t). Se adoptă prin urmare convergența în sensul tare pentru acest subspațiu — care poate fi de altfel și tot spațiul L^2 întreg — și care este și separabil după ipotezele făcute.

2. Acestea fiind precizate, să considerăm transformările $\Theta[\psi(z)]$ care lasă invariant subspațiul E ; cu alte cuvinte, dacă $\psi(z)$ este un element aparținînd lui E

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \theta_n(z) ; \qquad \psi_n = \langle \psi, \theta_n \rangle, \tag{5}$$

a cărui normă este definită de seria convergentă

$$\| \psi(z) \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} | \psi_n |^2,$$

prin transformarea considerată a lui $\psi(z)$, se obține un alt element de aceeași formă (5)

$$\Theta[\psi(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \psi_n \theta_n(z), \tag{6}$$

în care numerele reale sau complexe K_n formează o mulțime mărginită. Marginea superioară $\overline{K}$ a mulțimii $\{ | K_n | \}$ este mai mare sau egală normei $\| \Theta \|$ a transformării (6).

Vom presupune că mulțimea $\{ | K_n | \}$ este ordonată după valorile descrescătoare, cînd n crește către infinit, și că are valoarea zero ca limită unică. În § 12 vom analiza și alte posibilități. Se mai poate observa că prima ipoteză nu este esențială, căci demonstrațiile pot fi cu ușurință modificate în caz contrar; ordonarea poate de altfel decurge și din convergența considerată.

Transformarea astfel definită este *liniară*, adică este aditivă, omogenă și mărginită, căci avem respectiv

$$\Theta[\psi_1 + \psi_2] = \Theta[\psi_1] + \Theta[\psi_2], \quad \Theta[c\psi] = c\,\Theta[\psi] \tag{7}$$

$$\| \Theta[\psi] \| \leqslant \| \Theta \| \cdot \| \psi \| \leqslant \overline{K} \| \psi \| \tag{8}$$

și este și continuă. Ea lasă invariant subspațiul E, deoarece elementul obținut are aceeași formă (5).

În cele ce urmează, cînd vom examina caracterul de olomorfie sau de meromorfie al soluțiilor ecuației (1), fie prin raport cu variabila z, fie prin raport cu parametrul μ, vom presupune că este vorba de serii de funcții olomorfe sau meromorfe, cu caracter uniform pe domeniul respectiv. În toate celelalte cazuri, va fi subînțeles că este vorba de subspațiul E al valorilor corespunzătoare.

3. Să atașăm acum subspațiul E ecuației funcționale (1), μ fiind un parametru complex, și să căutăm o soluție $\Phi(z)$ aparținînd acestui subspațiu

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \theta_n(z); \qquad \Phi_n = < \Phi, \ \theta_n >. \tag{9}$$

Pentru aceasta, să înmulțim ecuația (1) cu $\overline{\theta}_n(z)$ și să integrăm ambii membrii în lungul curbei C. Atunci, ținînd seama de relațiile (2) și (3), vom găsi relația

$$\Phi_n (1 - \mu K_n) = \psi_n \tag{10}$$

valabilă pentru $n = 0, 1, \ldots$ Soluția $\Phi(z)$ astfel determinată

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{\mu}{\mu_n} \right)^{-1} \psi_n \theta_n(z), \quad \mu_n = \frac{1}{K_n} \tag{11}$$

converge în medie în D (a.p.t.), oricare ar fi μ, fix, aparținînd cercului C_0

$$(C_0) \qquad | \mu | < | \mu_0 | = \frac{1}{|K_0|}$$

și verifică ecuația (1) după cum se vede cu ușurință.

Convergența în medie se stabilește scriind

$$| \Phi_n | = \left| 1 - \frac{\mu}{\mu_n} \right|^{-1} \cdot \left| \psi_n \right| \leqslant \frac{| \psi_n |}{1 - \left| \frac{\mu}{\mu_n} \right|} \leqslant \frac{| \psi_n |}{1 - \left| \frac{\mu}{\mu_0} \right|},$$

așa că vom avea în definitiv

$$\| \Phi_m \theta_m (z) + \ldots + \Phi_{m+p} \theta_{m+p} (z) \| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\left[1 - \left| \frac{\mu}{\mu_0} \right| \right]} \left\{ \begin{array}{l} m > N_\varepsilon \\ p \in N_0 \text{*)} \end{array} \right.$$

dacă

$$\| \psi_m \theta_m (z) + \ldots + \psi_{m+p} \theta_{m+p} (z) \| < \varepsilon,$$

de unde deducem

$$\| \Phi (z) \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} | \Phi_n |^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{| \psi_n |^2}{\left[1 - \left| \frac{\mu}{\mu_0} \right| \right]^2} \leqslant \left[1 - \left| \frac{\mu}{\mu_0} \right| \right]^{-2} \cdot \| \psi \|^2. \quad (12)$$

Expresia (11) definește deci un element al subspațiului E, în condiția (C_0), și pentru z în D, aproape peste tot. Prin raport cu μ, expresia aceasta este o funcție olomorfă în C_0, olomorfia fiind înțeleasă în *sensul convergenței în normă* pentru mulțimea iteratelor $\mu^m \Theta_m [\psi (z)]$ obținute cu ajutorul transformării $\mu \Theta$. Mai precis, aceste iterate, fiind definite prin relațiile

$$\begin{aligned} &\Theta_0 [\psi] = \psi, \qquad \Theta_m [\psi] = \Theta [\Theta_{m-1} [\psi]], \\ &\Theta_m [\psi] = \sum_{n=0}^{\infty} K_n^m \psi_n \theta_n (z), \qquad (m \in N_0), \end{aligned} \quad (13)$$

se observă imediat că putem scrie, oricare ar fi m întreg și pozitiv,

$$\| \mu^m \Theta_m [\psi] \| = | \mu |^m \| \Theta_m [\psi] \| \leqslant | \mu \bar{K} |^m \| \psi \|,$$

de unde rezultă că, pentru $| \mu | < \frac{1}{| K_0 |}$, adică în cercul C_0 din planul μ, literatele (13) converg în normă spre zero. Atunci seria

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \Theta_m [\psi] \qquad z \in D, \text{ (a.p.t.)} \quad (11')$$

este uniform convergentă pe orice domeniu interior lui C_0 (în sensul convergenței în normă) căci putem scrie

$$\| \mu^m \Theta_m [\psi] + \ldots + \mu^{m+p} \Theta_{m+p} [\psi] \| \leqslant | \mu \bar{K} |^m [1 + | \mu \bar{K} | + \ldots + | \mu \bar{K} |^p] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{| \mu K |^m \| \psi \|}{1 - | \mu \bar{K} |}$$

*) Vom desemna cu N_0 mulțimea numerelor naturale împreună cu zero și cu I_0 mulțimea numerelor întregi căreia îi aparține și elementul zero.

și cum produsul $|\mu\overline{K}|^m$ poate fi făcut oricît de mic voim de îndată ce m depășește un anumit număr N, rezultă că seria în μ cu coeficienți numerici *)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \cdot \| \Theta_m [\psi] \| \tag{11''}$$

definește în jurul originii planului μ un element de funcție olomorfă în C_0

Vom zice în acest caz că *seria (11') definește o funcție olomorfă prin raport cu μ în C_0 (în sensul convergenței în normă)*, element care coincide cu cel ce s-ar obține dezvoltînd în seria (11) fracțiile $\left(1 - \frac{\mu}{\mu_n}\right)^{-1}$ după puterile întregi și pozitive ale lui μ. De altfel, asupra unicității soluției astfel introduse, fie sub forma (11), fie sub cea echivalentă în C_0 (11'), vom reveni ceva mai tîrziu.

S-ar putea face aici o analiză a valorilor regulate ale lui μ, pentru care transformarea $\mu\Theta$ conduce la o serie (11') convergentă în normă, cercetare care să se bazeze pe rezultatele obținute de F. R i e s z **) asupra valorilor regulate și singulare în μ ale transformării $\mu\Theta$. Scopul acestei lucrări însă este ca să se pună în evidență numai valorile caracteristice și anumite proprietăți atașate lor, așa că o completare a acestei laturi se va putea face cu ajutorul metodelor utilizate de F. R i e s z în lucrarea citată.

În aceeași ordine de idei, pornind de la convergența în normă a transformării $\mu\Theta$, se poate arăta că transformarea definită de primul membru al ecuației (1) este relativ complet continuă în condițiile puse de noi, adică ea transformă orice mulțime infinită și mărginită de elemente ale lui E într-o mulțime compactă. De aici ar putea rezulta imediat toate proprietățile pe care le vom găsi direct prin metodele de prelungire considerate de noi. Să observăm numai că, pentru transformarea (6), prin introducerea celor două expresii (11) și (11'), echivalente în C_0 și mai tîrziu în tot planul μ, va fi de ajuns să stabilim convergența în medie pentru elementul (11), astfel ca apoi să tragem concluzii asupra olomorfiei în μ (în sensul convergenței în normă), așa cum am făcut în cercul C_0.

4. Să formăm acum produsul

$$\Phi(z) \prod_{i=0}^{p} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_i}\right) = \Phi^{(p)}(z). \tag{14}$$

Din expresia (11) a funcției $\Phi(z)$ dispar numitorii ce corespund acestor factori, astfel că, reluînd raționamentele precedente și observînd că mulțimea $M_\mu \{\mu_n = K_n^{-1}\}$ este ordonată după modulele crescătoare ale elementelor sale, vom găsi că funcția

$$\Phi(z) = \frac{\Phi^{(p)}(z)}{\prod_{i=0}^{p}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_i}\right)}$$

*) Serie absolut și uniform convergentă în interiorul lui C_0.

**) A se vedea [11], p. 151 și 199.

este meromorfă în cercul $C_p \{ | \mu | < | \mu_o | \}$, oricare ar fi p întreg și finit, iar $z \in D$ (a.p.t.). Meromorfia este definită aici, ca și olomorfia în μ, în sensul convergenței în normă, precizare care va fi inutil de făcut de aici înainte, ea fiind subînțeleasă în tot cursul lucrării.

Elementul $\Phi(z)$ astfel considerat verifică ecuația (1) și definește o funcție olomorfă în μ pentru

$$\mu \in \{C\{M_\mu \cap C_p\}\}$$

mulțimea complementară C luîndu-se prin raport cu punctele interioare lui C_p. Punctele mulțimii M_μ apar ca poli ai acestei soluții și cum singurul punct limită e punctul de la infinit, oricepunct $\mu \notin M_\mu$ situat la distanță finită va putea fi inclus într-un cerc C_p, dacă p va fi suficient de mare.

Pentru a arăta că soluția (11) a ecuației funcționale considerate se poate pune sub forma unui cît de funcții întregi în μ, să amplificăm expresia (11) cu funcția întreagă

$$\Pi(\mu) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_n}\right) e^{Q_n(\mu)}, \tag{15}$$

care după Weierstrass, admite ca zerouri elementele mulțimii M_μ și numai pe acestea. Polinoamele $Q_n(\mu)$ sînt, în cazul cel mai defavorabil date de relația

$$Q_n(\mu) = \frac{\mu}{\mu_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\mu_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{\mu}{\mu_n}\right)^{n-1}$$

și ele au fost astfel alese ca să realizeze convergența absolută și uniformă a produsului infinit (15). Elementul spațiului E astfel obținut

$$\Phi(z) \cdot \Pi(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n(\mu)\, \psi_n\, \theta_n(z), \tag{16}$$

unde $\Pi_n(\mu)$ este funcția întreagă $\Pi(\mu)$ din care lipsește factorul $\left(1 - \frac{\mu}{\mu_n}\right)$, — este convergent în medie pentru $\mu \in C_p$ și $z \in D$ (a.p.t.), căci se poate determina un $N_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru $n > N_\varepsilon$ și $p \in \{N_0\}$ să avem

$$\| \Pi_{n+p}(\mu)\, \psi_{n+p}\, \theta_{n+p}(z) + \ldots + \Pi_n(\mu)\, \psi_n\, \theta_n(z) \| < \varepsilon.$$

Este de ajuns pentru aceasta să introducem maximul funcției $|\Pi(\mu)|$ pe circumferința C_p și să reluăm raționamentul făcut pentru funcția (11′). Rezultă atunci că seria de funcții întregi în μ (16) reprezintă o funcție întreagă în μ, ce coincide în orice cerc C_p cu produsul $\Phi(z) \cdot \Pi(\mu)$, astfel că soluția $\Phi(z)$ a ecuației (1) este o funcție meromorfă de μ în tot planul, polii fiind elementele mulțimii M_μ.

5. Unicitatea soluției (11), pentru $\mu \notin M_\mu$, se poate stabili observînd că diferența $\varphi(z) = \Phi'(z) - \Phi''(z)$ a două soluții distincte trebuie să verifice ecuația omogenă

$$\varphi(z) - \mu\, \Theta[\varphi(z)] = 0, \tag{1′}$$

de unde, prin iterare,

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\, \theta_n(z) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} K_n\, \varphi_n\, \theta_n(z) = \cdots = \mu^m \sum_{n=0}^{\infty} K_n^m\, \varphi_n\, \theta_n(z). \tag{17}$$

Rezultă din aceste egalități că

$$\| \varphi(z) \| \leqslant | \mu |^m \cdot \left\| \sum_{n=0}^{\infty} K_n^m \varphi_n \theta_n(z) \right\| \leqslant \left| \frac{\mu}{\mu_0} \right|^m \cdot \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \theta_n(z) \right\| \tag{18}$$

sau

$$\| \varphi(z) \| \leqslant \left| \frac{\mu}{\mu_0} \right|^m \cdot \| \varphi(z) \| \tag{18'}$$

inegalitate care nu poate avea loc în nici unul din punctele $\mu \in C_0$, dacă $\| \varphi(z) \| \neq 0$, căci în ipoteza contrarie, pentru $| \mu | < | \mu_0 |$, avînd

$$| \mu | = K | \mu_0 | = K R_0, \quad (0 < K < 1),$$

unde R_0 este raza cercului C_0, vom putea scrie

$$1 \leqslant K^m, \tag{19}$$

ceea ce este absurd.

Soluția (11) este deci unică pentru $\mu \in C_0$ și $z \in D$ (a.p.t.) *ea fiind olomorfă în* C_0 *și reducîndu-se la elementul cunoscut* $\psi(z)$ *pentru* $\mu = 0$.

6. Unicitatea soluției (11) în punctele μ exterioare sau de pe C_0, însă distincte de elementele mulțimii M_μ, se poate stabili efectuînd o prelungire analitică a elementului definit în C_0, cu ajutorul ecuației funcționale (1) însăși, metodă pe care am mai utilizat-o și la alte ecuații funcționale. Pentru aceasta, să înmulțim ecuația (1) cu $\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0^*}\right)$, μ_0^* fiind o constantă, și să punem

$$\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0^*}\right) \Phi(z) = \psi(z) + \mu \Phi_1(z),$$

unde $\Phi_1(z)$, noul element necunoscut, verifică ecuația de același tip

$$\Phi_1(z) - \mu \Theta[\Phi_1(z)] = \Theta[\psi(z)] - \frac{\psi(z)}{\mu_0^*} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \psi_n \theta_n(z) -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n \theta_n(z)}{\mu_0^*} = \psi_1(z). \tag{20}$$

Alegînd pe μ_0^* astfel ca termenul în $\theta_0(z)$ din membrul al doilea să dispară, adică luînd $\mu_0^* = \frac{1}{K_0} = \mu_0$, se vede că soluția ecuației (20) este olomorfă prin raport cu μ în cercul C_1, de rază $R_1 = | \mu_1 |$, mai mare în general decît R_1. Prin operația efectuată se deduce imediat că punctul $\mu_0 = \mu_0^*$, este un pol simplu pentru elementul $\Phi(z)$, dacă $R_0 < R_1$, acest element fiind acum definit în cercul mai mare C_1.

Acest procedeu poate fi continuat de $(n - 1)$ ori prin introducerea șirurilor de funcții

$$\begin{aligned} &\Phi(z) = \Phi_0(z), \quad \Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z) \\ &\psi(z) = \psi_0(z), \quad \psi_1(z), \ldots, \psi_n(z) \end{aligned} \tag{21}$$

definite cu ajutorul relațiilor

$$\left(1 - \frac{\mu}{\mu_i^*}\right) \Phi_i(z) = \psi_i(z) + \mu \Phi_{i+1}(z), \quad \psi_{i+1}(z) = \Theta[\psi_i(z)] - \frac{\psi_i(z)}{\mu_i^*}, \tag{22}$$

elementele $\Phi_i(z)$ verificînd ecuațiile funcționale de același tip cu (1)

$$\Phi_i(z) - \mu\Theta[\Phi_i(z)] = \psi_i(z). \tag{23}$$

Se vede, din aproape în aproape, că toate constantele μ_i^* sînt respectiv egale expresiilor polilor μ_i ai elementului (11), definit mai sus.

Calculul elementelor $\psi_i(z)$ se face cu ușurință, dacă se ține seama de expresia operatorului Θ

$$\psi_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (K_n - K_0)\, \psi_n\, \theta_n(z) \tag{24}$$

. . . . . .

$$\psi_i(z) = \sum_{n=i}^{\infty} (K_n - K_0)(K_n - K_1) \ldots (K_n - K_{i-1})\, \psi_n\, \theta_n(z)$$

sau, introducînd polii μ_i,

$$\mu^i\, \psi_i(z) = \sum_{n=i}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\mu_n} - \frac{\mu}{\mu_0}\right)\left(\frac{\mu}{\mu_n} - \frac{\mu}{\mu_1}\right) \ldots \left(\frac{\mu}{\mu_n} - \frac{\mu}{\mu_{i-1}}\right) \psi_n\, \theta_n(z). \tag{25}$$

Eliminarea elementelor intermediare $\Phi_i(z)$ ne conduce la relația

$$\Phi(z) \cdot \prod_{i=0}^{m-1} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_i}\right) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu^i\, \Pi_{m,i}(\mu) \cdot \psi_i(z) + \mu^m\, \Phi_m(z), \tag{26}$$

în care am notat

$$\Pi_{m,i}(\mu) = \prod_{j=i+1}^{m-1} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_j}\right). \tag{27}$$

Observînd că toate elementele $\psi_i(z)$, obținute aplicînd un număr finit de ori operatorul Θ, sînt convergente în medie fiecare separat, putem deduce că elementul $\Phi_m(z)$ reprezintă o funcție olomorfă prin raport cu μ în cercul $C_m \{|\mu| < |\mu_m|\}$ și că soluția $\Phi(z)$ a ecuației funcționale (1) este o funcție meromorfă de μ în acest cerc, polii fiind punctele μ_i interioare lui C_m. În plus, ea este și unica soluție olomorfă în jurul originii planului μ, pentru $\mu \notin M_\mu$ și $z \in D$ (a.p.t.), proprietate ce rezultă din unicitatea soluției $\Phi_m(z)$ pentru $\mu \in C_m$, însă distinct de elementele μ_i interioare lui C_m.

7. Pentru stabilirea alternativei lui Fredholm în tot planul μ, este necesară o trecere la limită, făcînd pe m să crească nemărginit. Vom considera aici numai cazul, mai simplu ,cînd valorile μ_n tind destul de repede către infinit, astfel ca produsul infinit corespunzător

$$\Pi(\mu) = \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_i}\right)$$

să reprezinte o funcție întreagă în μ, de gen zero. Condiția respectivă de convergență absolută a acestui produs infinit se scrie sub forma unei condiții de convergență absolută a seriei

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{|\mu_i|} = \sum_{i=0}^{\infty} |K_i|.$$

De la acest caz particular se poate trece ușor la cazul general, prin înmulțirea relației (26) cu factorii primari ai lui Weierstrass, care asigură convergența produsului infinit corespunzător.

Să arătăm că în condițiile fixate, o trecere la limită ($m \to \infty$) în relația (26) conduce la următoarea expresie a soluției $\Phi(z)$ a ecuației (1)

$$\Phi(z) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \Pi_{\infty,i}(\mu)\, \psi_i(z)}{\Pi(\mu)}, \qquad (26')$$

termenul complementar $\mu^m \Phi_m(z)$, din relația (26), tinzînd către zero. Pentru a arăta că această expresie este un cît de două funcții întregi în μ, dacă se adoptă convergența în normă, vom analiza numai numărătorul $\varphi(z)$, căci numitorul este sigur o funcție întreagă în μ. Să observăm pentru aceasta că $\varphi(z)$ este o serie de funcții întregi în μ, mărginite pe un compact Δ al planului μ. Fie Π marginea superioară a mulțimii

$$\{|\Pi_{\infty,i}(\mu)|\}, i \in N_0$$

pe compactul Δ. Vom putea scrie succesiv, ținînd seama de expresiile (24),

$$\|\psi_1(z)\| \leqslant \|\sum_{n=1}^{\infty} (K_n - K_0)\, \psi_n\, \theta_n(z)\| \leqslant 2|K_0| \cdot \|\psi(z) - \psi_0\, \theta_0(z)\|$$

$$= 2|K_0| \cdot \|\psi_{(1)}\|,$$

$$\|\psi_2(z)\| \leqslant \|\sum_{n=2}^{\infty} (K_n - K_0)(K_n - K_1)\, \psi_n\, \theta_n(z)\| \leqslant 2^2 |K_0 K_1| \cdot \|\psi_{(2)}\|,$$

unde am notat cu $\psi_{(i)}$ elementul $\sum_{n=i}^{\infty} \psi_n \theta_n(z)$, $(i \in N_0)$.

Din aproape în aproape găsim limitarea

$$\|\psi_n(z)\| \leqslant 2^n \cdot \|\psi_{(n)}\| \cdot \prod_{i=0}^{n-1} |K_i|.$$

Condiția de convergență în normă este echivalentă cu aceea a seriei

$$\Pi \sum_{n=0}^{\infty} 2^n |\mu|^n \cdot \|\psi_{(n)}\| \cdot \prod_{i=0}^{n-1} |K_i|,$$

condiție care, în ipoteza $\|\psi_{(n)}\| < \varepsilon'$, pentru $n > N_{\varepsilon'}$, se mai scrie

$$\frac{1}{\Pi} E_{n,p} = |2\mu|^n \cdot \|\psi_{(n)}\| \prod_{i=0}^{n-1} |K_i| + \ldots +$$

$$+ |2\mu|^{n+p} \cdot \|\psi_{(n+p)}\| \prod_{i=0}^{n+p-1} |K_i| < \varepsilon + (p \in N_0).$$

E de ajuns atunci să luăm pe p suficient de mare și pe $n > N_{\varepsilon'}$, astfel ca să avem

$$\frac{1}{\Pi} E_{n,p} < |2\mu|^n \varepsilon' \prod_{i=0}^{n-1} |K_i| \, [1 + |2\mu K_n| + \ldots + |2\mu|^p \cdot \prod_{i=n}^{n+p-1} |K_i|]$$

și cum seria

$$\sum_{p=0}^{\infty} |2\mu|^p \prod_{i=n}^{n+p-1} |K_i|$$

este convergentă pentru $2 |\mu K_{n+p-1}| < 1$, inegalitate întotdeauna realizată pe Δ, căci K_m tinde către zero cînd $m \to \infty$, rezultă că vom putea avea $E_{n,p} < \varepsilon$, oricare ar fi μ aparținînd compactului Δ situat la distanță finită și pentru $z \in \overline{D}$ (a.p.t.). Seria $\varphi(z)$ este deci convergentă în normă, în condițiile menționate, și definește o funcție întreagă în μ, compactul Δ fiind ales arbitrar. Termenul complementar $\mu^n \Phi_n(z)$ tinde și el în normă către zero, căci diferența

$$\varphi_0 = \mu^m \Phi_m(z) - \mu^n \Phi_n(z)$$

verifică pe compactul Δ ecuația

$$\varphi_0(z) - \mu \Theta[\varphi_0(z)] = \mu^m \psi_m(z) - \mu^n \psi_n(z),$$

așa că pentru $\mu \in C\{\Delta \cap M_\mu\}$ și pentru m, n suficient de mari, ecuația aceasta admite o singură soluție φ_0 ce tinde către zero, cînd m și n tind către infinit, independent unul de altul.

Rezultă din această analiză că soluția $\Phi(z)$ a ecuației (1), pentru $\mu \notin M_\mu$ și $z \in \overline{D}$ (a.p.t.), poate fi pusă sub forma unui cît de două funcții întregi în μ. Ea este deci o funcție meromorfă în tot planul μ, polii fiind punctele mulțimii M_μ și numai aceștia, funcție ce se reduce pentru $\mu = 0$ la elementul $\psi(z)$. În jurul originii planului μ această soluție este olomorfă, pentru $z \in \overline{D}$ (a.p.t.), rezultat stabilit cu ajutorul convergenței în normă.

8. Din studiul făcut mai sus rezultă că ecuația omogenă (1′) nu admite nici o soluție diferită de zero, dacă $\mu \notin M_\mu$ și $z \in D$ (a.p.t.), iar pentru $\mu = \mu_m = \mu_{m+1} = \ldots \mu_{m+p+1}$, pol multiplu de ordinul p, soluția ecuației omogene (1′) ce aparține lui E este dată de relația

$$\Phi(z) = C_m \theta_m(z) + C_{m+1} \theta_{m+1}(z) + \ldots + C_{m+p-1} \theta_{m+p-1}(z), \quad (28)$$

în care intră p constante arbitrare C_i, și soluția ecuației neomogene pentru aceeași valoare a lui $\mu \in M_\mu$ se poate scrie sub forma

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\psi_n \theta_n(z)}{1 - \frac{\mu_m}{\mu_n}} + \sum_{n=m}^{m+p-1} C_n \theta_n(z) + \sum_{n=m+p}^{\infty} \frac{\psi_n \theta_n(z)}{1 - \frac{\mu_m}{\mu_n}} \quad (29)$$

dacă sînt îndeplinite condițiile de ortogonalitate

$$< \psi(z), \quad \theta_i(z) > = 0, \qquad (i = m, m+1, \ldots, m+p-1). \quad (30)$$

Într-adevăr, luînd produsul scalar prin $\overline{\theta}_n(z)$ al celor doi membri din ecuația (1), pentru $\mu = \mu_m = \mu_{m+1} = \ldots = \mu_{m+p-1}$, se obține relația

$$< \Phi(z), \theta_n(z) > - \mu_m < \Theta[\Phi(z)], \theta_n(z) > = < \psi(z), \theta_n(z) >$$

ce se mai scrie, ținînd seama de expresia (9),

$$< \Phi,\ \theta_n > \cdot\ (1 - \mu_m K_n) = <\psi,\ \theta_n >, \tag{31}$$

relație ce trebuie să aibă loc oricare ar fi $n \in N_0$.

În cazul ecuației omogene (1') $\psi(z) \equiv 0$, așa că aceste condiții sînt satisfăcute numai pentru $n = m,\ m+1,\ \ldots,\ m+p-1$, cînd coeficienții corespunzători rămîn nedeterminați, iar pentru celelalte valori ale lui n avem condițiile

$$< \Psi,\ \theta_n > = 0, \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1,\ m+p,\ m+p+1, \ldots,). \tag{30'}$$

Sistemul format din elementele $\theta_n(z)$ fiind complet, rezultă că soluția $\Phi(z)$ a ecuației omogene în acest caz este de forma (28) și depinde de p constante arbitrare C_i.

În cazul corespunzător al ecuației neomogene (1), primul membru al relației (31) fiind nul pentru $n = m,\ m+1,\ \ldots,\ m+p-1$, rezultă imediat condițiile de ortogonalitate (30), relațiile (31) permițînd determinarea soluției respective sub forma (29), la care s-a adăugat și soluția ecuației omogene corespunzătoare.

Alternativa lui Fredholm este deci valabilă pentru această clasă de ecuații funcționale care, *sau admit o soluție unică oricare ar fi elementul* $\psi(z) \in E$, care poate fi și nul, caz cînd și soluția este nulă, *sau ecuația omogenă admite p soluții liniar distincte — p finit — iar ecuația neomogenă (1) admite o soluție, la care se adaugă soluția corespunzătoare a ecuației omogene, dacă elementul* $\psi(z)$ *este ortogonal tuturor soluțiilor ecuației omogene.*

9. Alternativa lui Fredholm rezultă de altfel și din faptul că transformarea $\mu\Theta$, după ipotezele făcute, este *relativ complet continuă*, căci acest operator transformă orice mulțime infinită și mărginită din E

$$\{f_n(z)\}, \quad (n \in N_0)$$

într-o mulțime *compactă*. Într-adevăr, pentru $\| f_n(z) \| < N < \infty$, șirul $\{\Theta[f_n(z)]\}$ conține cel puțin un șir parțial ce converge în medie către un element $f(z) \in E$, pentru $z \in D$ (a.p.t.). De altfel, orice transformare de forma

$$\Theta[f] = < f,\ g > h,$$

unde $f,\ g,\ h$ sînt elemente aparținînd lui E, este complet continuă, la fel pentru orice combinație liniară finită de astfel de transformări și chiar și pentru limitele lor uniforme, cum este cazul transformării $\mu\Theta$*).

10. Cîteva cazuri speciale, ce conduc la anumite ecuații funcționale particulare, vor exemplifica teoria expusă și vor permite extinderea rezultatelor obținute și la alte clase de ecuații funcționale.

Să luăm pentru curba C o circumferință cu centrul în origine și de rază R, căreia să-i atașăm subspațiul E definit prin elementele

$$\theta_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \left(\frac{z}{R}\right)^n, \quad (n \in I_0), \tag{32}$$

$\{I_0\}$ reprezentînd mulțimea numerelor reale întregi. Subspațiul E este con-

*) F. Riesz și B. Sz. Nagy [11], p. 178.

stituit din mulțimea funcțiilor olomorfe în z pe $\bar{C}$, sau de acelea care au un pol ori o singularitate esențială în C etc., însă sînt toate de pătrat sumabil.

Se vede imediat că cele două condiții (2) și (3) sînt verificate, căci

$$<\theta_n,\ \theta_m> = 0, \quad m \neq n$$

și

$$\|\theta_n(z)\|^2 = \frac{1}{2\pi R^{2n+1}} \int_C z^n \bar{z}^n\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = 1, \quad (z = Re^{i\alpha}).$$

Operatorul Θ va fi definit de integrala

$$\Theta[\psi(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi(s)\, ds}{s - \alpha z}, \qquad \text{unde} \qquad |\alpha| < 1$$

astfel că ecuația funcțională (1) se va scrie sub una din formele echivalente

$$\Phi(z) - \frac{\mu}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi(s)\, ds}{s - \alpha z} = \psi(z) \tag{33}$$

$$\Phi(z) - \mu\Phi(\alpha z) = \psi(z), \tag{33'}$$

dacă elementelor subspațiului E li se poate aplica formula integrală a lui Cauchy, pentru z aparținînd unui domeniu simplu conex D ce conține în interior pe C. Elementelor $\psi(z)$ de pătrat sumabil, care sînt și olomorfe pe $\bar{D}$, le corespunde un operator Θ pentru care $K_n = \alpha^n$, astfel că mulțimea M_μ va fi dată de $\mu_n = \frac{1}{\alpha^n}$, unde $n \in \{N_0\}$. Singurul punct de acumulare al acestei mulțimi este punctul de la infinit, iar soluția (11) corespunzătoare se va scrie

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{1 - \alpha^n \mu} \left(\frac{z}{R}\right)^n.$$

Aceasta este unica soluție a ecuațiilor funcționale (33) și (33') aparținînd subspațiului E mai sus definit și cu condiția de echivalență considerată, μ fiind distinct de elementele lui M_μ, soluție care se reduce la $\psi(z)$ pentru $\mu = 0$.

O singularitate polară de ordinul p, în originea planului z, pentru elementele $\psi(z)$ și $\Phi(z)$, conduce la un operator Θ ce îndeplinește în general condițiile fixate mai sus, căci mulțimea $M_\mu \left\{ \mu_n = \frac{1}{\alpha^n} \right\}$, $(n = -p, -p+1, \ldots, 0, 1, \ldots)$ are ca singur punct limită punctul de la infinit.

Rezultatele obținute pînă acum nu pot fi extinse subspațiilor E ale funcțiilor $\psi(z)$ și $\Phi(z)$, care admit un punct singular esențial în originea planului z, căci în acest caz mulțimea M_μ ar avea două puncte limită — originea planului μ și punctul de la infinit — caz, care nu intră în cel studiat pînă acum. Vom reveni, de altfel, asupra acestui caz special.

Alternativa lui Fredholm este deci valabilă în cazul de echivalență a ecuațiilor (33) și (33'), pentru elementele subspațiului E olomorfe în z pe D și admițînd cel mult o singularitate polară în originea planului z.

Dacă condiția $|\alpha| < 1$ este înlocuită prin $|\alpha| > 1$, ar trebui precizat sensul operatorului Θ pentru elementele $\Phi(z)$ olomorfe pe $\overline{D}$ fie că se ia valoarea principală a integralei în sensul lui Cauchy, fie că se definesc aceste elemente în exteriorul cercului C, integrarea făcîndu-se acum în sensul opus.

Mărginindu-ne însă numai la ecuația (33'), pentru care operatorul Θ e definit prin relația

$$\Theta[\Phi(z)] = \Phi(\alpha z),$$

se ajunge la o ecuație de tipul (1), dacă se fac schimbările următoare: α prin $\frac{1}{\beta}$, μ prin $\frac{1}{\nu}$, z prin βz, și se introduc funcțiile

$$\psi_1(z) = -\psi(\beta z), \qquad \Phi(z) = \nu\Phi_1(z).$$

Ecuația corespunzătoare

$$\Phi_1(z) - \nu\Phi_1(\beta z) = \psi_1(z)$$

intră în cazul tratat mai sus, astfel că după modificările făcute, rezultă că alternativa lui Fredholm se extinde și ecuației (33') pentru $|\alpha| > 1$, cu aceeași mulțime M_μ, care însă are originea planului μ ca punct unic de acumulare. Elementele subspațiului E, olomorfe în z pe $\overline{D}$ sau avînd cel mult un pol de ordinul p în origine, conduc la o soluție $\Phi(z)$ a ecuației (33'), (la care $|\alpha| > 1$), olomorfă în $\frac{1}{\mu} = \nu$ la infinit și anulîndu-se în acest punct.

Cazul $|\alpha| = 1$ va fi tratat mai tîrziu.

11. Un alt exemplu este constituit de subspațiul E definit de elementele

$$\theta_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{niz} \qquad (n \in I_0),$$

atașate segmentului $[0,2\pi]$ al axei reale care constituie curba C de integrare. Aceste elemente formează și ele un sistem ortogonal și normat complet, căci condițiile (2) și (3) sînt îndeplinite după cum se vede imediat, iar proprietatea de închidere este cunoscută din teoria seriilor Fourier. Elementele acestui subspațiu vor fi definite prin serii de forma

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n e^{niz}, \tag{34}$$

convergente în medie pentru z aparținînd unui domeniu simplu conex $\overline{D}$, ce conține în interior segmentul $[0,2\pi]$. Ecuația funcțională (1) corespunzătoare va fi ecuația cu diferențe finite

$$\Phi(z) - \mu\Phi(z + \alpha) = \psi(z), \tag{35}$$

unde α este un număr real sau complex $\alpha = a + ib$. Operatorul Θ pentru acest spațiu E are pe $K_n = e^{ni\alpha}$ și, pentru a putea face parte din clasa studiată, mai sus, va trebui să presupunem că mulțimea

$$M_\mu\{\mu_n = e^{-ni\alpha} = e^{-n(ai-b)}\}$$

are un singur punct limită, punctul de la infinit, adică $b > o$.

Ne vom mărgini atunci să considerăm subspațiile E alcătuite din elemente de forma

$$\sum_{n=-p}^{+\infty} \psi_n e^{niz}, \qquad (p \text{ întreg și pozitiv}) \qquad (36)$$

serii ce sînt convergente în medie pe un semiplan $\overline{D}$. În aceste ipoteze, alternativa lui Fredholm se extinde și soluțiilor $\Phi(z)$, ale ecuației funcționale (35), ce aparțin subspațiului E. Acest rezultat era de așteptat căci, făcînd în ecuația (33′) schimbările

$$z \to e^z, \quad \alpha \to e^{\alpha}, \quad \Phi(e^z) \to \Phi(z), \quad \psi(e^z) \to \psi(z) \qquad (37)$$

se obține ecuația (35). E adevărat că prin aceste schimbări, subspațiile atașate celor două ecuații nu se corespund în totul, însă este ușor de aplicat rezultatele noastre și subspațiului E dedus din cel atașat ecuației (33′).

Dacă considerăm elemente $\psi(z)$, reprezentate prin serii Laurent, cu un pol de ordinul p în origine, pentru ecuația (33′), elementele analoge atașate ecuației (35) sînt serii Fourier de tipul (36) și nu de tipul (34). Soluția (11) respectivă se scrie atunci sub forma

$$\Phi(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} \psi_n e^{niz} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_n}\right)^{-1}, \quad \mu_n = e^{-ni\alpha} \qquad (38)$$

și ea converge în medie dacă $\mu \in C_{-p}\{|\mu| < |\mu_{-p}|\}$, pentru z aparținînd semiplanului $\overline{D}$ (a.p.t.).

12. Cîteva considerații finale permit lămurirea unor anumite puncte din această lucrare și extinderea metodelor întrebuințate aici, la alte transformări mai generale. Astfel, în privința domeniului $\overline{D}$, care conține în interior curba de integrare C, se poate observa că el trebuie ales în așa fel încît toate iteratele elementului arbitrar $\psi(z)$, prin transformarea $\Theta[\psi(z)]$, să aparțină subspațiului E, oricare ar fi $z \in \overline{D}$ (a.p.t.), sau cel puțin pentru $z \in C$ (a.p.t.). Într-adevăr, la exemplul precedent se vede că elementele $\psi(z)$ trebuie definite pe un semiplan $\overline{D}$, pentru ca această condiție să fie satisfăcută, transformatele punctelor de pe segmentul $(0,2\pi)$, cu ajutorul operatorului $Z = \alpha + z$ depărtîndu-se la infinit.

Se pot ușor imagina și alte transformări la care să fie necesară numai condiția referitoare la curba C.

Apoi, în privința condiției impuse mulțimii $\{K_n\}$ de a avea o singură valoare limită, valoarea zero, se poate presupune că această mulțime este numai mărginită. În demonstrațiile corespunzătoare, funcția (15) va trebui atunci înlocuită printr-o funcție ce se anulează pe mulțimea $\{\mu_n\}$, funcție care va putea fi reprezentată în cazuri destul de generale printr-un produs infinit, olomorf în cercul (Γ)

$$\left\{|\mu| < \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} |K_n|}\right\}.$$

Soluția (11) va putea fi definită aproape peste tot în D prin raport cu z, iar prin raport cu μ în interiorul cercului (Γ), valorile caracteristice

ale ecuației (1) — polii aparținînd lui (Γ) — fiind elementele respective ale mulțimii $\{\mu_n\}$. Alternativa lui Fredholm va putea fi astfel stabilită în acest cerc cu metodele utilizate în studiul precedent. Pentru soluția (11) corespunzătoare acestor cazuri, originea planului μ apare ca un punct ordinar căci, pentru $\mu = 0$, această soluție se reduce la elementul $\psi(z)$.

Un exemplu poate fi dat de transformarea

$$\Theta[\psi(z)] = \psi(\alpha z) + \int_0^1 K(s)\,\psi(zs)\,ds,$$

unde ponderea $K(s)$ este definită pe segmentul $[0,1]$, iar parametrul complex α este de modul unitate. În aceste condiții, valorile caracteristice ale ecuației (1) corespunzătoare au expresiile analitice

$$\mu_n = \left[\alpha^n + \int_0^1 K(s)\,s^n\,ds\right]^{-1},$$

punctele limită ale acestei mulțimi fiind situate pe cercul unitate.

13. Condiția ca soluția (11) să se reducă, pentru $\mu = 0$, la elementul $\psi(z)$ are o mare importanță în stabilirea alternativei lui Fredholm și, în special, pentru demonstrarea unicității soluției (11) din subspațiul E, ea apărînd ca o condiție la limită care elimină o serie întreagă de alte soluții. Astfel, ca să dăm un exemplu, ecuația funcțională (33′) admite soluția dată de acad. C. Popovici [12]

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu^n f(\alpha^n z), \tag{39}$$

funcția arbitrară $f(z)$ fiind de pătrat integrabil pe C și satisfăcînd anumite condiții simple de convergență, ce pot fi ușor stabilite. Această soluție nu aparține însă subspațiului E, pe de o parte, originea planului z fiind un punct singular esențial, iar pe de altă parte, ea nu este olomorfă în vecinătatea originii planului μ, punct care este și el singular esențial pentru $\Phi(z)$. Această soluție nu se poate deci reduce la elementul $\psi(z)$, cînd μ tinde către zero de-a lungul unui drum arbitrar [10].

La fel, ecuația funcțională (35) admite soluția

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu^n f(z + n\alpha), \tag{40}$$

unde $f(z)$ este o funcție arbitrară de pătrat integrabil pe C, aleasă astfel încît să asigure convergența în medie a seriei (40). Și pentru această soluție se pot face aceleași observări ca mai sus, ea neputînd aparține subspațiului E considerat.

14. Pentru $\mu = 1$, ecuația funcțională omogenă [$\psi(z) \equiv 0$] (33′) admite soluția

$$\Phi(z) = C \cdot \theta_0(z) = C, \qquad (C \text{ constantă arbitrară})$$

aceasta fiind tocmai ecuația lui Schröder

$$\Phi(z) = \mu\,\Phi(\alpha z), \tag{41}$$

pentru care Rausenberger (citat după [13]) a dat o serie de soluții — funcțiile loxodromice — care corespund fiecărei valori caracteristice

$$\mu_n = \alpha^n, \quad \cdot \quad (n \in N_0).$$

Să reamintim rezultatele obținute de Rausenberger cu ajutorul funcției

$$S(z) = \prod_{i=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha^i}\right) \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{z\alpha^j}\right),$$

definite în coroana (Γ_R): $\{R \geqslant |z| > R\,|\,\alpha|\}$. Acest autor găsește că funcția loxodromică, care se anulează în punctele a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ și care are polii b_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, cu ordinele de multiplicitate figurînd în aceste șiruri *), (a_i și $b_j \in \Gamma_R$), are expresia

$$f(z) = Cz^{\gamma} \frac{S\left(\frac{z}{a_1}\right) \ldots S\left(\frac{z}{a_m}\right)}{S\left(\frac{z}{b_1}\right) \ldots S\left(\frac{z}{b_m}\right)}, \tag{42}$$

γ fiind un întreg, iar C o constantă arbitrară. Prelungirea analitică a acestei funcții poate fi făcută în tot planul z cu ajutorul ecuației (41), cu excepția originii și a punctului de la infinit. Toate aceste funcții loxodromice, soluții ale ecuației omogene (33′), corespund valorilor caracteristice $\mu = \alpha^n$, căci numai pentru aceste valori ale lui μ, după Rausenberger, există funcții de forma (42) care îndeplinesc condițiile sus-menționate.

Din iterarea ecuației lui Schröder, pentru $\mu = 1$, putem să scriem

$$\Phi(z) = \Phi(\alpha z) = \Phi(\alpha^2 z) = \ldots = \Phi(\alpha^n z) = \ldots = \Phi(0)$$

și să deducem că numai constanta arbitrară $\Phi(0)$ este soluția ecuației omogene (33′), căci ea este de pătrat integrabil pe (C) și deci aparține lui E. Nu putem aplica însă același procedeu funcției loxodromice (42), deoarece prin prelungirea analitică efectuată cu ajutorul ecuației lui Schröder — în fapt prin transformarea coroanei (Γ_R) cu ajutorul relației $Z = \alpha z$), se obțin o serie de coroane tinzînd către origine sau punctul de la infinit — funcția $f(z)$ admite ca zerouri, respectiv ca poli, punctele mulțimilor

$$\begin{matrix} a_1 \alpha^n, \ldots, a_m \alpha^n \\ b_1 \alpha^n, \ldots, b_m \alpha^n \end{matrix}, \qquad \{n \in I_0\}$$

care au punctul de la infinit și originea planului z ca punct de acumulare. Rezultă că soluția lui Rausenberger nu aparține spațiului E, ea avînd originea planului z ca punct singular esențial.

15. Din toate aceste exemple și din ipotezele făcute la începutul acestei lucrări se vede importanța convergenței în normă a iteratelor elementului $\psi(z) \in E$, convergență care ne-a permis să examinăm soluțiile ecuației (1) și prin raport cu parametrul μ. Proprietatea cerută de olomorfie în jurul originii planului μ, care este echivalentă cu proprietatea ca mulțimea $\{K_n\}$ să fie mărginită, atrage după sine convergența în normă, pentru

*) p valori egale pentru a_i corespund unui zero de ordinul p, și la fel pentru b_j.

$z \in D$. Domeniul D va depinde însă de transformarea (6) considerată și el va putea fi determinat pentru fiecare caz în parte, astfel ca să se asigure convergența în normă, oricare ar fi $z \in D$ (a.p.t.). O dată stabilite aceste caracteristici, alternativa lui Fredholm va decurge din cele expuse în paragrafele precedente.

Vom reveni într-o altă lucrare asupra unei extensiuni a metodelor utilizate în această lucrare, transformarea (6) fiind un caz destul de particular al unor transformări mai generale, pentru care determinarea valorilor caracteristice, corespunzătoare ecuației (1), se poate face printr-un procedeu analog, convenabil modificat.

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В КОМПЛЕСНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ L^2

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Задача действительного определения собственных значений, соответвующих линейному преобразованию в пространстве L^2 может быть решена прямыми методами аналитического продолжения решений функционального уравнения

$$\Phi(z) - \mu\,\Theta[\Phi(z)] = \psi(z), \qquad (1)$$

где $\Phi(z)$—неизвестный елемент, а $\Theta[\Phi(z)]$ указанное линейное преобразование. Автор выявляет характеристические значения, соответствующие решениям уравнения (1) и являющиеся обратными для отыскиваемых собственных значений, рассматривая простой случай преобразований вида (6). Но применяемые методы допускают распространение етих приемов и на другие типы линейных преобразований, которые будут рассмотрены в другой статье. Несколько простых примеров выявляют определенные свойства решений некоторых интегральных или функциональных уравнений с указанием достаточных условий, относящихся к установлению альтернативы Фредгольма для определенных областей плоскости.

SUR QUELQUES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DANS L'ESPACE DE HILBERT COMPLET L^2

(RÉSUMÉ)

Le problème de la détermination effective des valeurs propres correspondant à une transformation linéaire dans l'espace L^2 peut être résolu par des méthodes directes, au moyen du prolongement analytique des solutions de l'équation fonctionnelle

$$\Phi(z) - \mu\Theta[\Phi(z)] = \psi(z) \qquad (1)$$

où $\Phi(z)$ est l'élément inconnu et $\Theta[\Phi(z)]$ la transformation linéaire mentionnée. L'auteur fait ressortir les valeurs caractéristiques correspondant aux solutions fondamentales de l'équation (1). Ces valeurs sont justement les inverses des valeurs propres recherchées, si l'on considère le cas simple de

certaines transformations de la forme (6). Les méthodes employées permettent, toutefois, d'étendre ces procédés à d'autres types de transformations linéaires qui seront étudiées une autre fois. Par quelques exemples bien simples l'auteur fait ressortir certaines propriétés des solutions de quelques équations intégrales ou fonctionnelles, tout en signalant les conditions suffisantes pour l'établissement de l'alternative de Fredholm dans certaines régions déterminées du plan μ.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Hadamard, *Thèses.* Paris, 1892.
2. — Journal de Mathématiques, 1893, seria 4, t. IX, p. 171.
3. D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Leipzig, 1912.
4. M. Fischer, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1905, t. 16, p. 234.
5. R. Courant, Mathematische Zeitschrift, 1920, t. 7, p. 1.
6. H. Weyl, Göttingen Nachrichten, 1911, p. 110.
7. O. D. Kellogg, Mathematische Annalen, 1922, t. 86, p. 14.
8. R. Wavre, Commentarii Mathematici Helvetici, 1943, t. 15, p. 299; t. 16, p. 65.
9. W. T. Reid, Duke Mathematical Journal, 1951, t. 18, p. 41.
10. R. Bădescu, Bolletino della Unione Mat. Italiana, Bologna, 1939, Seria a II-a, an. I, p. 314.
11. F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'Analyse fonctionnelle.* Budapesta, 1952.
12. C. Popovici, Mathematica, Cluj, 1935, t. IX, p. 194.
13. G. Valiron, *Théorie des fonctions.* Paris, 1948, ed. a II-a, p. 476.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 3—4, 1956

CLASE DE SPAŢII LINIARE SEMIORDONATE PSEUDONORMATE *)

DE

ROMULUS CRISTESCU

Într-o lucrare precedentă [1] am introdus clasa KP-spaţiilor generalizînd noţiunea de KB-spaţiu a lui Kantorovici. KP-spaţiile — a căror importanţă a fost în parte arătată în lucrarea menţionată — şi diversele tipuri particulare ale acestora au proprietăţi remarcabile şi variate aplicaţii (în particular în teoria operatorilor regulaţi, în teoria ergodică etc). Un anumit interes îl prezintă şi noţiunea mai generală de KP-lineal, definită mai jos, împreună cu tipurile sale particulare.

În prezenta lucrare vom face o clasificare a spaţiilor liniare semiordonate, pseudonormate, după condiţiile la care satisface pseudonorma, şi vom stabili proprietăţile lor fundamentale. În particular, vom arăta legătura dintre diversele clase de K-spaţii pseudonormate şi K-spaţiile pe care există o anumită mulţime suficientă de funcţionale (o)-liniare sau complet (o)-liniare.

Lucrarea este împărţită în trei paragrafe. În § 1 vom face o discuţie generală privind KP-linealele. În § 2 dăm anumite proprietăţi generale ale KP-spaţiilor. În sfîrşit, în § 3 vom introduce cîteva clase particulare mai importante de KP-spaţii şi vom stabili unele proprietăţi ale acestora. Terminologia şi notaţiile utilizate vor fi — dacă nu se va face vreo altă menţiune — cele din [2].

§ 1. KP-linealele şi tipurile lor particulare. Generalităţi

Vom introduce mai întîi noţiunea de KP-lineal.

Definiţia 1.1. *Numim KP-lineal, un K-lineal $\mathfrak{X}$ care este simultan un spaţiu pseudonormat triunghiular* [3] *în raport cu o mulţime dirijată oarecare D, astfel încît să fie satisfăcută condiţia :*

$i)$ $|x_1| \leqslant |x_2|$ implică $\|x_1\|_d \leqslant \|x_2\|_d$, *oricare ar fi* $d \in D$.

Ca exemplu de KP-lineal, care nu este un K-spaţiu şi nici un KB-lineal, poate servi mulţimea C_T a funcţiilor continue pe un spaţiu

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 12 iunie 1956.

Hausdorf local-bicompact T, liniarizată și ordonată în modul obișnuit, dacă se pune

$$\| x \|_d = \max_{t \in d} | x(t) |, \qquad (d \in D),$$

D fiind familia tuturor mulțimilor bicompacte din D, dirijată prin incluziune.

În cazul particular, cînd T este dreapta reală, putem pune

$$\| x \|_d = \max_{-n \leqslant t \leqslant n} | x(t) |,$$

mulțimea D fiind cea a numerelor naturale.

Deoarece în orice KP-lineal pseudonorma generează o topologie de spațiu local-convex, putem vorbi de convergență în această topologie. Vom nota astfel prin $x = (p)\text{-}\lim_n x_n$ sau $x_n \xrightarrow{p} x$, dacă $\lim_n \| x_n - x \|_d = 0$, pentru orice $d \in D$.

Definiția 1.2. *Fie $\mathfrak{X}$ un KP-lineal relativ la D. O submulțime $D^* \subset D$ va fi numită o (p)-bază a lui $\mathfrak{X}$, dacă pentru orice $d \in D$ există $d^* \in D^*$ așa ca $d^* \geqslant d$.*

Se poate verifica că orice (p)-bază este o mulțime dirijată.

Se observă, de asemenea, că pentru orice KP-lineal $\mathfrak{X}$, topologia generată de pseudonorma definită pe $\mathfrak{X} \times D$, D fiind mulțimea dirijată asociată lui $\mathfrak{X}$, e echivalentă cu aceea definită de pseudonorma considerată numai pe $\mathfrak{X} \times D^*$, oricare ar fi (p)-baza D^* a lui $\mathfrak{X}$. Spațiul $\mathfrak{X}$ e concomitent un KP-lineal relativ la D^*.

Definiția 1.3. *Un element**) *$a \in D$ va fi numit un element de anulare, dacă $\| x \|_a = 0$ oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$. Un element $b \in D$ va fi numit un element de pozitivitate, dacă $\| x \|_b \neq 0$ oricare ar fi $x \neq \mathbf{0}$ $(x \in \mathfrak{X})$.*

O mulțime de elemente de anulare (de pozitivitate) va fi numită pe scurt o mulțime de anulare (resp. de pozitivitate).

Dacă $\mathfrak{X}$ e un KP-lineal relativ la D, iar D_0 este o mulțime de anulare, atunci $D^* = \complement D_0$ este o (p)-bază a lui $\mathfrak{X}$. Dacă D conține elemente de pozitivitate și D^{**} este mulțimea acestora, atunci D^{**} este o (p)-bază a lui $\mathfrak{X}$.

Un KP-lineal, pentru care mulțimea asociată conține un element de pozitivitate, este, evident, totodată și un KB-lineal.

Definiția 1.4. *O mulțime E dintr-un KP-lineal $\mathfrak{X}$ va fi numită (p)-mărginită***), *dacă pentru orice $d \in D$ există $\lambda(d)$ real, așa ca $\| x \|_d \leqslant \lambda(d)$, oricare ar fi $x \in E$.*

Evident, orice mulțime (o)-mărginită este și (p)-mărginită.

Condiția ca o mulțime E să fie (p) mărginită este echivalentă condiției ca ea să fie „*(p)-anulabilă*", adică pentru orice șir $\{x_n\} \subset E$ și orice șir de numere reale $\lambda_n \to 0$ să avem $\lambda_n x_n \xrightarrow{o} \mathbf{0}$.

Au loc următoarele teoreme:

Teorema 1.1. *Orice subspațiu liniar $\mathfrak{X}_1$ al unui KP-lineal $\mathfrak{X}$, care formează un K-lineal exact în $\mathfrak{X}$, este un KP-lineal.*

---

*) Vom nota în tot cursul lucrării prin D mulțimea dirijată asociată unui KP-lineal.

**) Datorită acestei definiții, vom utiliza și termenul de mulțime (o)-mărginită, pentru o mulțime mărginită în sensul ordinei.

Demonstrația este imediată.

Amintim că $\mathfrak{X}_1$ e un K-lineal exact în K-linealul $\mathfrak{X}$, dacă pentru orice $x, y, \in \mathfrak{X}_1$ avem și $x \vee y \in \mathfrak{X}_1$.

Teorema 1.2. *Asociația*) a două KP-lineale* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, *este un KP-lineal.*

Demonstrație. Fie D mulțimea asociată lui $\mathfrak{X}$ și E mulțimea asociată lui $\mathfrak{Y}$, Fie $\mathfrak{Z} = \overline{S}\ (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ asociația lui $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$. Vom considera mulțimea $F = D \times E$ în care vom defini

$$(d, e) \leqslant (d', e') \rightleftarrows d \leqslant d'', e \leqslant e'.$$

În acest caz F va fi dirijată și vom defini în $\mathfrak{Z}$

$$\| (x, y) \|_{(d, e)} = \| x \|_d + \| y \|_e$$

oricare ar fi $(d, e) \in F$.

Teorema 1.3. *În orice KP-lineal, din* $x_n \xrightarrow{p} x$, $y_n \xrightarrow{p} y$ *rezultă* $x_n \vee y_n \xrightarrow{p} x \vee y$ și $x_n \wedge y_n \xrightarrow{p} x \wedge y$.

Corolar. Dacă $x_n \leqslant y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ iar $x_n \xrightarrow{p} x$, $y_n \xrightarrow{p} y$, atunci $x \leqslant y$.

KP-lineale particulare

Printre KP-lineale prezintă o anumită importanță cele date de următoarele definiții:

Definiția 1.5. *Un KP-lineal este de tip A dacă pseudonorma satisface, pentru fiecare* $d \in D$, *la condiția: dacă* $x, y \geqslant 0$, *atunci* $\| x + y \|_d = \| x \|_d + \| y \|_d$.

Definiția 1.6. *Un KP-lineal este de tip M dacă pseudonorma satisface, pentru fiecare* $d \in D$, *la condiția: dacă* $x, y \geqslant 0$, *atunci* $\| x \vee y \|_d = \max (\| x \|_d, \| y \|_d)$.

Printre KP-linealele care sînt concomitent K-spații, clasa cea mai importantă este aceea a KP-spațiilor [1]. În afară de acestea, o clasă particulară de K-spații care sînt KP-lineale de tip M este aceea definită mai jos.

K-spații de elemente relativ mărginite

Este cunoscută noțiunea de K-spațiu de elemente mărginite și importanța ei. Un astfel de spațiu formează totodată un KB-lineal în care norma satisface, pentru elemente pozitive, la condiția: $\| x \vee y \| = \max (\| x \|, \| y \|)$.

Vom generaliza aici această noțiune, obținînd un tip particular de KP-lineal.

Definiția 1.7. *Un K-spațiu* $\mathfrak{X}$ *va fi numit un K-spațiu de elemente relativ-mărginite* (pe scurt un K-spațiu de tip M^* *dacă satisface condiția ce urmează.*

---

*) Produsul direct, în terminologia lui G. Birkhoff.

*Există o mulțime dirijată**) *și completă* $D \subset \mathfrak{X}$ *de elemente pozitive astfel încît*

1) (d_1) $d_2 \leqslant d_1 \wedge d_2$ pentru *orice* $d_1 d_2 \in D$;
2) *pentru orice* $x \in \mathfrak{X}$ *și* $d \in D$ *există* ξ_d real *cu*

$$(d) \quad |x| \leqslant \xi_d\, d.$$

Vom nota prin $\|x\|_d$ *cel mai mic număr* ξ_d *care satisface condiția* 2).

Teorema 1.4. *Oricare K-spațiu de tip* M^* *e un KP-lineal de tip* M.

Demonstrație. Faptul că $\|x\|_d$ este o pseudonormă triunghiulară, se verifică fără dificultăți, folosind proprietățile proiectorilor. În particular dacă $d_1 \leqslant d_2$ atunci $(d_1) \leqslant (d_2)$ și deci, pentru orice x, $(d_1)\,|x| \leqslant (d_2)\,|x|$, de unde

$$(d_1)\,|x| \leqslant \|x\|_{d_2}\, d_2.$$

Aplicînd (d_1) fiecărui membru, obținem

$$(d_1)\,|x| \leqslant \|x\|_{d_2}\,(d_1)\,d_2 \leqslant \|x\|_{d_2}\,(d_1 \wedge d_2) = \|x\|_{d_2}\, d_1$$

de unde

$$\|x\|_{d_1} \leqslant \|x\|_{d_2}.$$

Condiția *i*) din definiția *KP*-linealelor se verifică de asemenea imediat.

Fie acum $x,\ y \geqslant 0$. Avem

$$(d)\ x \leqslant \|x\|_d\, d, \qquad (d)\ y \leqslant \|y\|_d\, d,$$

de unde

$$(d)\,(x \vee y) = [(d)\,x] \vee [(d)\,y] \leqslant \max\,(\|x\|_d,\ \|y\|)_d\, d$$

și deci

$$\|x \vee y\|_d \leqslant \max\,(\|x\|_d,\ \|y\|_d).$$

Inegalitatea inversă are loc în orice *KP*-lineal.

Teorema 1.5. *În orice KP-spațiu de tip* M^*, *orice șir* (o)-*mărginit,* (p)-*convergent către un element* x, (o)-*converge către același element.*

Demonstrație. Putem considera șiruri convergente la 0

Fie $\{x_n\}$ (o)-mărginit și $x_n \xrightarrow{p} 0$. Avem deci $\|x_n\|_d \to 0$ pentru orice $d \in D$. Dar $(d)\ |x_n| \leqslant \|x_n\|_d\, d$, deci $(d)\ |x_n| \xrightarrow{o} 0$.

Deoarece $\overline{\lim_n}\, x_n$ este finită, avem

$$\overline{\lim_n}\,|x_n| = (\sup_{d \in D}\,(d))\,(\overline{\lim_n}\,|x_n|) = \sup_{d \in D}\,((d)\ \overline{\lim_n}\,|x_n|) =$$

$$= \sup_{d \in D}\,(\lim_n\,(d)\ |x_n|) = 0.$$

Deci $x_n \xrightarrow{o} 0$.

---

*) Dirijarea nu e o restricție; se pot adăuga marginile superioare ale submulțimilor finite, cu păstrarea proprietăților 1) și 2) ce urmează.

Observație. Am utilizat faptul că dacă D e completă în $\mathfrak{X}$, atunci $\sup_{d \in D} (d) = 1$, care se verifică folosind proprietățile componentelor.

Teorema 1.6. *Orice K-spațiu cu unitate, care este discret, e un K-spațiu de tip M^*.*

Demonstrație. Fie $\{e_\xi\}$ ($\xi \in \square$) o mulțime de elemente unitare disjuncte două cîte două, care este completă. Pentru orice element x avem

$$(e_\xi) \mid x \mid = \mid (e_\xi)\, x \mid = \mid \alpha_\xi e_\xi \mid = \mid \alpha_\xi \mid e_\xi, \qquad (\alpha_\xi \text{ reale}).$$

Vom nota din D mulțimea compusă din elementele e_ξ și din sumele finite ale lor. În acest caz $\mathfrak{X}$ e de tip M^* cu

$$\| x \|_{e_{\xi_1} + \ldots + e_{\xi_n}} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mid \alpha_{\xi_i} \mid, \qquad (\xi_i \in \square).$$

Exemple. Teorema 1.6 ne furnizează o întreagă clasă de spații de tip M^*. În particular, spațiul (s) este de tip M^* cu $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$, unde $d_n = \{1, \ldots, 1, 0, \ldots\}$.

Un alt exemplu concret este următorul:

Fie T un spațiu Hausdorf local bicompact și F_T^* spațiul funcțiilor reale mărginite pe submulțimile bicompacte ale lui T, ordonat și liniarizat în mod natural. Dacă notăm pr n D^* familia submulțimilor bicompacte $A \subset T$, ordonată prin incluziune, D^* este dirijată. Tot astfel va fi mulțimea D a funcțiilor caracteristice ale mulțimilor $A \subset D^*$. Se verifică de asemenea că D este o mulțime completă în F_T^* datorită local-bicompactității lui T. Condiția 1) din definiția 1.7 este evident satisfăcută. Fie acum $\gamma_A \in D$. Deoarece $\mid x(t) \mid \leqslant \xi_A$ pentru $t \in A$, rezultă $(\gamma_A) \mid x \mid \leqslant \xi_A \gamma_A$, deci și condiția 2) din definiția 1.7 e îndeplinită.

Rezultă că F_T^* e un K spațiu de tip M^*.

§ 2. *KP*-spațiile și proprietățile lor generale

Vom reaminti mai întîi definiția noțiunii de KP-spațiu introdusă în [1] și vom da cîteva exemple.

Definiția 2.1 Un K - spațiu $\mathfrak{X}$ care este un KP-lineal (relativ la o mulțime dirijată D) este un KP-spațiu, dacă satisface în plus condițiilor:

ii) $x_n \searrow 0$ implică $\lim_n \| x_n \|_d = 0$, pentru orice $d \in D$;

iii) $\mid x_n \mid \nearrow +\infty$ implică $\lim_n \| x_n \|_{d_0} = +\infty$, cel puțin pentru un element $d_0 \in D$.

Dacă $\mathfrak{X}$ e un KP-spațiu relativ la D, atunci $\mathfrak{X}$ e un KP-spațiu echivalent, relativ la orice (p)-bază a sa.

Din axiome rezultă că în orice KP-spațiu, din $x_n \xrightarrow{o} x$ rezultă $x_n \xrightarrow{p} x$. Se observă de asemenea că pseudonorma este, pentru fiecare $d \in D$, o funcțională (p)-continuă și deci și (o)-continuă pe $\mathfrak{X}$.

Dacă pentru un KP-spațiu $\mathfrak{X}$, mulțimea dirijată asociată D conține un element de pozitivitate c, atunci $\| x \|_c$ este o normă, monotonă pentru elemente pozitive și (o)-continuă. Deducem*):

*) Demonstrația este cea de la KB-spații. A se vedea [2].

1) $\mathfrak{X}$ este de tip numerabil.

2) Dacă $\mathfrak{X}$ are unitate, atunci pe el există o funcțională (o)-liniară strict-pozitivă. În plus $\mathfrak{X}$ admite o lărgire care e un KB-spațiu cu normă aditivă pentru termeni pozitivi.

3) Dacă $\mathfrak{X}$ este lărgit, atunci el este finit-dimensional.

Vom da cîteva exemple de KP-spații*).

1° Spațiul (s) al tuturor șirurilor numerice, liniarizat și ordonat în modul obișnuit, cu $D = \{1,2, \ldots\}$ și $\| x \|_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | \xi_i |$ (unde $x = \{\xi_1 \xi_2, \ldots\}$;

2° Spațiul M $[0,1]$ al funcțiilor măsurabile și mărginite a.p.t. pe $[0,1]$, liniarizat și ordonat în mod obișnuit**) cu $D = L_+[0,1]$ (mulțimea funcțiilor sumabile pe $[0,1]$, pozitive a.p.t. ordonată natural) și $\| x \|_f = \int_0^1 |x(t)| \, f(t) \, dt$ pentru $f \in D$;

3° Spațiul F_T al funcțiilor reale (finite) pe o mulțime arbitrară T, liniarizat și ordonat în mod obișnuit, cu $D = \{\sigma \mid \sigma \subset T, \sigma \text{ finită}\}$ și $\| z \|_\sigma = \max_{t_i \in \sigma} | x(t_i) |$;

4° Spațiul $\Phi_\tau(\mathfrak{X})$ al funcționalelor regulate pe un K-lineal $\mathfrak{X}$, liniarizat și ordonat în mod obișnuit, cu $D = \mathfrak{X}_+$ (mulțimea elementelor pozitive din $\mathfrak{X}$) și $\| \varphi \|_x = | \varphi | (x)$, $(x \in \mathfrak{X}_+)$.

Au loc de asemenea următoarele două teoreme. :

T e o r e m a 2.1. *Orice K-subspațiu exact al unui KP-spațiu este un KP-spațiu.*

T e o r e m a 2.2. *Asociația a două KP-spații este un KP-spațiu.*

În unele dintre teoremele pe care le vom da în cele ce urmează vom folosi următoarea

Observație. Pe orice KP-spațiu există o mulțime suficientă de funcționale (o)-liniare.

Aceasta rezultă din faptul că $\mathfrak{X}$ este un spațiu topologic local-convex și în plus orice șir (o)-convergent e și (p)-convergent.

D e f i n i ț i a 2.2. *O mulțime $\mathfrak{F}$ de funcționale definite pe un K-spațiu $\mathfrak{X}$ va fi numită completă, dacă din condiția $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$ și $|f(x_n)| \leqslant \mu(f)$, pentru orice $f \in \mathfrak{F}$, rezultă că există $x \in \mathfrak{X}$, așa ca $x_n \nearrow x$.*

O mulțime suficientă și completă de funcționale (o)-liniare există pe orice KB-spațiu.

L e m a 2.1. Dacă $\mathfrak{X}$ e un K-spațiu pe care există o mulțime suficientă și completă de funcționale (o)-liniare, atunci $\mathfrak{X}$ e un KP-spațiu.

Demonstrație. Vom nota cu D mulțimea tuturor funcționalelor pozitive și (o)-liniare, ordonată prin : $f_1 \geqslant f_2$ $(f_1, f_2 \in D)$ dacă $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ pentru orice $x \geqslant 0$. Ea este evident dirijată.

Vom defini pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ și $f \in D$

$$\| x \|_f = f(|x|). \tag{2.1}$$

Aceasta este o pseudonormă triunghiulară, după cum se poate vedea cu ușurință. În particular, condiția $\| x \|_f = 0$ pentru orice $f \in D$ implică $x = 0$, rezultă din faptul că pe $\mathfrak{X}$ existînd o mulțime suficientă de func-

*) Pentru alte exemple a se vedea și [1].

**) Se identifică funcțiile egale aproape peste tot.

ționale (o)-liniare, există și o mulțime suficientă de funcționale (o)-liniare pozitive. Într-adevăr, dacă pentru $x \neq \mathbf{0}$ avem $f(x) \neq 0$, unde f este (o)-liniară, atunci f fiind și regulată, $f = f_+ - f_-$ și nu putem avea $f_+(x) = f_-(x) = 0$.

Condițiile *i)* *ii)* și *iii)* sînt evident satisfăcute. KP-spațiile generalizează astfel K-spațiile pe care e definită o mulțime suficientă și completă de funcționale (o)-liniare.

T e o r e m a 2.3. *Pentru ca un K-spațiu lărgit să fie un KP-spațiu, e necesar și suficient ca pe el să existe o mulțime suficientă de funcționale (o)-liniare.*

Demonstrație. Necesitatea a fost remarcată în observația dată mai înainte.

Suficiența rezultă din lema precedentă, ținînd seama că pe un K-spațiu lărgit orice mulțime suficientă de funcționale (o)-liniare este și completă. Într-adevăr, fie $\mathbf{0} \leqslant x_n \nearrow \infty$.

Există atunci elementul unitar $e > \mathbf{0}$, așa încît [2]*),

$$(o)\text{-}\lim_n (x_n \wedge k\,e) = ke, \quad (k = 1,2,\ldots),$$

Prin ipoteză există f_0 (o)-liniară și pozitivă, așa ca $f_0(e) > 0$. Avem atunci

$$(o)\text{-}\lim_n f_0(x_n) \geqslant (o)\text{-}\lim_n f_0(x_n \wedge ke) = kf_0(e)$$

pentru orice k natural. Deci $f_0(x_n) \to \infty$.

D e f i n i ț i a 2.3. *O mulțime $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \square)$, de elemente ale unui KP-spațiu $\mathfrak{X}$ va fi numită (vp)-mărginită, dacă pentru orice de $d \in D$ există un număr real $\lambda(d)$ așa încît*

$$\| \, |x_{\xi_1}| \vee \ldots \vee |x_{\xi_n}| \, \|_d \leqslant \lambda(d)$$

pentru orice număr finit de indici

L e m a 2.2. Pentru ca un șir $\{x_n\}$ de elemente ale unui KP-spațiu $\mathfrak{X}$ să fie (o)-mărginit, este necesar și suficient ca șirul să fie (vp)-mărginit.

Demonstrație. Fie $|x_n| \leqslant x_0$. Rezultă $|x_{n_1}| \vee \ldots \vee |x_{n_m}| \leqslant x_0$ pentru orice $n_1, \ldots, n_m$, deci $\| \, |x_{n_1}| \vee \ldots \vee |x_{n_m}| \, \|_d \leqslant \|x_0\|_d$ oricare ar fi $d \in D$.

Reciproc, fie $\{x_n\}$ (vp)-mărginit și fie $y_n = |x_1| \vee \ldots \vee |x_n|$. Rezultă atunci

$$y_{n+p} - y_n \leqslant |x_n| \vee \ldots \vee |x_{n+p}|,$$

de unde

$$\|y_{n+p} - y_n\|_d \leqslant \lambda(d),$$

oricare ar fi $d \in D$. Nu putem avea deci $y_n \nearrow \infty$, căci ar rezulta $y_{n+p} - y_n \nearrow \infty$ pentru $p \to \infty$, ceea ce ar contrazice axioma *iii)*.

T e o r e m a 2.4. *În orice KP-spațiu (o)-convergența și (p)-convergența sînt echivalente pentru șiruri monotone.*

Demonstrație. Dacă $x_n \nearrow x$ sau $x_n \searrow x$, atunci $x_n \xrightarrow{p} x$. căci (o)-convergența implică (p)-convergența.

Fie $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$ și $x_n \xrightarrow{p} x$. Pseudonorma fiind (p)-continuă rezultă $\|x_n\|_d \to \|x\|_d$ pentru orice $d \in D$, de unde deducem că șirul $\{x_n\}$ este (p)-mărginit.

---

*) p. 142–143.

Putem presupune $x_1 = 0$, deoarece în caz contrar am considera elementele $x'_n = x_n - x_1$. În baza axiomei *iii)* nu putem avea $x_n \nearrow \infty$.

Există deci y așa ca $x_n \nearrow y$, de unde $x_n \xrightarrow{p} y$, ceea ce implică $y = x$, (p)-limita fiind unică.

În cazul unui șir $\{x_n\}$ monoton descrescător, deducem același lucru prin aplicarea rezultatului precedent șirului $\{-x_n\}$.

Teorema 2.5. *Orice KP-spațiu este un VP-spațiu**), *în care* (o)-*convergența și* (vp)-*convergența sînt echivalente.*

Demonstrație. Definind

$$\|x_1, \ldots, x_n\|_d = \| |x_1| \vee \ldots \vee |x_n| \|_d, \quad (d \in D)$$

obținem pentru orice complex $(x_1, \ldots, x_n)$ o pseudonormă, care satisface după cum se poate verifica cu ușurință, toate axiomele VP-spațiilor.

Fie acum $x_n \xrightarrow{o} 0$. Rezultă $|x_n| \xrightarrow{o} 0$. și deci $\overline{\lim} |x_n| = 0$ sau încă $\overline{\lim} (\bigvee_{i \geqslant n} |x_i|) = 0$. Avem astfel

$$\| |x_n| \vee \ldots \vee |x_{n+m}| \|_d \leqslant \| \bigvee_{i \geqslant n} |x_i| \cdot \|_d \leqslant \varepsilon$$

pentru $n \geqslant n_0(\varepsilon, d)$, oricare ar fi m, adică $x_n \xrightarrow{vp} 0$.

Reciproc, fie $x_n \xrightarrow{vp} 0$, deci

$$\| |x_n| \vee \ldots \vee |x_{n+m}| \| \leqslant \varepsilon$$

pentru $n \geqslant n_0(\varepsilon, d)$ și orice m. Deducem că șirul $\{x_n\}$ este (vp)-mărginit și, în virtutea lemei 2.2, el este (o)-mărginit.

Avem mai departe

$$\| \bigvee_{i \geqslant n} |x_i| \|_d = \|(o)\text{-}\lim_m |x_n| \vee \ldots \vee |x_{n+m}| \|_d = \lim_m \| |x_n| \vee \ldots \vee |x_{n+m}| \|_d \leqslant \varepsilon$$

pentru $n \geqslant n_0(\varepsilon, d)$. Rezultă $\bigvee_{i \geqslant n} |x_i| \xrightarrow{p} 0$, de unde $\bigvee_{i \geqslant n} |x_i| \xrightarrow{o} 0$ în baza teoremei 2,4, șirul $\{\bigvee_{i \geqslant n} |x_i|\}$ fiind monoton. Aceasta înseamnă că $x_n \xrightarrow{o} 0$

Teorema 2.6. *Un KP-spațiu cu* (p)-*bază numerabilă este un KM-spațiu, în care* (t)-*convergența și* (p) *convergența sînt echivalente.*

Demonstrație. Dacă $D^* = \{d_1 d_2, \ldots\}$ este o (p)-bază, atunci definind

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_{d_n}}{1 + \|x\|_{d_n}}$$

vom obține o funcție metrică satisfăcînd toate axiomele KM-spațiului [2], după cum se poate verifica. Cealaltă afirmație din enunțul teoremei rezultă din faptul că seria lui $\rho(x)$ converge uniform relativ la x și din faptul că în orice KM-spațiu relația $\rho(x_n) \to 0$ este echivalentă cu $x_n \xrightarrow{t} 0$

*) A se vedea [4].

Relativ la proprietățile unui KP-spațiu, legate de proprietățile diverselor clase de K-spații la care acesta poate aparține, au loc teoremele ce urmează*).

Teorema 2.7. *Dacă $\mathfrak{X}$ e un KP-spațiu de timp numerabil, iar mulțimea $\{x_\xi\}_{\xi\in\Xi} \subset \mathfrak{X}$ este majorată și formată din elemente pozitive, atunci* $\|\sup_{\xi\in\Box} x_\xi\|_d = \sup_{\xi\in\Box} \|x_{\xi_1}, \ldots, x_{\xi_n}\|_d$

pentru orice $d\in D$.

Corolar. Pentru orice mulțime dirijată și majorată de elemente pozitive E ale unui KP-spațiu de tip numerabil, avem
$\|\sup E\|_d = \sup_{x\in E} \|x\|_d$ pentru orice $d\in D$.

Demonstrațiile teoremei 2.7 și a corolarului său sînt identice cu demonstrațiile unor propoziții analoge ce se referă la KB-spații (a se vedea [2]**).

Lema 2.3. Dacă într-un KP-spațiu $\mathfrak{X}$ orice mulțime dirijată (p)-mărginită este (o)-mărginită, atunci $\mathfrak{X}$ este un K^+ P-spațiu.

Demonstrație. Fie $\{x_\xi\}_{\xi\in\Box}$ o mulțime (o)-anulabilă de elemente pozitive ale lui $\mathfrak{X}$. Se poate presupune că această mulțime conține marginea superioară a oricărui număr finit de elemente ale sale, deoarece în caz contrar se pot adăuga cu păstrarea (o)-anulabilității.

Fie numerele reale $\lambda_n \to 0$. Rezultă atunci $\lambda_n x_{\xi_n} \overset{0}{\to}$ pentru orice șir de indici $\{\xi_n\} \subset \Box$ de unde

$$\lambda_n \|x_{\xi_n}\|_d \to 0, \text{ (oricare ar fi } d\in D).$$

Mulțimea numerică $\{\|x_\xi\|_d\}$ este (pentru fiecare d) (o)-anulabilă și deci mărginită:

$$\|x_\xi\|_d \leqslant \lambda(d), \qquad (d\in D).$$

Rezultă astfel că mulțimea $\{x_\xi\}$, care este dirijată, este și (p)-mărginită, deci (o)-mărginită prin ipoteză. Dacă x_ξ nu sînt pozitive, vom deduce același lucru considerînd elementele $|x_\xi|$.

Teorema 2.8. *Pentru ca un KP-spațiu $\mathfrak{X}$ de tip numerabil să fie un K^+ P-spațiu, este necesar și suficient ca să satisfacă condiția: pentru orice submulțime dirijată a sa, (p)- mărginirea să fie echivalentă cu (o)-mărginirea.*

Demonstrație. Suficiența a fost demonstrată în lema precedentă. Să stabilim necesitatea condiției.

Fie $\mathfrak{X}$ de tip numerabil și de tip K^+ P. Fie $\{x_\xi\}_{\xi\in\Box}$ o submulțime dirijată a lui $\mathfrak{X}$ formată din elemente pozitive, așa ca $\|x_\xi\|_d \leqslant \lambda(d)$ pentru orice $d\in D$. Să presupunem că am avea $\sup_{\xi\in\Box} x_\xi = +\infty$. Există atunci o

submulțime numerabilă $\{x_{\xi_n}\} \subset \{x_\xi\}$, așa ca $\sup_n \{x_{\xi_n}\} = +\infty$. Se poate

*) Vom spune despre un KP-spațiu $\mathfrak{X}$ că este un KP-spațiu de tip numerabil sau un KP-spațiu regulat sau un K^+ P-spațiu etc., după cum $\mathfrak{X}$ este respectiv un K-spațiu de tip numerabil, regulat, sau un K^+ P-spațiu etc.

**) p. 216–217.

evident presupune că $x_{\xi_n} \nearrow \infty$, deoarece în caz contrar am lua $x'_{\xi_n} = x_{\xi_1} \vee \ldots \vee x_{\xi_n}$ pentru care avem de asemenea $\|x'_{\xi_n}\|_d \leqslant \lambda(d)$, mulțimea $\{x_\xi\}$ fiind dirijată.

Dar din $\|x_{\xi_n}\|_d \leqslant \lambda(d)$, pentru orice $d \in D$, ar rezulta contrazicerea axiomei *iii*).

Teorema este astfel justificată.

În baza teoremei 1.12 se poate demonstra:

Teorema 2.9.*) *Dacă $\mathfrak{X}$ e un K^+P-spațiu regulat, atunci pentru ca o mulțime $E \subset \mathfrak{X}$ să fie (o)-mărginită, este necesar și suficient ca ea să fie (vp)-mărginită.*

§ 3. Tipuri particulare KP-spații

KP-spații de tip A

Ca și pentru KB-lineale, introducem

Definiția 3.1. *Spunem că un KP-spațiu este de tip A, dacă satisface condiția: pentru orice elemente $x, y \geqslant 0$ avem $\|x+y\|_d = \|x\|_d + \|y\|_d$ oricare ar fi $d \in D$.*

Ca și pentru KB-lineale se poate demonstra următoarea teoremă analogă:

Teorema 3.1. *Orice KP-lineal de tip A, care este complet în topologia generală de pseudonormă, este un KP-spațiu de tip A.*

Teorema 3.2. *Pentru ca un K-spațiu $\mathfrak{X}$ să fie un KP-spațiu de tip A, este necesar și suficient ca pe $\mathfrak{X}$ să existe o mulțime suficientă și completă de funcționale (o)-liniare.*

Demonstrație. Dacă pe K-spațiul $\mathfrak{X}$ există o mulțime suficientă și completă de funcționale (o)-liniare, atunci, după cum s-a stabilit prin lema 2.1. $\mathfrak{X}$ e un KP-spațiu față de pseudonorma (2.1), care este aditivă pentru termeni pozitivi.

Reciproc, fie $\mathfrak{X}$ un KP-spațiu de tip A. Ca pe orice KP-spațiu, mulțimea tuturor funcționalelor (o)-liniare pe $\mathfrak{X}$ este suficientă. Să arătăm că este și completă. Pentru aceasta să observăm că pentru orice $d \in D$, obținem o funcțională (o)-liniară d^*, pe $\mathfrak{X}$ punînd

$$d^*(x) = \|x_+\|_d - \|x_-\|_d. \tag{3.1}$$

Nu avem atunci decît să observăm că pentru $x \geqslant 0$, $d^*(x) = \|x\|_d$

Observație. Mulțimea funcționalelor de forma (3.1) este pozitiv-suficientă**) și completă pe orice KP-spațiu de tip A.

Teorema 3.3. *Dacă pe un K-spațiu $\mathfrak{X}$, cu unitate este definită o mulțime suficientă de funcționale (o)-liniare, atunci $\mathfrak{X}$ admite o lărgire care e un KP-spațiu de tip A.*

Demonstrație. Fie D mulțimea tuturor funcționalelor (o)-liniare și pozitive pe $\mathfrak{X}$ ordonată natural. Mulțimea D este suficientă, după cum s-a remarcat în lema 2.1.

---

*) Această teoremă generalizează o propoziție analogă privind KB-spațiile și demonstrația se poate face în același mod. A se vedea [2].

**) Adică suficientă pentru submulțime a elementelor pozitive.

Fie acum $\widetilde{\mathfrak{X}}$ lărgirea maximală a lui $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{X}_0$ subspațiul elementelor $x \in \widetilde{\mathfrak{X}}$, pentru care

$$\|x\|_f = \sup_{\substack{0 \leqslant x' \leqslant |x| \\ x' \in \mathfrak{X}}} \{f(x)\} < \infty$$

oricare ar fi $f \in D$. Se poate verifica atunci că $\mathfrak{X}_0$ este un KP-spațiu de tip A, subspațiu normal al lui $\widetilde{\mathfrak{X}}$. Cum $\mathfrak{X}$ este un subspațiu normal al lui $\mathfrak{X}$, rezultă că $\widetilde{\mathfrak{X}}$ este cuprins normal și în $\mathfrak{X}_0$ și, evident, este și complet în acesta. Cu alte cuvinte, $\mathfrak{X}_0$ este o lărgire a lui $\mathfrak{X}$.

Corolarul 1. Orice KP-spațiu cu unitate admite o lărgire care e un KP-spațiu de tip A.

Aceasta rezultă din faptul că pe orice KP-spațiu există o mulțime suficientă de funcționale (o)-liniare, după cum s-a mai remarcat.

Corolarul 2. Orice KP-spațiu lărgit poate fi organizat ca un KP-spațiu de tip A.

Aceasta rezultă de altfel și din lema 2.1. dacă introducem pseudonorma (2.1).

KP-spații reductibile

Printre KP-spații prezintă interes special acelea pentru care pseudonorma satisface unor condiții suplimentare precizate în această secțiune.

D e f i n i ț i a 3.2. *Un element* $c \in D$ *va fi numit un element regulat (al lui* D *față de* $\mathfrak{X}$*), dacă pentru orice mulțime majorată* $\{x_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *de elemente pozitive, din condiția* $\| x_\xi \|_c = 0$ *pentru orice* $\xi \in \Xi$ *rezultă* $\| \sup_{\xi \in \Xi} x_\xi \|_c = 0$.

Dacă $\mathfrak{X}$ e un KP-spațiu cu pseudonorma (2.1), atunci orice funcțională pozitiv complet (o)-liniară reprezintă un element regulat în sensul definiției 3.2. Dacă $\mathfrak{X}$ e un KP-spațiu oarecare, atunci elementele regulate ale mulțimii D— dacă există — au totuși anumite proprietăți, ca și cînd ele ar fi funcționale complet (o)-liniare. Astfel, de exemplu, se poate introduce noțiunea de element asociat unui element regulat $c \in D$, corespunzătoare noțiunii de element de pozitivitate al unei funcționale complet (o)-liniare [2]. Avem astfel:

L e m a 3.1. Dacă pentru KP-spațiul $\mathfrak{X}$ există elemente regulate, atunci pentru orice element regulat $c \in D$ și pentru orice element pozitiv $x \in \mathfrak{X}$ există un element $v(x, c) \in \mathfrak{X}$ și numai unul, cu proprietățile*)

1) $0 \leqslant v(x, c) \leqslant x$;

2) $v(x, c) \perp [x - v(x, c)]$;

3) $0 < x' \leqslant v(x,c)$ implică $\|x'\|_c > 0$;

4) $\| x - v(x, c) \|_c = 0$.

Demonstrație. Dacă $\|x\|_c = 0$, atunci vom pune $v(x, c) = 0$. Dacă $\|x\|_c > 0$, fie $E = \{y \mid 0 \leqslant y \leqslant x, \|y\|_c = 0\}$ și $y^*(x, c) = \sup E$. Vom pune în acest caz $v(x, c) = x - y^*(x, c)$. Acest element va poseda cele patru proprietăți menționate.

*) Dacă două elemente x, y sînt disjuncte vom nota $x \perp y$.

T e o r e m a 3.4. *Fie $\mathfrak{X}$ un KP-spațiu, pentru care mulțimea asociată conține elemente regulate care nu sînt de anulare. În acest caz, pentru orice astfel de element c, $\mathfrak{X}$ se descompune în două componente $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, dintre care, pentru $\mathfrak{X}_1$, c este element de pozitivitate, iar pentru $\mathfrak{X}_2$, c este element de anulare.*

Demonstrație. Vom pune $\mathfrak{X}_2 = \{ x \mid \|x\|_c = 0 \}$. Elementul c fiind regulat, $\mathfrak{X}_2$ va fi o componentă, după cum se verifică imediat. Mai departe vom lua drept $\mathfrak{X}_1$, complementul disjunct al lui $\mathfrak{X}_2$. Dacă pentru $x \in \mathfrak{X}_1$, am avea $\|x\|_c = 0$, atunci $x \in \mathfrak{X}_2$ și deci $x \in \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2 = \{0\}$, adică $x = \mathbf{0}$.

Observația 3.1. Dacă notăm cu $E = \{v(|x|,c) \mid x \in \mathfrak{X}\}$, atunci $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_E$ și*) $\mathfrak{X}_2 = E^\perp$.

Într-adevăr, dacă $x \in \mathfrak{X}_2$, deci $\|x\|_c = 0$, atunci dacă $x \notin E^\perp$, ar exista $x_1 \in \mathfrak{X}$ așa ca $y = |x| \wedge v(|x_1|,c) > \mathbf{0}$. Folosind proprietatea 3) a elementelor asociate, deducem $\|x\|_c \geqslant \|y\|_c > 0$, ceea ce este contradictoriu. Deci $\mathfrak{X}_2 \subset E^\perp$. Reciproc, dacă $x \in E^\perp$, atunci $x \perp v(|x'|, c)$ pentru orice $x' \in \mathfrak{X}$. În particular $x \perp v(|x|,c)$ și cum $\mathbf{0} \leqslant v(|x|, c) \leqslant |x|$ rezultă $v(|x|,c) = \mathbf{0}$, deci $\|x\|_c = 0$ sau $x \in \mathfrak{X}_2$. Deci $E^\perp \subset \mathfrak{X}_2$ și în concluzie $\mathfrak{X}_2 = E^\perp$. De aici deducem totodată $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2{}^\perp = (E^\perp)^\perp = \mathfrak{X}_E$

Se observă de asemenea că, dacă c este element de pozitivitate, atunci mulțimea $\{v(|x|, c) \mid x \in \mathfrak{X}\}$ e completă în $\mathfrak{X}$.

D e f i n i ț i a 3.3. *Vom spune că un KP-spațiu $\mathfrak{X}$ este r e d u c t i b i l dacă toate elementele mulțimii asociate D sînt regulate (față de $\mathfrak{X}$).*

În teorema următoare vom folosi și următoarea definiție:

D e f i n i ț i a 3.4. *O submulțime $D' \subset D$ va fi numită t o t a l ă, dacă din $\|x\|_d = 0$, pentru orice $d \in D$, rezultă $x = \mathbf{0}$.*

Dacă o mulțime totală conține un singur element d_0, acesta este element de pozitivitate.

Dacă D'' nu este totală, atunci ea nu conține, evident, elemente de pozitivitate. În plus, $\complement D''$ este o mulțime dirijată. Ofice (p)-bază e o mulțime totală.

T e o r e m a 3.5. *Fie $\mathfrak{X}$ un KP-spațiu pentru care mulțimea asociată nu conține elemente de pozitivitate***). În acest caz, pentru orice submulțime $D' \subset D$ care nu e totală, există o componentă $\mathfrak{X}_0$ alui $\mathfrak{X}$, care să fie un KP-spațiu relativ la $D'' = \complement D'$.*

Demonstrație. Vom pune $\mathfrak{X}_0 = \{x \mid \|x\|_d = 0, x \in \mathfrak{X}, d \in D'\}$. Elementele din D' fiind regulate, $\mathfrak{X}_0$ e o componentă. Deoarece D' este o mulțime de anulare pentru $\mathfrak{X}_0$, această componentă e un KP-spațiu relativ la $\complement D'$.

Observația 3.2. Dacă notăm $E = \{v(|x|, d) \mid x \in \mathfrak{X}, d \in D'\}$, atunci $\mathfrak{X}_0 = E^\perp$.

T e o r e m a 3.6. *Orice KP-spațiu reductibil se descompune în componente cu unitate, pentru care în mulțimea asociată există cel puțin un element de pozitivitate.*

Demonstrație. Prin inducție transfinită putem extrage din $\mathfrak{X}$ o mulțime completă $\{x_\xi\}$, $(\xi \in \dot{\cup})$ de elemente pozitive disjuncte două cîte două, așa ca pentru orice $\xi \in \dot{\cup}$ să existe $x_\xi \in \mathfrak{X}$ și $d_\xi \in D$ cu $x_\xi = v(x_\xi, d_\xi)$. În acest

*) Vom nota cu E' mulțimea elementelor $x \in \mathfrak{X}$, așa ca $x \perp y$, oricare ar fi $y \in E$.

**) Se poate presupune de asemenea că nu există elemente de anulare.

caz componentele $\mathfrak{X}_{x_\xi}$ vor forma descompunerea căutată. Pentru fiecare ξ, x_ξ va servi ca unitate, iar d_ξ ca elemente de pozitivitate pentru KP-spațiul $\mathfrak{X}_{x_\xi}$.

Observația 3.3. În teorema 3.6 componentele descompunerii sînt simultan K-spații de tip numerabil.

Teorema 3.7. *Pe orice KP-spațiu reductibil există o mulțime suficientă de funcționale complet* (o)*-liniare.*

Această teoremă rezultă din teorema 3.6 și din observațiile făcute la începutul § 2, ținînd seama de un cunoscut criteriu de existență a unei mulțimi suficiente de funcționale complet (o)-liniare [2]*).

Vom stabili în sfîrșit următoarea teoremă:

Teorema 3.8. *Orice KP-spațiu de tip numerabil e un KP-spațiu reductibil.*

Demonstrație. Dacă mulțimea de elemente pozitive $\{x_\xi\}$, $(\xi \in \square)$, e majorată și $\|x_\xi\|_d = 0$, atunci, deoarece

$$\|x_{\xi_1} \vee \ldots \vee x_{\xi_n}\|_d \leqslant \|\sum_{i=1}^{n} x_{\xi_i}\|_d \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x_{\xi_i}\|_d = 0.$$

în baza teoremei 2.7 avem

$$\|\sup_{\xi \in \square} x_\xi\|_d = \sup_{\xi_i \in \square} \|x_{\xi_1}, \ldots, x_{\xi_n}\|_d = 0$$

oricare ar fi $d \in D$.

KP-spații de tip A^*

Vom considera aici KP-spații care sînt simultan de tip reductibil și de tip A. Pentru simplificarea limbajului vom introduce:

Definiția 3.5. *Spunem că un KP-spațiu este de tip* A^**, dacă este un KP-spațiu de tip reductibil și de tip* A.

În teorema următoare vom folosi

Observația 3.4. Pentru ca o funcțională (o)-liniară și pozitivă definită pe un K-spațiu $\mathfrak{X}$ să fie complet (o)-liniară, e necesar și suficient să satisfacă condiției: pentru orice mulțime majorată de elemente pozitive E, din $f(x) = 0$ pentru orice $x \in E$, rezultă $f(\sup E) = 0$

Teorema 3.9. *Pentru ca un K-spațiu* $\mathfrak{X}$ *să fie un KP-spațiu de tip* A^**, e necesar și suficient ca pe el să existe o mulțime suficientă și completă* $\mathfrak{F}$ *de funcționale complet* (o)*-liniare.*

Demonstrație. Dacă $\mathfrak{X}$ e un *KP-spațiu de tip* A^*, atunci datorită teoremei 3.7, pe $\mathfrak{X}$ există o mulțime suficientă de funcționale complet (o)-liniare. Mulțimea $\mathfrak{F}$ este completă, deoarece ea conține, în baza observației precedente, funcționalele de forma (3.1).

Reciproc, dacă pe K-spațiul $\mathfrak{X}$ există o mulțime suficientă și completă $\mathfrak{F}$ de funcționale complet (o)-liniare, atunci vom nota cu D mulțimea funcționalelor pozitive din $\mathfrak{F}$ ordonată natural și vom pune

$$\|x\|_f = f(|x|)$$

*) p. 421.

pentru orice $f \in D$. Şi aici, ca şi în lema 2.1, ţinem seama că D este suficientă, folosind faptul că dacă f este complet (o)-liniară, la fel sînt şi f_+, f_-. Elementele lui D vor fi regulate.

Observaţia 3.5. Pe orice KP-spaţiu de tip A^* mulţimea funcţionalelor de forma (3.1) este o mulţime pozitiv-suficientă şi completă de funcţionale complet (o)-liniare.

T e o r e m a 3.10. *Pentru ca un KP-spaţiu lărgit să fie un KP-spaţiu de tip A^*, e necesar şi suficient ca el să fie discret.*

Demosntraţie. Dacă $\mathfrak{X}$ e un KP-spaţiu de tip A^*, atunci, în baza teoremei 3.10, pe el există o mulţime suficientă de funcţionale complet (o)-liniare. Dacă $\mathfrak{X}$ este în plus lărgit, atunci în baza unei cunoscute teoreme [3]*), el este discret.

Reciproc, dacă $\mathfrak{X}$ este un K-spaţiu discret, pe el există o mulţime suficientă de funcţionale complet (o)-liniare [3]**). Dacă $\mathfrak{X}$ este în plus lărgit, atunci această mulţime este şi completă. În baza teoremei 3.9, $\mathfrak{X}$ este un KP-spaţiu de tip A^*.

Corolar. Orice KP-spaţiu lărgit de tip numerabil este discret.

Într-adevăr, KP-spaţiul fiind lărgit la o convenabilă schimbare a pseudonormei devine de tip A. Fiind şi de tip numerabil, vom obţine un KP-spaţiu de tip A^*.

КЛАССЫ ПСЕВДОНОРМИРОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В статье рассматриваются разные классы псевдонормированных линейных полуупорядоченных пространств.

Статья имеет три раздела.

В первом разделе вводится общее понятие KP-линеала, под которым понимается K-линеад $\mathfrak{X}$, являющейся одновременно треугольным псевдонормированным простанством по отношению к направленному множеству D, таким образом, что из $|x_1| \leqslant |x_2|$, $(x_1, x_2 \in \mathfrak{X})$ вытекает $\|x_1\|_d \leqslant \|x_2\|_d$ при всяком $d \in D$.

Обобщается также понятие K-пространство ограниченных элементов.

Во втором разделе рассматривается понятие KP-пространства, введенное ранее [I], и устанавливаются общие свойства такого пространства.

В третьем разделе вводятся следующие частные типы KP-пространств:

KP-пространство типа A, под которыми понимается KP-пространство, удовлетворяющее условию: $x, y \geqslant 0$, влечет $\|x + y\|_d = \|x\|_d + \|y\|_d$ при всяком $d \in D$;

KP-пространство приводимого типа, под которым понимается KP-пространство, удовлетворяющее условию: если для мажорированного множества положительных элементов E и элемента $d \in D$ имеет место равенство $\|x\|_d = 0$ при всяком $x \in E$, то $\|\sup E\|_d = 0$.

*) p. 422.
**) p. 421.

KP-пространство типа A^*, под которым понимается KP-пространство одновременно приводимого типа и типа A.

Доказываются разные теоремы, относящиеся к свойствам этих пространств.

CLASSES D'ESPACES LINÉAIRES SEMI-ORDONNÉS PSEUDO-NORMÉS

(RÉSUMÉ)

Le travail comprend une discussion sur les diverses classes d'espaces linéaires semi-ordonnés pseudo-normés.

Il est partagé en trois paragraphes.

Dans le § 1, on introduit la notion générale de linéal KP qui définit un lattice véctoriel $K\mathfrak{X}$ qui est simultanément un espace pseudo-normé triangulaire par rapport à un ensemble dirigé D, de manière que de $|x_1| \leqslant |x_2|$, $(x_1, x_2 \in \mathfrak{X})$ on déduise $\|x_1\|_d \leqslant \|x_2\|_d$ quel que soit $d \in D$.

On y généralise, aussi, la notion d'espace K avec des éléments bornés.

Dans le § 2, on part de la notion d'espace KP, introduite antérieurement [1] et on détermine les propriétés générales d'un tel espace.

Dans le § 3, on introduit les types particuliers suivants d'espaces K.

L'espace KP du type A, défini comme un espace KP satisfaisant à la condition : $x, y \geqslant 0$ implique que $\|x + y\|_d = \|x\|_d + \|y\|_d$ quel que soit $d \in D$.

L'espace KP du type réductible, qui définit un espace KP satisfaisant à la condition : si, pour une ensemble limitee supérieurement, d'éléments positifs E et d'un élément $d \in D$, on a l'egalité $\|x\|_d = 0$ quel que soit l'élément $x \in E$, alors $\|\sup E\|_d = 0$.

L'espace KP du type A^* défini par un espace KP simultanément du type réductible et du type A.

On établit divers théorèmes concernant les propriétés de ces espaces.

BIBLIOGRAFIE

1. Romulus Cristescu, *Spații parțial-ordonate pseudonormate.* Comunicările Acad. R.P.R., t. IV, nr. 1—2, ianuarie-februarie 1954, p. 15—20.
2. L. V. Kantorovici, B. Z. Vulih i A. G. Pinscher, *Funkționalnîi analiz v poluuporiadocenih prostranstvah.* Moscova, 1950.
3. D. H. Hyers, *Linear Topological Spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., 1945, vol. 51, p. 1—18.
4. Romulus Cristescu, *Asupra unei noțiuni de convergență.* Bul. Ştiinț. Acad. R.P.R., Secțiunea de ştiințe matematice şi fizice, t. VI, nr. 2, aprilie-mai-iunie 1954, p. 297—304.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 3—4, 1956

ASUPRA UNOR ECUAŢII DIFERENŢIALE ALE CĂROR SOLUŢII SE POT AFLA CU AJUTORUL SOLUŢIILOR ECUAŢIEI $\theta'' = h(t) \cdot \theta$*)

DE

ARNO KAHANE

Am studiat în altă parte [1] problema de echivalenţă a două ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul doi, cînd există o transformare de variabilă care permite trecerea de la o ecuaţie la alta.

Se ştie însă că singurele transformări de variabilă, care lasă invariantă forma ecuaţiei

$$\theta'' = h(t) \cdot \theta, \tag{1}$$

sînt $T = \mu t + \nu$, unde μ şi ν sînt constante. De aceea, fiind dată ecuaţia (1), care joacă un rol deosebit în studiul centro-afin al curbelor plane, se pune întrebarea cum putem găsi alte ecuaţii, de aceeaşi formă, dar care nu sînt echivalente cu (1), ale căror soluţii să poată fi găsite cu ajutorul ecuaţiei (1).

Pe de altă parte, în mecanică intervin ecuaţii de forma :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{F}{m} + \frac{C^2}{r^3}, \tag{2}$$

unde F este o forţă centrală, m masa punctului, r raza vectoare şi C o constantă ; şi aici sînt cazuri cînd soluţiile ecuaţiei (2) pot fi deduse din cele ale unei ecuaţii de forma $\theta'' = h(t) \cdot \theta$ pe care ştim s-o integrăm. În sfîrşit, există ecuaţii mai generale, care pot fi rezolvate în acelaşi mod.

Este ceea ce ne propunem să studiem în lucrarea de faţă.

§ I

Se cunoaşte teorema lui Darboux :
fiind dată ecuaţia diferenţială de ordinul doi

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = [h(t) + \lambda]\ \theta, \tag{1}$$

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 18 iunie 1956.

dacă știm să integrăm această ecuație pentru toate valorile constantei λ, putem deduce o infinitate de alte ecuații *de aceeași formă*, pe care să le putem integra pentru toate valorile lui λ; $f(t)$ fiind o soluție particulară a ecuației (1), corespunzătoare unei valori particulare λ_1 a parametrului λ, știm să integrăm și ecuația

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \left[f\left(\frac{1}{f}\right)'' + \lambda - \lambda_1\right]\theta \tag{2}$$

pentru toate valorile lui λ. Anume, dacă θ este soluția generală a ecuației (1), pentru o valoare anumită a parametrului λ, diferită de λ_1, atunci

$$\theta' - \theta\frac{f'}{f} \tag{3}$$

este soluția generală a ecuației (2), pentru aceeași valoare a parametrului λ [2].

Pentru a ne da seama de utilitatea teoremei și de felul cum se poate păstra forma ecuației, vom relua și dezvolta unele exemple date de Darboux.

1°) Știm să integrăm ecuația

$$\theta'' = \lambda\,\theta \tag{4}$$

pentru toate valorile constantei λ. Pentru $\lambda_1 = 0$, avem soluția particulară $f(t) = t$; rezultă că avem soluția ecuației

$$\theta'' = \left[t\left(\frac{1}{t}\right)'' + \lambda\right]\theta \quad \text{sau} \quad \theta'' = \left[\frac{1\cdot 2}{t^2} + \lambda\right]\theta \tag{5}$$

pentru toate valorile lui λ.

Ecuația (5), la rîndul ei, admite pentru $\lambda_1 = 0$, soluția particulară $f(t) = t^2$; rezultă că știm să integrăm ecuația

$$\theta'' = \left[t^2\left(\frac{1}{t^2}\right)'' + \lambda\right]\theta \quad \text{sau} \quad \theta'' = \left[\frac{2\cdot 3}{t^2} + \lambda\right]\theta \tag{6}$$

pentru toate valorile lui λ. Cum pentru $\lambda_1 = 0$ avem soluția particulară $f(t) = t^3$, ajungem la ecuația

$$\theta'' = \left[\frac{3\cdot 4}{t^2} + \lambda\right]\theta \tag{7}$$

și continuînd în același mod ajungem la cunoscuta ecuație

$$\theta'' = \left[\frac{n(n-1)}{t^2} + \lambda\right]\theta. \tag{8}$$

Fie ecuația liniară generală de ordinul doi:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2P(t)\,\frac{dz}{dt} + Q(t)\,z = 0.$$

Punem $z = v \cdot \theta$ și ecuația devine

$$v\ \theta'' + 2\ [v' + P\ v]\ \theta' + (v'' + 2Pv' + Q\ v)\ \theta = 0.$$

Dacă luăm $v' + P \cdot v = 0$ și deci $v = e^{-\int P dt}$, θ va fi dat de ecuația

$$\theta'' = (P' + P^2 - Q)\ \theta.$$

Să considerăm în particular ecuația

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{dz}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) z = 0,$$

care determină funcțiile Bessel de ordinul ν.

În acest caz $P = \frac{1}{2t}$ și $Q = 1 - \frac{\nu^2}{t^2}$, așa că punînd $z = v\ \theta$, vom avea $v = \frac{1}{\sqrt{t}}$, iar θ este dat de ecuația

$$\theta'' = \left(\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} - 1\right) \theta.$$

Sînt cunoscute însă formele remarcabile ale funcțiilor Bessel de prima și de-a doua speță, cînd indicele ν este egal cu jumătatea unui număr impar.

Astfel

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t = Y_{-\frac{1}{2}}(t)$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t = -Y_{\frac{1}{2}}(t)$$

și cu ajutorul formulelor cunoscute de recurență se obțin

$$J_{n-\frac{1}{2}}(t) \quad \text{și} \quad J_{-n+\frac{1}{2}}(t).$$

Dar cînd $\nu = \pm\left(n - \frac{1}{2}\right)$, avem $\nu^2 - \frac{1}{4} = n\ (n-1)$,

așa că soluția generală a ecuației (8), pentru $\lambda = -1$, este

$$\theta = \sqrt{t}\left[C_1 J_{n-\frac{1}{2}}(t) + C_2 J_{-n+\frac{1}{2}}(t)\right].$$

2°) Revenind la ecuația (4), $\theta'' = \lambda\ \theta$, pentru $\lambda_1 = -1$ avem o soluție particulară $f(t) = \cos t$ și deci știm să integrăm ecuația

$$\theta'' = \left[\cos t \left(\frac{1}{\cos t}\right)'' + \lambda + 1\right]\theta \quad \text{sau} \quad \theta'' = \left[\frac{1 \cdot 2}{\cos^2 t} + \lambda\right] \theta, \qquad (9)$$

pentru toate valorile lui λ.

Studiind curbele cu invarianți absoluți constanți într-o transformare centro-afină [1]*), am văzut că astfel de curbe sînt date de ecuațiile

$$\theta'' = \pm \frac{a^2}{\cos^2 t}\,\theta \quad \text{și} \quad \theta'' = \pm \frac{a^2}{\operatorname{ch}^2 t}\,\theta. \tag{10}$$

Am arătat că putem integra aceste ecuații ori de cîte ori a^2 este produsul a două numere întregi consecutive; ecuația

$$\theta'' = -\frac{m(m+1)}{\operatorname{ch}^2 t}\,\theta$$

admite soluția $\theta = P_m(\operatorname{th} t)$, unde P_m este polinomul lui Legendre:

$$P_m(t) = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m} \cdot \frac{d^m}{dt^m}\left[(t^2-1)^m\right],$$

iar ecuația

$$\theta'' = \frac{m(m+1)}{\cos^2 t}\,\theta$$

admite soluția

$$\theta = Q_m(\operatorname{tg} t),$$

unde

$$Q_m(t) = \frac{P_m(it)}{i^m} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m} \cdot \frac{d^m}{dt^m}\left[(t^2+1)^m\right].$$

Ecuația

$$\theta'' = \frac{m(m+1)}{\sin^2 t}\,\theta$$

admite soluția $\theta = Q_m(\operatorname{cotg} t)$.

$Q_m(u)$ satisface ecuația diferențială

$$(1+u^2)\frac{d^2Q}{du^2} + 2u \cdot \frac{dQ}{du} - m(m+1)\,Q = 0 \tag{11}$$

și avem

$$Q_0 = 1,\ Q_1 = u,\ Q_2 = \frac{3u^2+1}{2},\ Q_3 = \frac{5u^3+3u}{2} \text{ etc.}$$

Fie acum ecuația

$$\theta'' = \left[\frac{m(m+1)}{\cos^2 t} + \lambda\right]\theta. \tag{12}$$

*) p. 215.

Dacă luăm $\lambda_1 = -(m+1)^2$, ecuația admite soluția particulară $f(t) = \cos^{m+1} t$. Prin urmare, pentru acele valori ale lui λ, pentru care știm să integrăm ecuația (12), știm să integrăm și ecuația

$$\theta'' = \left[f\left(\frac{1}{f}\right)'' + \lambda + (m+1)^2 \right] \theta$$

care, cu $f(t)$ de mai sus, devine

$$\theta'' = \left[\frac{(m+1)(m+2)}{\cos^2 t} + \lambda \right] \theta. \tag{13}$$

θ_m fiind soluția generală a ecuației (12) și θ_{m+1} soluția generală a ecuației (13), conform cu (3), avem

$$\theta_{m+1} = \frac{d\theta_m}{dt} + (m+1) \operatorname{tg} t \cdot \theta_m.$$

Însă, pentru $\lambda = 0$, putem lua

$$\theta_m = CQ_m(\operatorname{tg} t) \qquad \theta_{m+1} = C' \cdot Q_{m+1}(\operatorname{tg} t),$$

așa că există o relație de forma

$$Q_{m+1}(\operatorname{tg} t) = k\left[\frac{1}{\cos^2 t} Q'_m(\operatorname{tg} t) + (m+1) \operatorname{tg} t \cdot Q_m(\operatorname{tg} t) \right],$$

unde k este o constantă; punînd $\operatorname{tg} t = u$, avem

$$Q_{m+1}(u) = k\,[(u^2+1) Q'_m(u) + (m+1)\, u\, Q_m(u)]. \tag{14}$$

Însă se știe că între polinoamele lui Legendre P_m există relațiile de recurență

$$u P'_m - P'_{m-1} = m P_m, \tag{15}$$

$$P'_{m+1} - u P'_m = (m+1) P_m. \tag{16}$$

Din prima deducem

$$u P'_{m+1} - P'_m = (m+1) P_{m+1} \tag{17}$$

și eliminînd pe P'_{m+1} între (16) și (17), obținem

$$P_{m+1}(u) = \frac{1}{m+1}[(u^2-1) P'_m(u) + (m+1)\, u P_m(u)]. \tag{18}$$

Cum între polinoamele Q_m și polinoamele P_m ale lui Legendre avem relația

$$Q_m(u) = \frac{P_m(iu)}{i^m} \quad \text{sau} \quad P_m(u) = i^m\, Q_m(-iu),$$

(18) devine

$$Q_{m+1}(u) = \frac{1}{m+1}\left[(u^2+1) Q'_m(u) + (m+1)\, u Q_m(u) \right], \tag{19}$$

așa că în (14) trebuie să luăm $k = \frac{1}{m+1}$.

Relațiile de recurență (18) și (19) sînt deosebit de utile.
Să considerăm ecuația

$$\theta'' = \left[\frac{m(m+1)}{\cos^2 t} + \lambda\right]\theta \tag{12}$$

și fie $\theta_m = A_m e^{t\sqrt{\lambda}} + B_m e^{-t\sqrt{\lambda}}$ soluția ei, unde A_m și B_m sînt funcții de t ce trebuie determinate. Fie $\theta_{m+1} = A_{m+1} e^{t\sqrt{\lambda}} + B_{m+1} e^{-t\sqrt{\lambda}}$ soluția ecuației

$$\theta'' = \left[\frac{(m+1)(m+2)}{\cos^2 t} + \lambda\right]\theta. \tag{13}$$

Am văzut că

$$\theta_{m+1} = \frac{d\theta_m}{dt} + (m+1)\operatorname{tg} t \cdot \theta_m,$$

de unde

$$\theta_{m+1} = [A_m' + A_m\sqrt{\lambda} + (m+1)\operatorname{tg} t \cdot A_m] e^{t\sqrt{\lambda}} + [B_m' - B_m\sqrt{\lambda} + (m+1)\operatorname{tg} t B_m] e^{-t\sqrt{\lambda}},$$

așa că

$$A_{m+1} = A_m' + [(m+1)\operatorname{tg} t + \sqrt{\lambda}]\, A_m$$
$$B_{m+1} = B_m' + [(m+1)\operatorname{tg} t - \sqrt{\lambda}]\, B_m.$$

Avem

$$\theta_0 = C_1 e^{t\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-t\sqrt{\lambda}}.$$

$$\theta_1 = C_1(\operatorname{tg} t + \sqrt{\lambda})\, e^{t\sqrt{\lambda}} + C_2(\operatorname{tg} t - \sqrt{\lambda})\, e^{-t\sqrt{\lambda}}.$$

$$\theta_2 = C_1\left[\frac{1}{\cos^2 t} + (2\operatorname{tg} t + \sqrt{\lambda})(\operatorname{tg} t + \sqrt{\lambda})\right] e^{t\sqrt{\lambda}} + C_2\left[\frac{1}{\cos^2 t} + (2\operatorname{tg} t - \sqrt{\lambda})(\operatorname{tg} t - \sqrt{\lambda})\right] e^{-t\sqrt{\lambda}}.$$

sau

$$\theta_2 = C_1(3\operatorname{tg}^2 t + 3\sqrt{\lambda}\operatorname{tg} t + \lambda + 1)\, e^{t\sqrt{\lambda}} + C_2(3\operatorname{tg}^2 t - 3\sqrt{\lambda}\operatorname{tg} t + \lambda + 1)\, e^{-t\sqrt{\lambda}}$$

și așa mai departe, A_m și B_m *fiind polinoame în* $\operatorname{tg} t$.

Este de remarcat că pentru $\lambda = -1$, soluțiile θ_1, θ_2, ..., nu mai conțin două constante arbitrare; astfel avem

$$\theta_1 = \frac{C'}{\cos t}\ ; \quad \theta_2 = C''\frac{\sin t}{\cos^2 t}\ ; \quad \theta_3 = C'''\left(\frac{5}{\cos^3 t} - \frac{4}{\cos t}\right).$$

Soluția generală este dată de

$$\bar{\theta}_1 = C_1\theta_1 + C_2\theta_1\int\frac{dt}{\theta_1^2}.$$

Obținem

$$\bar{\theta}_1 = \frac{C_1}{\cos t} + C_2\left(\frac{t}{\cos t} + \sin t\right),$$

din care deducem

$$\bar{\theta}_2 = C_1\frac{\sin t}{\cos^2 t} + C_2\left(3\,t\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{3}{\cos t} - \cos t\right)$$

etc. etc.

Putem însă obține pe $\bar{\theta}_m$, *pentru* $\lambda = -1$, *direct, fără a mai recurge la formulele de recurență*, după cum arătăm mai jos.

Fie ecuația

$$\theta'' = h(t)\cdot\theta.$$

Dacă facem schimbarea de funcție $\theta' = u(t)\cdot\Phi$, găsim că Φ verifică ecuația

$$\Phi'' = \frac{h'u - 2hu'}{hu}\,\Phi' + \left(h + \frac{h'u'}{hu} - \frac{u''}{u}\right)\Phi.$$

Dacă vrem ca ecuația obținută să fie tot de forma

$$\Phi'' = h_1(t)\cdot\Phi,$$

trebuie ca $h'u - 2hu' = 0$, de unde $2\frac{u'}{u} = \frac{h'}{h}$ și deci $u = \sqrt{Ch}$, în care caz ecuația devine

$$\Phi'' = \left[h + u\left(\frac{1}{u}\right)''\right]\Phi$$

sau

$$\Phi'' = \left[h + \sqrt{h}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)''\right]\Phi, \tag{20}$$

formă folosită de G. Țițeica într-o notă publicată în „Comptes Rendus" [3].

Fie acum ecuația $\theta'' = \frac{m(m+1)}{\cos^2 t}\,\theta$ cu soluția $\theta = Q_m(\operatorname{tg} t)$.

Avem

$$h = \frac{m(m+1)}{\cos^2 t}\ ;\ \sqrt{h} = \pm\frac{\sqrt{m(m+1)}}{\cos t}\ ;\ \sqrt{h}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)'' = -1$$

şi deci ecuaţia

$$\Phi'' = \left[\frac{m(m+1)}{\cos^2 t} - 1\right]\Phi \tag{21}$$

admite soluţia particulară

$$\Phi_m = \frac{\theta'}{\sqrt{h}} = \pm\frac{Q_m'(\operatorname{tg} t)}{\sqrt{m(m+1)\cos t}}$$

sau

$$\Phi_m = C\ \frac{Q_m'(\operatorname{tg} t)}{\cos t}\ .$$

Astfel

$$\Phi_1 = \frac{C}{\cos t}\ ;\quad \Phi_2 = C'\frac{\sin t}{\cos^2 t}\ ;\quad \Phi_3 = C''\left(\frac{5}{\cos^3 t} - \frac{4}{\cos t}\right)\ \text{etc.},$$

după cum am găsit şi mai sus. *Soluţia generală* a ecuaţiei (21) va fi

$$\overline{\Phi}_m = C_1\Phi_m + C_2\Phi_m\int\frac{dt}{\Phi_m^2} = C_1'\frac{Q_m'(\operatorname{tg} t)}{\cos t} + C_2'\frac{Q_m'(\operatorname{tg} t)}{\cos t}\int\frac{\cos^2 t}{Q_m'^2(\operatorname{tg} t)}\,dt.$$

Cu aceeaşi schimbare de funcţie, $\theta' = \sqrt{h}\cdot\Phi$, am arătat [4] că soluţiile ecuaţiilor

$$\Phi'' = \left(\pm t^m + \frac{m(m+2)}{4t^2}\right)\Phi \quad \text{şi} \quad \Phi'' = (e^{2\lambda t} + \lambda^2)\,\Phi \tag{22}$$

pot fi exprimate cu ajutorul funcţiilor Bessel.

§ II

Fie ecuaţia

$$\theta'' = h(t)\cdot\theta\,; \tag{1}$$

x şi y fiind două soluţii liniar independente, cum $c_1x + c_2y$ este de asemenea soluţie, rezultă că

$$z = x + iy = r\cdot e^{i\omega}$$

satisface de asemenea ecuaţia dată.

Avem

$$z' = e^{i\omega}(r' + ir\,\omega'),$$

$$z'' = e^{i\omega}(r'' + 2ir'\,\omega' + ir\omega'' - r\omega'^2),$$

de unde

$$r'' + 2ir'\omega' + ir\omega'' - r\omega'^2 = hr$$

și deci

$$\left.\begin{aligned} r'' &= (h + \omega'^2)\, r, \\ \frac{\omega''}{\omega'} &= -2\frac{r'}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ultima ne dă $\omega' = \frac{C}{r^2}$ și deci r verifică ecuația

$$r'' = hr + \frac{C^2}{r^3} \text{ (C fiind o constantă).} \tag{3}$$

Avem

$$x'' = hx\,,\quad y'' = hy$$

și deci

$$xy' - yx' = C' = \text{const.}$$

Cînd curba

$$x = x(t),\qquad y = y(t)$$

suferă o transformare centro-afină, de modul k, atunci C' se înmulțește cu k. Pe de altă parte avem

$$\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

și deci

$$\omega' = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} = \frac{C'}{r^2},$$

așa că

$$C = C'.$$

Prin urmare, dacă știm să integrăm ecuația (1), $\theta'' = h\theta$, atunci știm să integrăm și ecuația

$$\Phi'' = h\Phi + \frac{\lambda}{\Phi^3}, \tag{3'}$$

oricare ar fi λ.

Într-adevăr, x_1 și y_1 fiind două soluții liniar independente oarecare ale ecuației (1), avem $x_1y_1' - y_1x_1' = C_1$; luăm

$$\begin{aligned} x &= ax_1 + by_1 \\ y &= a'x_1 + b'y_1 \end{aligned}$$

astfel ca

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{\lambda}}{C_1}$$

și atunci $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ va fi soluția ecuației (3').

Interpretarea mecanică a ecuației obținute (3) se face cu ușurință.

Considerăm punctul $M(x, y)$ de masă m sub acțiunea unei forțe centrale; proiecțiile forței fiind proporționale cu proiecțiile razei vectoare a punctului M, avem

$$\frac{mx''}{x} = \frac{my''}{y} = m\,h_1 \text{ (valoare comună).}$$

Avem $x'' = h_1\ x$; $y'' = h_1\ y$, aşa că x şi y sînt soluţii ale ecuaţiei

$$\theta'' = h_1\ \theta.$$

Am văzut că r verifică ecuaţia

$$r'' = h_1\ r + \frac{C^2}{r^3}; \tag{3''}$$

de unde deducem pentru forţa F

$$F = m\sqrt{x''^2 + y''^2} = m\ h_1\ r = m\left(r'' - \frac{C^2}{r^3}\right). \quad \therefore h_1 = \frac{F}{mr}.$$

Ecuaţia (3'') se poate scrie

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{F}{m} + \frac{C^2}{r^3}. \tag{4}$$

Să considerăm un punct M, *de masă* m *constantă*, sub acţiunea unei forţe centrale proporţionale cu distanţa

$$F = m\ \omega\ r,$$

unde ω reprezintă atracţia sau repulsia exercitată de punctul O asupra unităţii de masă plasată la unitatea de distanţă, după cum ω este negativ sau pozitiv.

Dacă presupunem că ω variază cu timpul după legea

$$\omega = h\,(t),$$

ecuaţia (4) se scrie

$$r'' = h\,(t)\cdot r + \frac{C^2}{r^3}, \tag{4'}$$

care ne dă mişcarea punctului pe raza vectoare; după cum am văzut aceasta revine la integrarea ecuaţiei $\theta'' = h\,(t)\cdot\theta$.

Cînd ω e constant — şi deci şi h e constant — traiectoria va fi o conică; în cazul cînd ω descreşte cu timpul după legea $\omega = \omega_0 e^{-kt} = h\,(t)$, traiectoria poate fi determinată cu ajutorul funcţiilor Bessel.

§ III

Considerăm din nou ecuaţia $\theta'' = h\,(t)\cdot\theta$ şi două soluţii liniar independente ale ei, x şi y; avem

$$x'' = hx, \qquad y'' = hy, \qquad xy' - yx' = C.$$

Fie z o funcţie omogenă de gradul n în x şi y

$$z = f\,(x,\ y) = x^n\ \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Notînd cu x', y', z' derivatele în raport cu t şi cu $\varphi'\,(u)$ derivata funcţiei $\varphi\,(u)$ în raport cu u, găsim că z verifică ecuaţia

$$z'' = \left[nh - n\,(n-1)\frac{x'^2}{x^2}\right] z + 2\ (n-1)\frac{x'}{x}\,z' + C^2\ x^{n-4}\,\varphi''\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

Putem alege însă pe φ astfel ca să avem

$$\varphi''(u) = \lambda\ \varphi^k(u), \qquad \left(u = \frac{y}{x}\right)$$

căci înmulțind cu $2\varphi'$ și integrînd, obținem

$$\varphi'^2 = \frac{2\lambda}{k+1}\varphi^{k+1} + a,$$

de unde

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2\lambda}{k+1}\varphi^{k+1} + a}} = b \pm u, \tag{3}$$

a și b fiind două constante arbitrare. Cvadratura se efectuează cu ajutorul funcțiilor elementare, cînd $k = \frac{1-m}{m}$ sau $k = \frac{1-2m}{1+2m}$, m fiind un număr întreg pozitiv sau negativ.

1°) Pentru $k = 1$ avem $\varphi'' = \lambda\varphi$, de unde

$$\varphi = Ae^{u\sqrt{\lambda}} + Be^{-u\sqrt{\lambda}}. \tag{4}$$

2°) Pentru $k = -1$ avem $\varphi'' = \frac{\lambda}{\varphi}$, de unde

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\lambda \cdot L\ \varphi^2 + a}} = b \pm u. \tag{5}$$

Cum $x^{nk}\varphi^k\left(\frac{y}{x}\right) = z^k$, ecuația (2) devine

$$z'' = \left[nh - n(n-1)\frac{x'^2}{x^2}\right]z + 2\ (n-1)\frac{x'}{x}z' + \frac{\lambda C^2}{x^{(k-1)\ n+4}}\ z^k. \tag{II}$$

Pentru $n = 0$, $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuația

$$z'' = -\frac{2x'}{x}z' + \frac{\lambda C^2}{x^4}z^k. \tag{II$_0$}$$

Pentru $n = 1$, $z = x\ \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuația

$$z'' = hz + \frac{\lambda C^2}{x^{k+3}}\ z^k. \tag{II$_1$}$$

Dacă luăm $k = -3$, cînd $\varphi = \sqrt{a(b \pm u)^2 + \frac{\lambda}{a}}$, rezultă că $z = x\sqrt{a\left(b \pm \frac{y}{x}\right)^2 + \frac{\lambda}{a}}$ este *soluția generală* a ecuației diferențiale

$$z'' = hz + \frac{\lambda C^2}{z^3}. \tag{III}$$

Cu $\lambda = 1$, $a = 1$ şi $b = 0$ dăm peste rezultatul, găsit mai sus, că $z = x\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ satisface ecuaţia

$$z'' = hz + \frac{C^2}{z^3}.$$

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ МОЖНО НАЙТИ ПРИ ПОМОЩИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\theta'' = h(t) \cdot \theta$

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Известно, что $T = \mu t + \nu$, где μ и ν постоянные, являются единственными преобразованиями переменной, при которых вид дифференциального уравнения

$$\theta'' = h(t) \cdot \theta, \tag{1}$$

являющегося каноническим видом для исследования центро-аффинных свойств плоских кривых, инвариантен. Автор рассматривает уравнения того же вида [§§(1),(2),(5),(6),(7),(8),(9),(10),(12),(13),(20),(21], не являющиеся эквивалентными ему, но решения которых можно из него вывести.

Если точка с массой m находится под влиянием центральной силы F, то движение этой точки вдоль радиуса вектора r дано уравнением

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{F}{m} + \frac{C^2}{r^3} \tag{2}$$

где C-постоянная площадей. В случае центральной силы, пропорциональной расстоянию, но зависящей от времени, интегрирование уравнения (2) сводится также к интегрированию уравнения (1). Это частный случай более общего класса уравнений [§ III,(II),(II_0),(II_1), (III], решения которых можно вывести из решений уравнения.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DONT LA SOLUTION PEUT ÊTRE TROUVÉE À L'AIDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $\theta'' = h(t) \cdot \theta$

(RÉSUMÉ)

On sait que $T = \mu t + \nu$, où μ et ν sont des constantes, sont les seules transformations de variable qui laissent invariante la forme de l'équation différentielle

$$\theta'' = h(t) \cdot \theta, \tag{1}$$

forme canonique pour l'étude des propriétés centro-affines des courbes planes. L'auteur étudie des équations de la même forme [§II),(1),((2),(5),

(6),(7),(8),(9),(10),(12),(13),(20),(21] qui ne lui sont pas équivalentes, mais dont les solutions s'en déduisent.

Étant donné un point de masse m, sollicité par une force centrale F, le mouvement du point sur le rayon vecteur r est donné par l'équation

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{F}{m} + \frac{C^2}{r^2}, \tag{2}$$

où C est la constante des aires. Dans le cas d'une force centrale, proportionnelle à la distance, mais variable avec le temps, l'intégration de l'équation (2) revient aussi à l'intégration de l'équation (1). C'est le cas particulier d'une classe plus générale d'équations [§ III, (II),(II_0),(II_1),(III] dont les solutions peuvent se déduire de celles de l'équation $\theta'' = h(t) \cdot \theta$.

BIBLIOGRAFIE

1. Arno Kahane, *Asupra proprietăților centro-afine ale curbelor în plan și spațiu.* Studii și cercetări matematice, vol. I, fasc. 1, 1950, p. 186.
2. Darboux, Comptes rendus, 1882, t. XCIV, p. 1456.
3. G. Țițeica, Comptes rendus, 1905, t. 140, p. 223.
4. Arno Kahane Revista Universității „C. I. Parhon" și a Politehnicii, București, 1955, nr. 6—7, p. 101—102.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 3—4, 1956

ALGEBRE INFINITE, COMUTATIVE, ASOCIATE LA SISTEME DE ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE *)

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

1. *Introducere. Generalităţi.* Posibilitatea de a asocia la orice ecuaţie cu derivate parţiale, liniară, omogenă, cu coeficienţi constanţi, de ordin oarecare, o algebră infinită, fapt care a făcut obiectul unui studiu mai amplu al nostru [1], ne-a îndemnat să extindem această idee la sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale, liniare, omogene, cu coeficienţi constanţi, de ordinul întîi sau de ordin superior. Algebra asociată la o ecuaţie cu derivate parţiale de tipul amintit era definită de ecuaţia caracteristică a elementelor bazei. Pentru sisteme, însă, algebra apare determinată de relaţiile de compoziţie ale elementelor bazei, fiecare element avînd o ecuaţie caracteristică a sa. Folosindu-ne de rezultatul obţinut în [2], că o algebră liniară, de ordinul $n+1$, asociativă şi comutativă, de elemente ale bazei $1, \theta_1, \ldots, \theta_n$, construită pe (R) este complet şi în mod unic determinată, dacă sînt date produsele

$$\theta_i \theta_j = a_{i,j}^k \theta_k, \quad (\theta_0 = 1), \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{α}$$

am asociat la o clasă de sisteme cu mai mult de două funcţii necunoscute o algebră infinită, asociativă şi comutativă.

În prima parte a lucrării se separă sistemele de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi, liniare şi omogene, cu coeficienţi constanţi, în clase, după algebrele care se pot asocia. Unui sistem de forma

$$a_{0i}^j \frac{\partial V^0}{\partial x^i} + a_{1,i}^j \frac{\partial V^1}{\partial x^j} = b_{k,i}^j \frac{\partial W^k}{\partial x^i}, \qquad \begin{matrix} (i = 0, 1, \ldots, n) \\ (j = 1, 2, \ldots, p) \\ (k = 1, 2, \ldots, s) \end{matrix}$$

i se asociază o algebră infinită asociativă şi comutativă de elemente ale bazei

$$\theta_i \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_s^{\alpha_s}, \quad (i = 0, 1, \ldots, r; \qquad \theta_0 = 1, \ \varphi_i^0 = 1)$$

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 18 iunie 1956.

de ordinul ∞^s, în care o funcție monogenă de variabila

$$\omega = \theta_i x^i + \varphi_j x^{r+j}, \quad (i = 0, 1, \ldots, r; \quad j = 1, 2, \ldots, s; \quad r + s = n)$$

ne dă soluții ale sistemului dacă punem

$$V^0 = \text{Real } f(\omega),$$
$$V^1 = \text{Real } [\theta_1 \quad f(\omega)],$$
$$W^k = \text{Real } [\varphi_k \quad f(\omega)].$$

Pentru sisteme de ordin superior, nu este posibil de a se ataşa algebre infinite, asociative şi comutative din cauza relațiilor (α) şi numai pentru anumite clase, date de (48) sau (48'), acest fapt este posibil.

Atît în prima parte a lucrării, cît şi în această introducere, am adoptat notația tensorială de însumare a indicilor ce se repetă într-un monom, pentru simplificare. În partea a doua şi a treia am renunțat la această notație, păstrînd notațiile folosite anterior în [1].

I. Algebre infinite, asociative şi comutative, asociate la sisteme de ecuații cu derivate parțiale, cu coeficienți constanți, liniare şi omogene

2. *Sisteme de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi liniare şi omogene la care se pot asocia algebre de ordin finit.*

Fie sistemul de n ecuații cu derivate parțiale, cu două funcții necunoscute V^0 şi V^1,

$$a_i^j \frac{\partial V^0}{\partial x^i} + b_i^j \frac{\partial V^1}{\partial x^i} = 0, \quad (i = 0, 1, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

liniar cu coeficienți constanți, de ordinul întîi şi omogen, căruia îi căutăm soluții prin intermediul funcțiilor monogene într-o algebră de ordinul $n+1$, asociativă şi comutativă. În acest scop să considerăm algebra de elemente ale bazei

$$1, \; \theta_1, \; \theta_2, \; \ldots, \; \theta_n \tag{2}$$

asociativă şi comutativă construită pe (R), cu legile de înmulțire ale elementelor bazei date de

$$\theta_1 \, \theta_i = \alpha_{1,i}^k \, \theta_k, \; (\theta_0 = 1), \; (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

care, după cum se ştie [2]*), o determină complet şi în mod unic, şi o funcție $f(\omega)$ monogenă în această algebră

$$f(\omega) = \theta_i \, U^i, \tag{4}$$
$$\omega = \theta_i x^i, \quad (i = 0, 1, \ldots, n; \quad \theta_0 = 1).$$

Să punem acum

$$V^0 = \text{Real } f(\omega) \tag{5}$$
$$V^1 = \text{Real } [\theta_1 f(\omega)]$$

şi să determinăm condițiile pe care trebuie să le îndeplinească α_{1i}^k, parametrii arbitrari, pentru ca (5) să fie soluție a lui (1).

*) p. 136.

Înlocuind pe (5) în (1) obținem

$$b_i^j\,\theta_1\,\theta_i + a_i^j\,\theta_i = 0\,;$$

dacă a_i^j nu sînt toți nuli, iar determinantul

$$D = |\,b_i^j\,|$$

este diferit de zero, atunci putem scrie

$$\theta_1\,\theta_j = \beta_{1j}^k\,\theta_k, \quad (\theta_0 = 1\,; \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{3'}$$

care determină în mod unic algebra, deci și constantele de structură α_{ij}^k din (3).

Dacă determinantul $|\,b_i^j\,|$ este nul, rangul matricei

$$\|\,b_i^j\,\|$$

este $p < n$. În această situație, $n - p$ produse $\theta_1\theta_j$ nu pot fi determinate și deci pot fi date arbitrar, fapt care introduce $(n+1)\,(n-p)$ parametri arbitrari în algebră. O funcție monogenă, în algebră, depinde în această situație atît de a_i^j și b_i^j, cît și de acești $(n+1)\,(n-p)$ parametri arbitrari.

Să observăm că nu numai sistemul (1) conduce la o algebră de ordin finit, asociativă și comutativă. Într-adevăr, sistemul

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V^1}{\partial x^1} &= a_i^1\frac{\partial V^0}{\partial x^i} + b_1\frac{\partial V^1}{\partial x^0},\\
\frac{\partial V^2}{\partial x^1} &= a_i^2\frac{\partial V^0}{\partial x^i} + b_2\frac{\partial V^2}{\partial x^0},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial V^n}{\partial x^1} &= a_i^n\frac{\partial V^0}{\partial x^i} + b_n\frac{\partial V^n}{\partial x^0},
\end{aligned} \tag{6}$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

sau sistemul care se obține din el înlocuind primii membri cu o combinație liniară cu coeficienți constanți între $\dfrac{\partial V^i}{\partial x^1}$

$$c_i^j\frac{\partial V^i}{\partial x^1} = a_i^j\frac{\partial V^0}{\partial x^i} + b_i^j\frac{\partial V^i}{\partial x^0} \qquad \begin{matrix}(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)\\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)\end{matrix} \tag{7}$$

căutînd soluții de forma

$$V^i = \text{Real}\,[\theta_i\,f(\omega)],$$

$f(\omega)$ și ω fiind date de (4), ne conduce la următoarele legături între elementele bazei (pentru sistemul (6))

$$\begin{aligned}
(\theta_1)^2 &= a_0^1 + (a_1^1 + b_1)\,\theta_1 + a_2^1\,\theta_2 + \ldots + a_n^1\,\theta_n,\\
\theta_1\theta_2 &= a_0^2 + a_1^2\,\theta_1 + (a_2^2 + b_2)\,\theta_2 + \ldots + a_n^2\,\theta_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\theta_1\,\theta_n &= a_0^n + a_1^n\,\theta_1 + \ldots + a_{n-1}^n\,\theta_{n-1} + (a_n^n + b_n)\,\theta_n,
\end{aligned} \tag{8}$$

deci, în general, tot la o algebră asociativă și comutativă de ordin finit. Vom spune că sistemele (1) și (6) sînt *algebric echivalente*, dacă legăturile (8) sînt identice cu (3′).

Procedeul pe care îl folosim aici este, evident, valabil și pentru sistemul lui Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial V^0}{\partial x} - \frac{\partial V^1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V^0}{\partial y} + \frac{\partial V^1}{\partial x} = 0. \tag{α}$$

Într-adevăr, punînd

$$V^0 = \text{Real } f(\omega), \quad V^1 = -\text{Real } [\theta f(\omega)], \quad \omega = x + \theta y,$$

din prima ecuație obținem, $f(\omega)$ fiind presupusă monogenă,

$$1 + \theta^2 = 0$$

a doua ecuație fiind identic satisfăcută.

Să remarcăm însă că, dacă în loc de $V^1 = -\text{Real } [\theta\, f(\omega)]$ am fi pus $V^1 = \text{Real } [\theta \cdot f(\omega)]$, relația a doua din ($\alpha$) ar fi dus la o imposibilitate. Acest fapt simplu ne permite să lărgim clasa sistemelor de ecuații cu derivate parțiale, cu coeficienți constanți, liniare, omogene, de ordinul întîi, cărora le putem asocia algebre de tipul considerat mai sus.

Fie, așadar, sistemul

$$b_i^j \frac{\partial V^i}{\partial x^1} = a_i^j \frac{\partial V^0}{\partial x^i} + c_i^j \frac{\partial V^i}{\partial x^0} \qquad \begin{matrix} (j = 1, 2, \ldots, p) \\ (i = 0, 1, \ldots, n) \end{matrix} \tag{9}$$

cu $p > n$, căruia să-i căutăm soluții de forma

$$V^i = \text{Real } [m^i f(\omega)] \tag{10}$$

cu $f(\omega)$ și ω date de (4), iar m^i numere hipercomplexe, deocamdată nedeterminate. Înlocuind pe (10) în (9) obținem

$$b_i^j m^i \theta_1 = a_i^j m^0 \theta_i + c_i^j m^i, \quad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Trebuie să luăm $m^0 = 1$ [2] *). Dintre aceste p relații, n determină pe $\theta_1\theta_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), rămînînd în plus $p - n$ legături între $\theta_1\theta_i$ și θ_j. Înlocuind pe $\theta_1\theta_i$ în relațiile rămase, obținem $p - n$ numere complexe, care trebuie să fie nule pentru ca (10) să verifice (9). Aceste $p - n$ relații introduc $(p - n)(n + 1)$ condiții în real. Putem dispune de numerele nedeterminate m^i ($i = 1, 2, \ldots, n$) care introduc $n(n + 1)$ parametri reali, pentru ca condițiile suplimentare să fie satisfăcute. Numărul de ecuații (9) poate fi mărit pînă la $p = 2n$, astfel ca toți m^i ($i = 1, 2, \ldots, n$) să fie în mod unic determinați. Numărul $2n$ este efectiv atins, cum se vede, chiar în cazul sistemului Cauchy-Riemann.

*) p. 136.

3. *Sisteme de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi liniare și omogene la care se pot asocia algebre de ordin infinit.*

Să considerăm acum sistemul de p ecuații cu trei funcții necunoscute V^0, V^1, W,

$$a^j_{0,i}\frac{\partial V^0}{\partial x^i}+a^j_{1,i}\frac{\partial V^1}{\partial x^i}+b^j_i\frac{\partial W}{\partial x^i}=0,\quad \begin{matrix}(j=1,\ 2,\ \ldots,\ p)\\ (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)\end{matrix} \tag{11}$$

cu $a^i_{k,j}$, b^i_j constante reale. Dacă punem

$$\omega = x^0+\theta_1 x^1+\ldots+\theta_{n-1}\,x^{n-1}+\varphi\,x^n,$$

iar $f(\omega)$ este o funcție monogenă de ω, ne propunem să găsim legăturile între elementele bazei θ_i și φ, pentru ca soluția sistemului (11) să fie dată de

$$\begin{aligned} V^0 &= \text{Real } f(\omega),\\ V^1 &= \text{Real } [\theta\ f(\omega)],\\ W &= \text{Real } [\varphi\ f(\omega)]. \end{aligned}$$

Înlocuind în (11) avem

$$a^j_{0,i}\,\theta_i+a^j_{1,i}\,\theta_1\,\theta_i+b^j_i\,\varphi\theta_i=0,\quad \begin{matrix}(i=0,\ 1,\ \ldots,n;\ \theta_0=1;\ \theta_n=\varphi)\\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ p)\end{matrix} \tag{12}$$

relații care determină pe $(\theta_1)^2$, $\theta_1\theta_2$, $\ldots$, $\theta_1\theta_n$, în funcție de θ_i, φ, $\theta_i\varphi$, în general în mod unic, dacă $p=n-1$, rămînînd însă elementul hipercomplex φ precum și toate produsele lui cu el însuși și cu celelalte elemente ale bazei, arbitrare. Prin urmare, (12) determină o algebră asociativă și comutativă de ordin infinit, cu elementele bazei

$$\theta_i\,\varphi^s\ (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;\ \theta_0=1;\ \varphi^s\ \varphi^t=\varphi^{s+t}),$$

unde s ia toate valorile întregi între $-\infty$ și $+\infty$. Raționamentul de mai sus se aplică și la sisteme cu $s+2$ funcții necunoscute

$$a^j_{0,i}\frac{\partial V^0}{\partial x^i}+a^j_{1,i}\frac{\partial V^1}{\partial x^i}=b^j_{k,i}\frac{\partial W^k}{\partial x^i},\quad \begin{matrix}(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n),\\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ p),\\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ s).\end{matrix} \tag{13}$$

Într-adevăr, să punem

$$\omega=\theta_i\,x^i+\varphi_j\,x^{r+j}\quad \begin{matrix}(i=0,\ 1,\ \ldots,\ r;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ s)\\ (r+s=n;\ \theta_0=1)\end{matrix}$$

și luînd pe $f(\omega)$ o funcție monogenă de ω, avem pe V^h și W^k date de

$$\begin{aligned} V^0 &= \text{Real } f(\omega),\\ V^1 &= \text{Real } [\theta_1 f(\omega)],\\ W^k &= \text{Real } [\varphi_k f(\omega)], \end{aligned}$$

dacă elementele hipercomplexe θ_i și φ_k sînt legate de relațiile

$$a^j_{0,i}\,\theta_i + a^j_{1,i}\,\theta_1\,\theta_i = b^j_{k,i}\,\varphi_k\,\theta_i\,, \quad \begin{matrix}(i = 0, 1, \ldots, n)\\ (j = 1, 2, \ldots, p)\\ (k = 1, 2, \ldots, s)\end{matrix} \tag{14}$$

cu

$$\theta_{r+j} = \varphi_j, \quad \theta_0 = 1.$$

Pentru $p = r = n - s$, sistemul (14) determină pe $\theta_1\,\theta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, rămînînd arbitrare produsele $\theta_i\,\varphi_k$, $(\varphi_k)^2$, în consecință algebra atașată sistemului (13) este o algebră infinită, asociativă și comutativă de ∞^s elemente ale bazei,

$$\theta_i\,\varphi_1^{\alpha_1}\,\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_s^{\alpha_s}\,, \quad (i = 0, 1, \ldots, r;\ \varphi_i^{\alpha}\,\varphi_i^{\beta} = \varphi_i^{\alpha+\beta}),$$

unde α_i pot lua toate valorile întregi între $-\infty$ și $+\infty$.

Din modul cum este construită algebra atașată sistemului (13) se pare că s trebuie să fie mai mic decît n. Vom înlătura această restricție în modul următor. Să presupunem că numărul funcțiilor necunoscute este mai mare decît $n + 2$, adică $s > n$. În această situație folosind, elementele bazei

$$1,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_p,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_s,$$

vom pune

$$\omega = x^0 + \theta_1 x^1 + \ldots + \theta_p\,x^p + \varphi_1 x^{p+1} + \ldots + \varphi_{n-p}\,x^n\,,$$

deci variabila ω avînd formă *redusă* în algebră. Notînd și de astă dată cu

$$V^0 = \text{Real}\ f(\omega),$$
$$V^1 = \text{Real}\ [\theta_1 f(\omega)],$$
$$W_k = \text{Real}\ [\varphi_k f(\omega)], \quad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

sîntem conduși la legăturile

$$a^j_{0,i}\,\theta_i + a^j_{1,i}\,\theta_1\,\theta_i = b^j_{k,i}\,\varphi_k\,\theta_i\,, \quad \begin{matrix}(i = 0, 1, \ldots, n)\\ (j = 1, 2, \ldots, p)\\ (k = 1, 2, \ldots, s)\end{matrix} \tag{15}$$

$$\theta_{p+h} = \varphi_h,$$
$$\theta_0 = 1.$$

Produsele $(\theta_1)^2$, $\theta_1\theta_2$, $\ldots$, $\theta_1\theta_p$ sînt în general determinate de relațiile de mai sus în mod unic, rămînînd însă arbitrare produsele $\theta_i\varphi_k$, $\varphi_i\varphi_k$, deci algebra asociată, asociativă și comutativă are elementele bazei

$$\theta_i\,\varphi_1^{\alpha_1}\,\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_s^{\alpha_s}\,, \ (i = 1, 2, \ldots, p), \ (\varphi_i^{\alpha}\,\varphi_i^{\beta} = \varphi_i^{\alpha+\beta})$$

și, prin urmare, este de ordinul ∞^s.

Putem afirma deci că numărul p al ecuațiilor sistemului (β), nu este supus decît la restricția $p \leqslant n$. Folosind însă un raționament identic ca la aliniatul precedent, acest număr poate fi mărit.

Să remarcăm că și în această situație sisteme diferite pot conduce la aceeași algebră. Într-adevăr, sistemul

$$\frac{\partial V^i}{\partial x^1} = c^i_{k,j}\frac{\partial W^k}{\partial x^j} + e^i_j\frac{\partial V^0}{\partial x^j} + g^i_j\frac{\partial V}{\partial x^0}, \quad \begin{matrix}(j = 0, 1, \ldots, n)\\ (i = 1, 2, \ldots, p)\end{matrix} \tag{16}$$

cu notațiile precedente pentru ω și cu aceleași elemente hipercomplexe inițiale, punînd în plus

$$V^i = \text{Real } [\theta_i f(\omega)], \quad (i = 0, 1, \ldots, p),$$

ne conduce la o algebră infinită cu ∞^s elemente ale bazei, în care produsele $\theta_1\theta_i$ apar explicit. Este evident că numerele reale $c^i_{k,j}$, e^i_j și g^i_j pot fi alese astfel încît algebra obținută să fie echivalentă cu algebra definită de (15). Vom spune că sistemele sînt algebric echivalente deși sînt deosebite, deoarece sistemul (13) are $s + 2$ funcții necunoscute, iar sistemul (16) are $s + p + 1$ funcții necunoscute.

4. *Proprietăți ale algebrelor infininte asociate.* Ne propunem să studiem mai amănunțit algebrele asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale, liniare, omogene, cu coeficienți constanți, de ordinul întîi. Fie așadar sistemul

$$\frac{\partial V^1}{\partial x^i} = a^i_{1,j}\frac{\partial V^0}{\partial x^j} + b^i_{1,j}\frac{\partial W}{\partial x^j} + c^i_1\frac{\partial V^1}{\partial x^0} + e^i_1\frac{\partial V^1}{\partial x^n}, \quad \begin{matrix}(j = 0, 1, \ldots, n)\\ (i = 1, 2, \ldots, n-1)\end{matrix} \tag{17}$$

explicitat în raport cu $\dfrac{\partial V^1}{\partial x^i}$, punînd

$$\omega = x^i\,\theta_i + \varphi x^n, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1; \quad \theta_0 = 1)$$

și

$$\begin{aligned} V^0 &= \text{Real } f(\omega),\\ V^1 &= \text{Real } [\theta_1 f(\omega)];\\ W &= \text{Real } [\varphi f(\omega)], \end{aligned}$$

$f(\omega)$ fiind monogenă, sîntem conduși la legăturile

$$\theta_1\,\theta_i = a^i_{1,j}\,\theta_j + b^i_{1,j}\,\varphi\theta_j + c^i_1\,\theta_1 + e^i_1\,\theta_1\,\varphi, \quad \begin{matrix}(i = 1, 2, \ldots, n-1)\\ (\theta_n = \varphi)\\ (j = 0, 1, \ldots, n).\end{matrix} \tag{18}$$

Conform celor spuse, relațiile (18) determină o algebră A liniară, infinită, asociativă și comutativă, de elemente ale bazei

$$\theta_i\varphi^\alpha, \quad (\varphi^\alpha\,\varphi^\beta = \varphi^{\alpha+\beta}),$$

α luînd toate valorile întregi între $-\infty$ și $+\infty$.

Să observăm însă că în determinarea produselor $\theta_i\,\theta_j$ se ivește o dificultate.

Într-adevăr, dacă în (18) înmulțim pe $\theta_1\theta_i$ cu θ_j și pe $\theta_1\theta_j$ cu θ_i și egalăm (algebra fiind asociativă și comutativă) obținem $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, relații care determină produsele $\theta_i\theta_j$ în funcție de θ_k

$$\theta_i\theta_j = a^k_{i,j}\,\theta_k,$$

însă cu a^k_{ij} funcții *raționale* în φ^α (α luînd valori întregi finite).

Prin urmare, $a^k_{i,j}$ sînt numere raționale în algebra B_1. Cum determinarea unui invers în B_1 este dificilă, anumite probleme ce vor interveni sînt condiționate de această operație încît rezolvarea lor practică nu este imediată. Pentru a înlătura această dificultate trebuie ca în (17) coeficienții să îndeplinească condițiile

$$b^i_{1,j} = 0, \qquad (j \neq 0,\ 1,\ n)$$

deoarece în această situație $a^k_{i,j}$ sînt polinoame în φ^α și determinarea inversului în algebra B_1 este înlăturată. Menționăm că o parte din raționamentele ce urmează sînt valabile pentru sistemul (17) fără nici o rezervă, însă altele nu sînt valabile decît pentru sistemul (17) modificat

$$\frac{\partial V^1}{\partial x^i} = a^i_{1,j}\frac{\partial V^0}{\partial x^j} + b^i_{1,j}\frac{\partial W}{\partial x^j} + c^i_1\frac{\partial V^1}{\partial x^0} + e^i_1\frac{\partial V^1}{\partial x^n},\ b^i_{1,j} = 0.\ (j \neq 0,\ 1,\ n) \qquad (17')$$

În cele ce urmează vom preciza de fiecare dată în ce situație rezultatele sînt valabile, iar cînd această precizare nu este făcută, ne situăm totdeauna în cazul (17).

Punînd acum în evidență în (18) pe $\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_{n-1}$, putem scrie

$$\begin{aligned}
&(a^i_{1,1} + c^i_1 + b^i_{1,1}\varphi + e^i_1\varphi)\,\theta_1 + (a^i_{1,2} + b^i_{1,2}\varphi)\,\theta_2 + \ldots \\
&\ldots + (a^i_{1,i-1} + b^i_{1,i-1}\varphi)\,\theta_{i-1} + (a^i_{1,i} + b^i_{1,i}\varphi - \theta_1)\,\theta_i + \\
&+ (a^i_{1,i+1} + b^i_{1,i+1}\varphi)\,\theta_{i+1} + \ldots + (a^i_{1,n-1} + \varphi b^i_{1,n-1})\,\theta_{n-1} + \\
&+ a^i_{1,0} + b^i_{1,0}\varphi + b^i_{1,n}\varphi^2 = 0, \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).
\end{aligned}$$

Completînd aceste relații cu identitatea $\theta_1 = \theta_1$, găsim ecuația caracteristică a lui θ_1

$$\begin{vmatrix}
-\theta_1 & 1 & 0 \\
a^1_{1,0} + b^1_{1,0}\varphi + b^1_{1,n}\varphi^2 & a^1_{1,1} + c^1_1 + (b^1_{11} + e^1_1)\varphi - \theta_1 & \ldots\ a^1_{1,n-1} + b^1_{1,n-1}\varphi \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
a^{n-1}_{1,0} + b^{n-1}_{1,0}\varphi + b^{n-1}_{1,n}\varphi^2 & a^{n-1}_{1,1} + (b^{n-1}_{1,1} + e^{n-1}_1)\varphi + c^{n-1}_1 & \ldots\ a^{n-1}_{1,n-1} + b^{n-1}_{1,n-1}\varphi - \theta_1
\end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

sau

$$\theta_1^n + \lambda_{1,1}\theta_1^{n-1} + \ldots + \lambda_{1,n-1}\theta_1 + \lambda_{1,n} = 0 \qquad (20)$$

cu λ_i polinoame de grad i în φ. Relațiile (18) determină în mod unic produsele $\theta_i\theta_j$ ($i,\ j \neq 1$) în ipoteza că algebra este asociativă și comutativă.

Urmează că putem scrie $\theta_i\theta_j = a_{ij}^k\theta_k$ cu a_{ij}^k funcții raționale în φ, iar ecuațiile caracteristice ale elementelor θ_k se obțin în mod analog

$$\lambda_{k,0}\,\theta_k^n + \lambda_{k,1}\,\theta_k^{n-1} + \ldots + \lambda_{k,n-1}\,\theta_k + \lambda_{k,n} = 0, \qquad (20')$$

unde $\lambda_{k,0}$ este în (R) pentru sistemul (17′); pentru sistemul (17) $\lambda_{k,0}$ este un polinom în φ. Să observăm însă că în cazul (17)

$$\lambda_{2,0} = \lambda_{3,0} = \ldots = \lambda_{n-1,0} = \lambda_0,$$

deoarece λ_0 este determinantul sistemului care determină pe $\theta_i\,\theta_j$.

Dacă în ecuația (19) dăm lui φ o valoare oarecare, *reală*, atunci, în ipoteza că toți coeficienții ce intervin în (17) sînt reali, ecuația (20) are coeficienți reali și, considerată ca o ecuație în θ_1, va avea n rădăcini reale sau complexe. Același raționament este valabil și pentru celelalte ecuații caracteristice ale elementelor θ_k. Dacă notăm aceste rădăcini cu

$$\mu_{k,0}\,\mu_{k,1},\ \mu_{k,2},\ \ldots,\ \mu_{k,n-1}, \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

ele pot fi puse în corespondență, în legătură cu indicele k, deoarece legăturile (18) realizează această corespondență. Mai mult încă, fiind dat $\varphi = h$ (real), la o rădăcină $\mu_{1,1}$ a lui (19) corespund $\mu_{k,1}$ $(k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1)$ care sînt rădăcinile celorlalte ecuații caracteristice și care, dacă $\mu_{1,1}$ este reală, vor fi de asemenea reale, în baza lui (19), sau dacă $\mu_{1,1}$ este imaginară (deci există și conjugata ei $\bar{\mu}_{1,1}$), atunci rădăcinile corespunzătoare vor fi sau imaginar conjugate sau reale, însă duble. În sfîrșit, dacă $\mu_{1,1}$ este multiplă de ordin oarecare și $\mu_{k,1}$ vor fi multiple, cel puțin de același ordin.

O subalgebră în algebra A este algebra infinită ciclică elementară [1] B_1, de elemente ale bazei

$$\varphi^p, \qquad (p = \ldots -n,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ldots)$$

cu legile de înmulțire

$$\varphi^n\,\varphi^m = \varphi^{n+m},$$

echivalentă cu algebra de matrice infinite

$$1 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

$$\varphi = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

$$\varphi^n = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\| \qquad (21)$$

$$\varphi^{-n} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix} \tag{22}$$

unde 1 din prima linie a lui φ^n se găsește pe coloana $n + 1$, iar 1 din prima coloană a lui φ^{-n} se găsește pe linia $n + 1$.

Un număr din algebră are o infinitate de componente

$$\omega = \theta_i X^i, \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1; \quad \theta_0 = 1),$$
$$X^i = x^i_\alpha \varphi^\alpha, \tag{23}$$

α luînd toate valorile întregi între $-\infty$ și $+\infty$.

Produsul a două numere din algebră are sens, dacă seriile u^i_j cu termenul general

$$u^i_n = x^i_n$$

sînt absolut convergente.

Într-adevăr, considerînd produsul a două numere din algebră

$$\omega = \theta_i X^i,$$
$$\tau = \theta_i Y^i,$$

datorită legăturilor (18) vom avea

$$\omega\tau = \tau\omega = \theta_i Z^i, \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

o componentă oarecare Z^k obținîndu-se din suma

$$\gamma_{ij} X^i X^j$$

cu X^i în algebra B_1, dați de (23), însă cu γ_{ij}, raționali în B_1, dacă sîntem în cazul (17) și polinoame în B_1 dacă sîntem în cazul (17′). Prin urmare, în cazul (17′) o condiție suficientă ca produsul a două numere din algebră să fie închis este ca seriile cu termenul general $u^i_n = |x^i_n|$ să fie convergente, adică u^i să aparțină spațiului (l) [1] *). Dacă toți X^i $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ aparțin lui (l), vom spune că $\omega \in (l)$. În această situație componentele noului număr $\omega\ \tau$ pot fi obținute prin simplă înmulțire.

În cazul algebrei definită de (17), observațiile se mențin, însă din cele de mai sus obținem produsul

$$\lambda_0 \omega\ \tau$$

și acest produs rămîne in algebră dacă $\omega \in (l)$, $\tau \in (l)$, deoarece λ_0 este un polinom în φ, însă componentele lui $\omega\ \tau$ nu pot fi separate.

*) p. 570.

5. *Norme. Subnorme.* Dacă τ este un număr în subalgebra B_1,

$$\tau = y_n \varphi^n, \qquad (\varphi^m \cdot \varphi^n = \varphi^{m+n})$$

iar ε este o rădăcină de un ordin oarecare a unității, vom numi subnormă N_ε a lui τ numărul complex

$$N_\varepsilon(\tau) = y_n \varepsilon^n$$

și avem evident

$$|N_\varepsilon(\tau)| = |y_n| \, |\varepsilon^n| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y_n| < \infty, \qquad (\beta)$$

dacă $\tau \in (l)$. Se vede imediat că N_ε este o reprezentare a lui B_1 pe algebra numerelor complexe C deoarece avem

$$N_\varepsilon(\tau_1 \tau_2) = N_\varepsilon(\tau_1) \, N_\varepsilon(\tau_2) \qquad (\alpha)$$

τ_1 și τ_2 fiind în B_1.

Să revenim acum la algebra A. Dacă înlocuim pe φ cu ε în ecuația (19), atunci ecuația în θ_1 va avea n rădăcini

$$\mu_{1,0}, \ \mu_{1,1}, \ \ldots, \ \mu_{1,n-1},$$

iar ecuațiile caracteristice ale lui θ_k ($k = 2, 3, \ldots, n-1$) deduse din (19), după cum s-a spus, vor avea rădăcinile

$$\mu_{k,0}, \ \mu_{k,1}, \ \ldots, \ \mu_{k,n-1}$$

puse în corespondență prin al doilea șir de indici. Fie acum ω un număr din algebră

$$\omega = X^i \theta_i, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$X^i = x_p^i \varphi^p, \qquad (X^i \in B_1).$$

Dacă notăm cu

$$X_\varepsilon^i = x_p^i \varepsilon^p$$

vom numi o subnormă a lui ω în A numărul real sau complex

$$N_\varepsilon(\omega) = \prod_{k=0}^{n-1} (\mu_{i,k} X_\varepsilon^i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \qquad (24)$$

și putem arăta că dacă $\omega \in (l)$ avem proprietățile

$$N_\varepsilon(\omega_1 \omega_2) = N_\varepsilon(\omega_1) N_\varepsilon(\omega_2), \qquad (\alpha')$$

$$|N_\varepsilon(\omega)| < \infty. \qquad (\beta')$$

Să observăm, pentru aceasta, că dacă τ_i sînt numere în algebra B_1 care aparțin lui (l) avem

$$\begin{aligned} &\tau_1 + \tau_2 = \tau_2 + \tau_1, \\ &\tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_1, \\ &\tau_1(\tau_2 + \tau_3) = \tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3, \end{aligned} \qquad (\gamma)$$

Dacă ω este acum în algebra A, unde $X_i \in (l)$ sînt în B_1, putem considera algebra A construită pe B_1, deci, în virtutea relațiilor (γ), putem asocia unui număr ω norma sa dată de un determinant [2] *) a cărui valoare este dată de (24), unde se înlocuiește X_ε^i cu X^i. Norma astfel construită este însă o reprezentare a lui A pe B_1. Dacă în această normă se înlocuiește X^i cu X_ε^i și se ține seama de proprietatea (α) în B_1, rezultă imediat proprietatea (α').

Proprietatea (β') este o consecință a proprietății (β) din algebra B_1.

Folosind elementele de mai sus, vom numi modul al numărului ω, numărul

$$\mathfrak{M}(\omega) = \lim_{m \to \infty} \left[\prod_{p=1}^{m} N_{\varepsilon_p}(\omega) \right]^{\frac{1}{m}},$$

unde ε_p este o rădăcină oarecare a unității, prin operația de limită înțelegîndu-se că ε_p parcurge șirul tuturor rădăcinilor unității, distincte, de ordin oarecare $(1, 2, \ldots, m, \ldots)$, o singură dată.

Modulul unui număr ω, care aparține lui (l), este evident convergent și este de asemenea o reprezentare a lui A pe (C), deoarece avem

$$\mathfrak{M}(\omega_1 \ \omega_2) = \mathfrak{M}(\omega_1)\ \mathfrak{M}(\omega_2)$$

adică se bucură de proprietățile (α') și (β').

6. *Serii de puteri.* Ne propunem mai întîi să găsim o majorantă a seriei modulelor termenilor produsului $a\ \omega$, unde

$$a = A^i \theta_i, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\ \theta_0 = 1)$$

$$A^i = a_\alpha^i \varphi^\alpha, \qquad (A^i \in B_1)$$

$$\omega = X^i \theta_i,$$

$$X^i = x_\alpha^i \varphi^\alpha, \qquad (X^i \in B_1)$$

situîndu-ne în algebra A derivată din sistemul (17').

Cu notațiile

$$|A^i| = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} |a_\alpha^i|$$

$$|X^i| = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} |x_\alpha^i|$$

și

$$|\theta_i \theta_j| = \gamma_{ij},$$

unde γ_{ij} este suma modulelor coeficienților produsului $\theta_i\ \theta_j$, care sînt unic determinați de (18) și sînt exprimați prin combinații finite între $a_{1,k}^i$, $b_{1,k}^i$ c_1^i, e_1^i, deci mărginit

$$|\omega\ a| \leqslant \gamma_{ki} |X^i| \cdot |A^k|$$

și

$$|\omega \cdot \omega| \leqslant \gamma_{ki} |X^i| \cdot |X^k|, \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

*) p. 138.

deci

$$| \omega^2 | \leqslant \left[\sum_{k=0}^{n-1} | X^k | \right]^2 \gamma,$$

unde γ este o majorantă a numerelor pozitive γ_{ij} și care nu sînt toate nule. Avem deci

$$\begin{aligned} | \omega^p | &\leqslant \left[\sum_{k=0}^{n-1} | X^k | \right]^p \gamma^{p-1}, \\ | a \cdot \omega | &\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} | A^k | \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} | X^k | \right) \cdot \gamma. \end{aligned} \tag{25}$$

Fie acum seria de puteri

$$S(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \omega^p \tag{26}$$

cu a_p și ω în algebră. O majorantă a seriei modulelor termenului general, conform notațiilor de mai sus, este dată de

$$| u_p | \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} | A_p^k | \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} | X^k | \right)^p \gamma^{p-1},$$

deci pentru numerele ω, pentru care este îndeplinită inegalitatea

$$\sum_{k=0}^{n-1} | X^k | < \lim_{p \to \infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\gamma \sum_{k=0}^{n-1} | A_p^k |}}, \tag{27}$$

seria (26) este absolut convergentă, înțelegîndu-se prin aceasta că seria reală a modulelor tuturor termenilor lui $S(\omega)$ este convergentă.

Putem, prin urmare, vorbi de un domeniu de convergență al seriei respective, care să conțină mai mult decît punctul $\omega = 0$.

De aici se deduce că seria care reprezintă exponențiala

$$S(\omega) = \exp(\omega)$$

este convergentă în tot planul, dacă $\omega \in (l)$.

Relația (27) ne dă o majorantă a lui $\sum_{k=0}^{n-1} | X^k |$. Dacă am căuta însă o majorantă M a lui $| X^k |$, aceasta este dată de

$$M \leqslant \lim_{p \to \infty} \frac{1}{n \sqrt[p]{\gamma \sum_{k=0}^{n-1} | A_p^k |}}. \tag{28}$$

Dacă însă renunțăm la majoranta γ, o soluție mai potrivită este

$$M^* \leqslant \lim_{p \to \infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\sum_{k=0}^{n-1} | A^k | [1 + \gamma_{k,1} + \gamma_{k,2} + \cdots + \gamma_{k,n-1}]^{p-1}}}, \tag{28'}$$

care îmbunătățește rezultatul (28).

În cele de mai sus am considerat cazul cînd ω are o infinitate de componente. Cum noi punem aceste algebre în slujba unor sisteme de ecuații cu derivate parțiale, cu un număr finit de variabile independente, să cercetăm și cazul cînd ω are forma redusă

$$\omega = \theta_i x^i + \varphi x^n, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \theta_0 = 1).$$

Să considerăm în spațiul variabilei ω dreapta

$$\frac{x^0}{\beta^0} = \frac{x^1}{\beta^1} = \ldots = \frac{x^n}{\beta^n} \qquad (\beta^i > 0) ;$$

cu notațiile de mai sus pentru a_n, o majorantă a sumei modulelor termenilor ce intervin în termenul general al seriei

$$a_s \omega^s$$

este dată de

$$u_s = \left[\left(1 + \frac{\beta^n}{\beta^0}\right)\sum_{k=0}^{n-1} |A^k| + \frac{\beta^i}{\beta^0} |A^j| \gamma_{ij}\right] |x^0|^s = D |x^0|^s, \quad (i,j = 1,2,\ldots,n-1).$$

Prin urmare, pentru x^i care verifică inegalitățile

$$|x^i| < \lim_{s \to \infty} D^{-\frac{1}{s}}$$

suma seriei (26), $S(\omega)$, aparține lui (l).

7. *Inversul unui număr din algebră.* Operația $\frac{1}{\omega}$ definește o clasă de funcții X^i_α

$$\frac{1}{\omega} = X^i \theta_i,$$

$$X^i = X^i_\alpha \varphi^\alpha,$$

care verifică relațiile deduse din

$$1 = \omega \ (X^i \theta_i).$$

Pentru a duce calculele pînă la capăt vom considera algebra (18), definită de

$$\begin{aligned} \theta_1^2 &= a_1 + \varphi b_1 + \varphi^2 c_1 + \theta_2 \\ \theta_1 \theta_2 &= a_2 + \varphi b_2 + \varphi^2 c_2, \end{aligned} \tag{29}$$

asociată sistemului de ecuații cu derivate parțiale

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^1}{\partial x^1} &= a_1 \frac{\partial V^0}{\partial x^0} + b_1 \frac{\partial W}{\partial x^0} + c_1 \frac{\partial W}{\partial x^3} + \frac{\partial V^0}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial V^1}{\partial x^2} &= a_2 \frac{\partial V^0}{\partial x^0} + b_2 \frac{\partial W}{\partial x^0} + c_2 \frac{\partial W}{\partial x^3}, \end{aligned} \tag{30}$$

sau oricărui sistem *algebric echivalent* cu el și de tipul (17′).

Din (29) avem

$$\theta_2^2 = \theta_1 (a_2 + \varphi b_2 + \varphi^2 c_2) - \theta_2 (a_1 + \varphi b_1 + \varphi^2 c_1); \tag{31}$$

ținînd seama de (29) și (31), legăturile între componentele X_α^0, X_α^1 și X_α^2 sînt date de

$$x^0X^0 + x^1X^1 (a_1 + \varphi b_1 + \varphi^2 c_1) + (x^1X^2 + x^2X^1)(a_2 + \varphi b_2 + \varphi^2 c_2) + \\ + \varphi x^3X^0 = 1,$$

$$x^0X^1 + x^1X^0 + (a_2 + \varphi b_2 + \varphi^2 c_2) x^2X^2 + \varphi x^3X^1 = 0,$$

$$x^0X^2 + x^2X^0 + x^1X^1 - x^2X^2 (a_2 + \varphi b_2 + \varphi^2 c_2) + \varphi X^2 x^3 = 0,$$

sau de sistemul infinit

$$x^0X_\alpha^0 + x^1 (a_1X_\alpha^1 + b_1X_{\alpha-1}^1 + c_1X_{\alpha-2}^1) + x^1 (a_2X_\alpha^2 + b_2X_{\alpha-1}^2 + c_2X_{\alpha-2}^2) + \\ + x^2 (a_2X_\alpha^1 + b_2X_{\alpha-1}^1 + c_2X_{\alpha-2}^1) + x^3X_{\alpha-1}^0 = \begin{cases} 1, & \alpha = 0, \\ 0, & \alpha \neq 0, \end{cases} \tag{32}$$

$$x^0X_\alpha^1 + x^1X_\alpha^0 + x^2 (a_2X_\alpha^2 + b_2X_{\alpha-1}^2 + c_2X_{\alpha-2}^2) + x^3X_{\alpha-1}^1 = 0,$$

$$x^0X_\alpha^2 + x^2X_\alpha^0 + x^1X_\alpha^1 - x^2 (a_2X_\alpha^2 + b_2X_{\alpha-1}^2 + c_2X_{\alpha-2}^2) + x^3X_{\alpha-1}^2 = 0.$$

Dacă α ia numai valori nenegative, atunci legăturile sînt date de sistemul

$$x^0X_0^0 + a_1x^1X_0^1 + a_2x^2X_0^2 + a_2x^2X_0^1 = 1,$$

$$x^0X_0^1 + x^1X_0^0 + a_2x^2X_0^2 = 0,$$

$$x^0X_0^2 + x^2X_0^0 + x^1X_0^1 - a_2x^2X_1^2 = 0,$$

. . . . . .

care poate fi rezolvat din aproape în aproape. Într-adevăr, din cele trei ecuații scrise mai sus se obțin imediat componentele X_0^i. În următoarele trei ecuații care se obțin făcînd în (32) $\alpha = 1$, intervin numai X_0^i și X_1^i, deci pot fi determinate și componentele X_1^i.

Raționamentul precedent este valabil pentru algebra generală definită de (18). Într-adevăr, presupunînd și de astă dată că $\alpha \geqslant 0$, pentru $\alpha = 0$, prin identificare, obținem n *ecuații*, neomogene, cu necunoscutele X_0^i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) și prin urmare X_0^i sînt determinați în mod unic. Făcînd apoi $\alpha = 1$, se obțin n ecuații în care intervin X_0^i și X_1^i, deci X_1^i pot fi de asemenea determinați, în general, în mod unic. Pentru $\alpha \leqslant 0$, relațiile (32) determină inversul lui ω, $\frac{1}{\omega}$, în mod unic. Nu putem afirma însă că $\frac{1}{\omega}$ astfel determinat aparține lui (l). De fapt cele două soluții pentru $\alpha \leqslant 0$ și $\alpha \geqslant 0$ nici nu pot aparține simultan lui (l) deoarece, după cum se știe, în algebră, inversul este unic și cele două soluții ar trebui să coincidă, ceea ce este imposibil. Deci, dacă într-o regiune D_i a spațiului

ω o soluție a sistemului (32) determină un invers Ω_i al lui ω, atunci Ω_i aparține lui (l). În sfîrșit, pe frontierele comune a două domenii D_i, D_j, în care Ω_i, Ω_j sînt inversii lui ω în domeniile respective, trebuie să coincidă deci pot fi considerați unul prelungirea celuilalt.

Am arătat [2]*), [3] că într-o algebră finită, definită de (3), un număr din algebră poate fi scris sub forma exponențială

$$\omega = \overline{N^{n+1}}(\omega)\exp(\theta_1\psi_1 + \ldots + \theta_n\psi_n),$$

dacă urmele ecuațiilor caracteristice ale elementelor bazei θ_i sînt toate nule și unde $N(\omega)$ este norma lui ω. Dacă urmele ecuațiilor caracteristice nu sînt nule, atunci ω se poate scrie

$$\omega = \overline{N^{n+1}}(\omega)\exp\left[-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_{ki}\psi_k + \sum_{k=1}^{n}\theta_k\psi_k\right],$$

unde μ_{ki} sînt rădăcinile ecuațiilor caracteristice ale lui θ_k.

Ne propunem să stabilim cîteva proprietăți ale funcției exp ω pentru a vedea în ce condiții putem extinde rezultatul de mai sus la algebrele infinite pe care le cercetăm.

Să presupunem că $\omega \notin (l)$ și are toate componentele pozitive

$$\omega = X^i\,\theta_i$$

cu

$$X^i = x^i_\alpha\,\varphi^\alpha \qquad x^i_\alpha \geqslant 0;$$

în această situație exp (ω) nu aparține lui (l). Într-adevăr, nu avem decît să ne situăm în subalgebra B_1 și avem

$$|\exp(\omega)| = \exp|\omega|.$$

Întrucît $|\omega|$ este infinit, rezultă afirmația făcută. Dacă ω are un număr finit de componente negative se obține un rezultat analog.

Să presupunem acum că ω are un număr infinit de componente negative și un număr infinit de componente pozitive, amîndouă șirurile considerate în parte neaparținînd spațiului (l).

În acest caz ω fiind tot în B_1, se scrie

$$\omega = \omega_1 - \omega_2$$

deci

$$\exp\omega = \frac{\exp\omega_1}{\exp\omega_2}.$$

Considerînd o subnormă N_ε pentru o rădăcină ε oarecare a unității, avem

$$|\exp\omega| \geqslant |N_\varepsilon(\omega)| = \left|\frac{N_\varepsilon(\exp\omega_1)}{N_\varepsilon(\exp\omega_2)}\right|,$$

*) p. 142.

însă $N_\varepsilon(\exp \omega_i)$ prin ipoteză este divergentă deoarece seriile reale parțiale sînt divergente, prin urmare numărul

$$\exp(\omega)$$

aparține cu certitudine lui (l) numai dacă $\omega \varepsilon (l)$. Deci în general egalitatea

$$\Omega = \exp(\omega)$$

cu

$$\Omega \in (l)$$

implică

$$\omega \in (l).$$

Să observăm că, dacă $\Omega = \exp(\omega)$, cu $\omega \in (l)$, atunci $\exp(-\omega)$ reprezintă inversul lui Ω în algebră. Deci, pentru un număr Ω din algebră, determinarea lui ω, astfel ca

$$\begin{aligned} &\Omega = N \exp(\omega), \\ &\omega \in (l), \qquad (\alpha) \\ &N \in (C), \ |N| < \infty, \end{aligned}$$

este echivalentă cu determinarea inversului lui Ω în regiunea în care condițiile (α) sînt îndeplinite. Însă, prin trecerea la invers, se pierd toate clasele de funcții determinate de $\frac{1}{\Omega}$. Subalgebra exponențialelor $\exp(\omega)$ cu $\omega \in (l)$, formează un inel K, deoarece

$$\exp(\omega_1 + \omega_2) = \exp(\omega_1) \exp(\omega_2) \in K$$

$$\exp(\omega_1 \ \omega_2) \in (K),$$

dacă $\omega_1, \omega_2 \in (l)$. Numerele $\exp(\omega)$ cu $\omega \in (l)$ determină în A ceea ce Ernest Snapper [4] numește algebra exponențialelor liniare.

8. *Funcții monogene în algebră.* În algebră o funcție de variabila ω

$$\omega = x^i \theta_i + \varphi x^n, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

are o infinitate de componente

$$f(\omega) = X^i \theta_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \qquad (33)$$

cu

$$X^k = X^k_\alpha \varphi^\alpha, \quad X^k_\alpha = X^k_\alpha (x^0, x^1, \ldots, x^n).$$

În cele ce urmează vom presupune componentele $X^{(k)}_\alpha$ că admit derivate parțiale într-o regiune (Δ) a spațiului cu $n+1$ dimensiuni $x^0, x^1, \ldots, x^n$. Vom presupune deci că $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ au componentele mărginite în (Δ), adică $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ aparțin spațiului (m) și nu lui (l). În această situație $f(\omega)$ este monogenă într-un punct $M \in (\Delta)$, dacă în M diferențiala exterioară a formei exterioare $f(\omega)\, d\omega$ este nulă, adică

$$d[f(\omega)\, d\omega] = 0. \qquad (34)$$

Dacă ne situăm tot în algebra definită de (31) putem scrie

$$[dX^0 + \theta_1 dX^1 + \theta_2 dX^2][dx^0 + \theta_1 dx^1 + \theta_2 dx^2 + \varphi dx^3] = 0$$

sau

$$dX^0 dx^0 + (a_1 + b_1\varphi + c_1\varphi^2) dX^1 dx^1 + (a_2 + \varphi b_2 + \varphi^2 c_2)(dX^1 dx^2 + dX^2 dx^1) + \varphi d X^0 dx^3 = 0,$$

$$dX^1 dx^0 + dX^0 dx^1 + (a_2 + \varphi b_2 + \varphi^2 c_2) dX^2 dx^2 + \varphi dX^1 dx^3 = 0, \quad (35)$$

$$dX^2 dx^0 + dX^0 dx^2 + dX^1 dx^1 - (a_2 + \varphi b_2 + \varphi^2 c_2) dX^2 dx^2 + \varphi dX^2 dx^3 = 0,$$

care sînt echivalente cu

$$\frac{\partial X^0_\alpha}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^0}(a_1 X^1_\alpha + b_1 X^1_{\alpha-1} + c_1 X^1_{\alpha-2}) - \frac{\partial}{\partial x^0}(a_2 X^2_\alpha + b_2 X^2_{\alpha-1} + c_2 X^2_{\alpha-2}) = 0,$$

$$\frac{\partial X^0_\alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^0}(a_2 X^1_\alpha + b_2 X^1_{\alpha-1} + c_1 X^1_{\alpha-2}) = 0,$$

$$\frac{\partial X^0_\alpha}{\partial x^3} - \frac{\partial X^0_{\alpha-1}}{\partial x^0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2}(a_1 X^1_\alpha + b_1 X^1_{\alpha-1} + c_1 X^1_{\alpha-2}) + \frac{\partial}{\partial x^2}(a_2 X^2_\alpha + b_2 X^2_{\alpha-1} + c_2 X^2_{\alpha-2}) - \frac{\partial}{\partial x^1}(a_2 X^1_\alpha + b_2 X^1_{\alpha-1} + c_2 X^1_{\alpha-2}) = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^3}(a_2 X^1_\alpha + b_2 X^1_{\alpha-1} + c_2 X^1_{\alpha-2}) - \frac{\partial X^0_{\alpha-1}}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^3}(a_1 X^1_\alpha + b_1 X^1_{\alpha-1} + c_1 X^1_{\alpha-2}) + \frac{\partial}{\partial x^3}(a_2 X^2_\alpha + b_2 X^2_{\alpha-1} + c_2 X^2_{\alpha-2}) - \frac{\partial X^0_{\alpha-1}}{\partial x^1} = 0,$$

deduse din prima relație (35) și

$$\frac{\partial X^1_\alpha}{\partial x^1} - \frac{\partial X^0_\alpha}{\partial x^0} = 0,$$

$$\frac{\partial X^1_\alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^0}(a_2 X^2_\alpha + b_2 X^2_{\alpha-1} + c_2 X^2_{\alpha-2}) = 0,$$

$$\frac{\partial X^1_\alpha}{\partial x^3} - \frac{\partial X^1_{\alpha-1}}{\partial x^0} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial X_\alpha^0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^1}(a_2 X_\alpha^2 + b_2 X_{\alpha-1}^2 + c_2 X_{\alpha-2}^2) = 0,$$

$$\frac{\partial X_\alpha^0}{\partial x^3} - \frac{\partial X_{\alpha-1}^1}{\partial x^1} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^3}(a_2 X_\alpha^2 + b_2 X_{\alpha-1}^2 + c_2 X_{\alpha-2}^2) - \frac{\partial X_{\alpha-1}^1}{\partial x^2} = 0,$$

ce se obțin din a doua relație (35) și în sfîrșit

$$\frac{\partial X_\alpha^2}{\partial x^1} - \frac{\partial X_\alpha^1}{\partial x^0} = 0,$$

$$\frac{\partial X_\alpha^2}{\partial x^2} - \frac{\partial X_\alpha^0}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^0}(a_2 X_\alpha^2 + b_2 X_{\alpha-1}^2 + c_2 X_{\alpha-2}^2) = 0, \tag{38}$$

$$\frac{\partial X_\alpha^2}{\partial x^3} - \frac{\partial X_{\alpha-1}^2}{\partial x^0} = 0,$$

$$\frac{\partial X_\alpha^1}{\partial x^2} - \frac{\partial X_\alpha^0}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^1}(a_2 X_\alpha^2 + b_2 X_{\alpha-1}^2 + c_2 X_{\alpha-2}^2) = 0,$$

$$\frac{\partial X_\alpha^1}{\partial x^3} - \frac{\partial X_{\alpha-1}^2}{\partial x^1} = 0,$$

$$\frac{\partial X_\alpha^0}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^3}(a_2 X_\alpha^2 + b_2 X_{\alpha-1}^2 + c_2 X_{\alpha-2}^2) - \frac{\partial X_{\alpha-1}^2}{\partial x^2} = 0,$$

obținute din a treia relație (35).

Condițiile de monogenitate au fost obținute în cazul sistemului (30), care este de tipul (17'), însă pot fi obținute și în cazul general (17), deoarece

$$d[f(\omega)\, d\omega] = 0$$

este echivalentă cu

$$k_0 d[f(\omega)\, d\omega] = d[k_0 f(\omega)\, d\omega)] = 0,$$

unde k_0 este numărul din B_1 care apare la numitor în produsele $\theta_i \theta_j$.

Conform celor spuse mai înainte urmează că funcțiile

$$\begin{aligned} V^0 &= \text{Real } f(\omega), \\ V^1 &= \text{Real } [\theta_1 f(\omega)], \\ W &= \text{Real } [\varphi f(\omega)], \end{aligned} \tag{39}$$

unde componentele lui $f(\omega)$ sînt legate de relațiile de monogenitate de mai sus, sînt soluții ale sistemului (30). Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} V^0 &= X_0^0, \\ V^1 &= a_1 X_0^1 + b_1 X_{-1}^1 + c_1 X_{-2}^1 + a_2 X_0^2 + b_2 X_{-1}^2 + c_2 X_{-2}^2, \\ W &= X_{-1}^0, \end{aligned} \tag{40}$$

pe care dacă le înlocuim în (30) obținem

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(a_1 X_0^1 + b_1 X_{-1}^1 + c_1 X_{-2}^1) + \frac{\partial}{\partial x^1}(a_2 X_0^2 + b_2 X_{-1}^2 + c_2 X_{-2}^2) =$$

$$= a_1 \frac{\partial X_0^0}{\partial x^0} + \frac{\partial X_0^0}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial X_{-1}^0}{\partial x^0} + c_1 \frac{\partial X_{-1}^0}{\partial x^3}, \tag{41}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2}(a_1 X_0^1 + b_1 X_{-1}^1 + c_1 X_{-2}^1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(a_2 X_0^2 + b_2 X_{-1}^2 + c_2 X_{-2}^2) =$$

$$= a_2 \frac{\partial X_0^0}{\partial x^0} + b_2 \frac{\partial X_{-1}^0}{\partial x^0} + c_2 \frac{\partial X_{-1}^0}{\partial x^3},$$

însă ținînd seama de a patra relație (37) și a patra relație (38), obținem pentru prima relație (41), unde $\alpha = 0$,

$$\frac{\partial X_0^0}{\partial x^2} + \frac{\partial X_0^0}{\partial x^1} - \frac{\partial X_0^1}{\partial x^2},$$

care este identică cu partea a doua din (30), dacă ținem seama de prima relația (36) și a doua relație (37).

A doua relația (41) se obține cu ușurință din a patra relație (36).

Se observă însă că nu numai (40) sînt singurele soluții generate de $f(\omega)$, deoarece V^i și W dați de

$$V^0 = X_\alpha^0,$$

$$V^1 = a_1 X_\alpha^1 + b_1 X_{\alpha-1}^1 + c_1 X_{\alpha-2}^1 + a_2 X_\alpha^2 + b_2 X_{\alpha-1}^2 + c_2 X_{\alpha-2}^2$$

$$W = X_{\alpha-1}^0,$$

pentru α oarecare, pozitiv sau negativ, sînt de asemenea soluții. Acest fapt se arată ușor, deoarece punînd

$$V^0 = \text{Real}\,[\varphi^\alpha f(\omega)],$$

$$V^1 = \text{Real}\,[\theta_1 \varphi^\alpha f(\omega)], \tag{42}$$

$$W = \text{Real}\,[\varphi^{\alpha+1} f(\omega)],$$

se vede imediat că sîntem conduși la aceleași relații (29) care determină algebra, întrucît φ^α, oricare ar fi α, întreg, nu este un divizor al lui zero.

Pentru un număr oarecare λ din algebră, care aparține lui (l), avem

$$d\,[\lambda f(\omega)\, d\omega] = 0,$$

dacă

$$d\,[f(\omega)\, d\omega] = 0$$

și operația are sens, dacă $f(\omega) \in (m)$, deci și soluțiile

$$V^0 = \text{Real}\,[\lambda f(\omega)],$$
$$V^1 = \text{Real}\,[\theta_1 \lambda f(\omega)], \tag{43}$$
$$W = \text{Real}\,[\varphi \lambda f(\omega)],$$

verifică sistemul (30). Prin urmare, o funcție monogenă $f(\omega)$ determină o infinitate de sisteme de soluții, obținute prin procedeele de mai sus.

Trebuie însă să remarcăm faptul că $\lambda \in (l)$ este esențial; în caz contrar, adică dacă $\lambda \in (m)$, trebuie ca $f(\omega)$ cît și derivatele sale parțiale să aparțină lui (l). Soluțiile V^0, V^1, W date de (43) sînt valabile în regiunea (Δ) a spațiului ω, unde $f(\omega)$ îndeplinește această condiție.

Să observăm că relația a treia din (36)

$$\frac{\partial X_\alpha^0}{\partial x^3} = \frac{\partial X_{\alpha-1}^0}{\partial x^0}$$

este condiția de monogenitate în algebra B_1 în ipoteza că $\omega = x^0 + \varphi x^3$, iar $f(\omega) = \varphi^\alpha X_\alpha^0$, deci monogenitatea în algebra A implică monogenitatea în subalgebra B_1.

Să considerăm acum cazul cînd ω are o infinitate de componente

$$\omega = \theta_i x^i, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

cu

$$x^k = x_\alpha^k \varphi^\alpha.$$

În ipoteza că $f(\omega)$, derivatele sale parțiale și ω aparțin lui (l), putem scrie condițiile de monogenitate din

$$d[f(\omega)\, d\omega] = 0 \tag{44}$$

și, situîndu-ne tot în cazul algebrei definite de (29), relația (44) este echivalentă cu

$$dX^0 dx_\alpha^0 + (a_1 + b_1\varphi + c_1\varphi^2)\, dX^1 dx_\alpha^1 +$$

$$+ (a_2 + \varphi b_2 + \varphi^2 c_2)(dX^1 dx_\alpha^2 + dX^2 dx_\alpha^1) + \varphi dX^0 dx_\alpha^3 = 0,$$

$$dX^1 dx_\alpha^0 + dX^0 dx_\alpha^1 + (a_2 + \varphi b_2 + \varphi^2 c_2)\, dX^0 dx_\alpha^2 + \varphi dX^1 dx_\alpha^3 = 0, \tag{35'}$$

$$dX^2 dx_\alpha^0 + dX^0 dx_\alpha^2 + dX^1 dx_\alpha^1 - (a_2 + \varphi b_2 + \varphi^2 c_2)\, dX^2 dx_\alpha^2 + \varphi dX^2 dx_\alpha^3 = 0,$$

unde α ia toate valorile întregi între $-\infty$ și $+\infty$.

Întrucît relațiile (35') se obțin din (35) înlocuind pe x^i cu x_α^i, urmează că relațiile (36), (37) și (38) se transformă într-un sistem infinit, unde x^0, x^1, x^2, x^3 se înlocuiesc respectiv cu $x_\alpha^0, x_\alpha^1, x_\alpha^2, x_\alpha^3$. Prin urmare, funcțiile V^0, V^1, W date de (39) sînt soluțiile sistemului infinit dedus din (30),

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^1}{\partial x_\alpha^1} &= a_1 \frac{\partial V^0}{\partial x_\alpha^0} + b_1 \frac{\partial W}{\partial x_\alpha^0} + c_1 \frac{\partial W}{\partial x_\alpha^3}, \\ \frac{\partial V^1}{\partial x_\alpha^2} &= a_2 \frac{\partial V^0}{\partial x_\alpha^0} + b_2 \frac{\partial W}{\partial x_\alpha^0} + c_2 \frac{\partial W}{\partial x_\alpha^3}. \end{aligned} \tag{45}$$

Toate componentele lui $f(\omega)$ sînt soluții ale sistemului următor, mai general, cu o infinitate de necunoscute și variabile

$$\begin{aligned}\frac{\partial V^{\beta+1}}{\partial x_\alpha^1} &= a_1 \frac{\partial V^\beta}{\partial x_\alpha^0} + b_1 \frac{\partial W^\beta}{\partial x_\alpha^0} + c_1 \frac{\partial W^\beta}{\partial x_\alpha^3} + \frac{\partial V^\beta}{\partial x_\alpha^2}, \\ \frac{\partial V^{\beta+1}}{\partial x_\alpha^1} &= a_2 \frac{\partial V^\beta}{\partial x_\alpha^0} + b_2 \frac{\partial W^\beta}{\partial x_\alpha^0} + c_2 \frac{\partial W^\beta}{\partial x_\alpha^0}.\end{aligned} \tag{46}$$

Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned}V^\beta &= \text{Real}\,[\varphi^\beta f(\omega)], \\ V^{\beta+1} &= \text{Real}\,[\theta_1 \varphi^\beta f(\omega)], \\ W^\beta &= \text{Real}\,[\varphi^{\beta+1} f(\omega)],\end{aligned}$$

unde ω are o infinitate de componente. Rezultatul obținut este evident valabil și pentru sistemul (17), iar sistemul infinit care se atașează se deduce ușor din (46). Acest tip de sistem îl putem numi *sistem periodic de perioadă unitatea*. Într-adevăr, sistemul (46) se obține din (17), prin însumarea la indicii funcțiilor necunoscute (pentru W se poate lua W^0) a unui număr întreg oarecare.

9. *Cazul cînd sistemul* (17) *admite soluții polinoame.* Sistemul (17) fiind omogen admite soluții polinoame. Punînd

$$\begin{aligned}V^0 &= P_0^s(x^0, x^1, \ldots, x^n), \\ V^1 &= P_1^s(x^0, x^1, \ldots, x^n), \\ W &= Q^s(x^0, x^1, \ldots, x^n),\end{aligned}$$

P_0^s, P_1^s, Q^s fiind trei polinoame oarecare de grad s, deci depinzînd de $3C_{n+s}^s$ parametri arbitrari și înlocuindu-le în (17) obținem

$$(n-1)\, C_{n+s-1}^{s-1}$$

legături între parametrii, deci dacă

$$3C_{n+s}^s - (n-1)\, C_{n+s-1}^{s-1} \geqslant 0 \tag{47}$$

sau, ceea ce este același lucru,

$$3n - ns + 4s \geqslant 0, \tag{47'}$$

parametrii putînd fi determinați așa încît P_0^s, P_1^s, și Q^s să fie soluții ale lui (17). Însă pentru $n > 4$ și s convenabil ales, (47') nu are soluții, ceea ce înseamnă că sub forma aceasta, metoda coeficienților nedeterminați este ineficientă. Aceasta se datorește faptului că, dacă notăm

$$\begin{aligned}P_0^s &= (x^0)^i (x^n)^j P_0^{ij} \quad , \quad \overline{P}_0^s = (x^0)^i (x^n)^j \overline{P}_0^{ij}, \\ P_1^s &= (x^0)^i (x^n)^j P_1^{ij} \quad , \quad \overline{P}_1^s = (x^0)^i (x^n)^j \overline{P}_1^{ij}, \\ Q^s &= (x^0)^i (x^n)^j Q^{ij} \quad , \quad \overline{Q}^s = (x^0)^i (x^n)^j \overline{Q}^{ij},\end{aligned}$$

două sisteme de soluții ale sistemului (17), identitatea lor nu implică

$$P_0^{ij} \equiv \overline{P}_0^{ij},$$
$$P_1^{ij} \equiv \overline{P}_1^{ij},$$
$$Q^{ij} \equiv \overline{Q}^{ij},$$

pentru toți i, j, ci numai pentru o parte din ei, celelalte identități fiind o consecință a lor.

10. *Sisteme de ecuații cu derivate parțiale liniare și omogene, de ordin superior, cărora li se pot asocia algebre infinite.*

Algebrele definite prin legile de compoziție ale elementelor bazei pot servi pentru găsirea soluțiilor unor sisteme de ordin superior, liniare, omogene, cu coeficienți constanți, dacă se încadrează în anumite tipuri pe care le vom prezenta mai jos. Într-adevăr, sistemul de ordinul doi cu n ecuații

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^1 \partial x^k} = a_{i,j}^k \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial y^j} + a_{i,j,h}^k \frac{\partial^2 V^h}{\partial x^i \partial y^j} + c_{i,j,h}^k \frac{\partial^2 V^h}{\partial y^i \partial y^j} + e_{i,j,h}^k \frac{\partial^2 W^l}{\partial y^i \partial y^j} +$$

$$+ g_{il}^k \frac{\partial^2 W^l}{\partial x^0 \partial y^i} + g_i^k \frac{\partial^2 W^t}{\partial x^0 \partial x^0}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{48}$$

prin intermediul funcțiilor monogene de variabila

$$\omega = x^0 + \theta_1 x^1 + \ldots + \theta_n x^n + \varphi_1 y^1 + \ldots + \varphi_m y^m$$

și punînd

$$\begin{aligned} U &= \text{Real } f(\omega), \\ V^h &= \text{Real } [\varphi_h f(\omega)], \\ W^l &= \text{Real } [\theta_l f(\omega)], \end{aligned} \tag{49}$$

ne conduce la o algebră asemănătoare aceleia date de (18).

Înlocuind pe (49) în (48) obținem pînă la urmă

$$\theta_1 \theta_i = \lambda_{1,i}^k \theta_k, \qquad \begin{matrix} (i = 1, 2, \ldots, n, \quad \theta_0 = 1) \\ (k = 0, 1, \ldots, n) \end{matrix}$$

unde $\lambda_{1,i}^k$ sînt polinoame de gradul trei, cel mult, în φ_h. Se vede de asemenea că numărul funcțiilor necunoscute W^l nu poate fi mai mare decît n, în schimb numărul necunoscutelor V^h, poate fi oarecare. Algebra asociată este de tipul (17), deoarece prin determinarea produselor $\theta_i \theta_j$, coeficienții λ_{ij}^k corespunzători sînt funcții raționale în φ_h. Pentru ca acest incovenient să dispară trebuie ca

$$\begin{aligned} a_{i,j}^k &= 0, \qquad (i \neq 0) \\ a_{i,j,h}^k &= 0, \qquad (i \neq 0) \\ e_{i,j,l}^k &= g_{i,l}^k = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Algebra introdusă de (50) diferă totuși de algebrele deduse din (17), deoarece admite ca subalgebre, algebrele B_1^i în număr de $m \geqslant 1$, de elemente ale bazei

$$\varphi_i^\alpha, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

cît și produsele lor directe $B_1^i B_1^j \ldots B_1^k$, de elemente ale bazei

$$\varphi_{i_1}^\alpha \varphi_{j_1}^\alpha \cdots \varphi_{k^k}^\alpha$$

și din această cauză se apropie mai mult de algebrele infinite asociate sistemelor (13) cu mai mult de trei funcții necunoscute, deoarece în aceste algebre intervin subalgebrele B_1^i.

Folosind notația

$$\frac{\partial^p}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = D_x^\alpha D_y^\beta$$

potrivită pentru însumarea tensorială ce am adoptat-o, sistemul de n ecuații de ordinul p, omogen,

$$\begin{aligned} D_{x^0}^{p-2} D_{x^1} D_{x^k}(U) = {} & a^k_{j,i,\alpha_1,\ldots,\alpha_m} D^j_{x^0} D_{x^i} D^{\alpha_1}_{y^1} \ldots D^{\alpha_m}_{y^m}(U) + \\ & + b^k_{h,j,i,\alpha_1,\ldots,\alpha_m} D^j_{x^0} D_{x^i} D^{\alpha_1}_{y^1} \ldots D^{\alpha_m}_{y^m}(V^h) + \\ & + c^k_{h,j,\beta_1,\ldots,\beta_m} D^j_{x^0} D^{\beta_1}_{y^1} \ldots D^{\beta_m}_{y^m}(V^h) + \\ & + d^k_{l,j,\beta_1,\ldots,\beta_m} D^j_{x^0} D^{\beta_1}_{y^1} \ldots D^{\beta_m}_{y^m}(W^l) \\ & \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{48'}$$

obținem, folosind tot expresiile (49), că produsele $\theta_1 \theta_i$ sînt date de

$$\theta_1 \theta_i = \mu^k_{1,i} \theta_k, \qquad \begin{matrix} (i = 1, 2, \ldots, n) \\ (k = 0, 1, \ldots, n, \quad \theta_0 = 1) \end{matrix} \tag{50'}$$

unde de astă dată $\mu^k_{1,i}$ sînt polinoame în $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ de gradul p, cel mult. Și în această situație numărul funcțiilor necunoscute W^l nu poate fi mai mare decît n, în schimb numărul funcțiilor V^h poate fi oarecare, deși m este fix. Dacă $h > m$, atunci substituțiile (49) se completează cu

$$V_h = \text{Real}\,[\varphi_i^\eta \varphi_j^\xi f(\omega)], \qquad (h > m) \tag{51}$$

însă în această situație (50') va avea coeficienții $\mu^k_{1,i}$ de grad superior lui p. Algebra asociată va fi evident tot de tipul celei asociate sistemului (17), adică μ^k_{ij} vor fi raționale în φ_2. Nu este greu de obținut din (48') condițiile ce trebuie îndeplinite de coeficienți pentru ca să fie de tipul (17').

Sistemul (48') poate fi încă extins considerînd în partea întîia un termen de forma

$$D^{\gamma_1}_{y^1} \ldots D^{\gamma_m}_{y^m} D^j_{x^0} D_{x^1} D_{x^k}(U), \tag{52}$$

iar termenii din partea doua fiind aceiași. De astă dată însă relațiile de compoziție (50′) vor avea coeficienții $\mu_{i,i}^{k}$ polinoame în φ_i la puteri negative și pozitive și aceasta din cauză că produsul $\theta_1 \theta_k$ apare sub forma

$$\varphi_1^{\gamma_1} \varphi_2^{\gamma_2} \dots \varphi_m^{\gamma_m} \theta_1 \theta_k = \mu_{1k}^{j} \theta_j, \qquad (\theta_0 = 1)$$

unde $\mu_{1,k}^{j}$ sînt tot polinoame de puteri φ_i. Separînd produsul $\theta_1 \theta_k$, coeficienții $\mu_{1,k}^{j}$ capătă structura menționată.

II. Algebre infinite asociate la ecuații cu derivate parțiale, simultane, liniare, omogene, cu coeficienți constanți, de ordin oarecare

11. *Ecuații cu derivate parțiale, simultane, liniare și omogene, la care se pot asocia algebre infinite. Proprietățile algebrelor.*

Să considerăm sistemul de n ecuații cu derivate parțiale liniar, omogen, cu coeficienți constanți, de ordinul p, în $x_0, x_1, \dots, x_s$, cu o singură necunoscută

$$\sum_{\alpha} C^{k}_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s} \frac{\partial^P U}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{53}$$

Căutînd și aici soluții prin funcții monogene de variabila

$$\omega = x_0 + \theta_1 x_1 + \dots + \theta_s x_s$$

sîntem conduși pentru elementele bazei θ_i la următoarele n ecuații caracteristice

$$\sum_{\alpha} C^{k}_{\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_s} \theta_0^{\alpha_0} \theta_1^{\alpha_1} \dots \theta_s^{\alpha_s}, \quad (s > n), \quad (\theta_0 = 1) \tag{54}$$

care determină n din elementele bazei în raport cu celelalte $s - n$, deci algebra asociată este de ordinul ∞^{s-n}. În cazul cînd $s = n$, atunci fiecare din elementele bazei θ_i verifică o ecuație cu coeficienți constanți, deci algebra asociată este de ordin finit cu elementele bazei

$$\theta_1^{\alpha_1} \theta_2^{\alpha_2} \dots \theta_n^{\alpha_n}, \quad (0 \leqslant \alpha_n < p), \quad (\theta_i^0 = 1).$$

Astfel, sistemului

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{55}$$

i se asociază, prin procedeul de mai sus, algebra de elementele bazei 1, θ_1, θ_2 legate prin relațiile

$$1 - \theta_1\theta_2 = 0,$$
$$\theta_1^2 - \theta_2 = 0,$$
$$\theta_2^2 - \theta_1 = 0$$

sau

$$\theta_i^3 = 1.$$

Într-o lucrare anterioară [5], studiind algebra liniară de ordinul trei, asociativă și comutativă, definită de ecuația caracteristică $\theta^3 = 1$, am găsit că funcțiile conjugate ale unei funcții monogene sînt soluții ale sistemului (55). De astă dată am obținut reciproca acestui fapt și anume că singura algebră liniară, asociativă și comutativă asociată lui (55) este dată de ecuația caracteristică $\theta^3 = 1$.

În mod analog se arată că sistemului

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\, \partial x_{j+k}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j\, \partial x_{i+k}} \qquad (\text{mod } n)$$

i se asociază algebra de ordinul n definită de $\theta^n = 1$. În general însă dacă $s < n$ sistemul (54) este incompatibil, iar sistemul (53) nu are soluții în afară de soluția banală dată de un polinom de grad $p - 1$ cel mult. Există totuși o excepție pentru cazul cînd $s = n - 1$. În această situație dacă luăm pentru variabila ω forma

$$\omega = \theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_{n-1} x_{n-1}, \quad (s = n - 1), \quad (\theta_0 \neq 1)$$

atunci sistemul de n ecuații (54) va fi omogen de grad p în $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, deci va putea, în general, admite soluții de forma

$$\theta_i^{\beta_i} = 0, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n - 1), \quad (\beta_i \geqslant 1).$$

Dacă nu toți $\beta_i = 1$, atunci algebra asociată sistemului (54) este o algebră cu element unitate 1, obținută ca produsul direct al algebrelor $R + B_i$, unde B_i sînt algebrele nilpotente definite de $\theta_i^{\beta_i} = 0$ $(\beta_i > 1)$. Tot ce am spus este valabil în ipoteza că θ_i nu pot fi exprimați printr-unul singur din elementele bazei, pentru că în această situație îl putem lua pe acesta elementul unitate și cădem peste discuția precedentă. Într-adevăr pentru sistemul

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

punînd $\omega = x + \theta y$, sîntem conduși la condițiile imposibile

$$1 + \theta^2 = 0,$$
$$1 - \theta^2 = 0.$$

Totuși sistemul admite o soluție comună dată de

$$U = a + bx + cy + dxy.$$

Dacă ω are forma

$$\omega = \theta_1 x + \theta_2 y,$$

ecuațiile caracteristice

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = 0,$$
$$\theta_1^2 - \theta_2^2 = 0$$

dau

$$\theta_1^2 = 0,$$
$$\theta_2^2 = 0,$$

adică θ_1 și θ_2 definesc două algebre nilpotente B_1, B_2 de index doi.

Soluția U este dată de coeficientul lui $\theta_1\theta_2$ din

$$f(\omega) = a^* + b^*\omega + c^*\omega^2,$$

unde a^*, b^*, c^* sînt constante convenabil alese în algebra $A = (R + B_1) \times (R + B_2)$, (R) fiind algebra numerelor reale, iar $(R + B_1) \times (R + B_2)$ produsul direct al algebrelor $R + B_1$ și $R + B_2$, prin $R + B_i$, înțelegîndu-se algebra de ordinul doi construită pe (R) de elemente ale bazei, 1, θ_i.

Privit de aproape rezultatul obținut nu diferă de cel precedent. Singura deosebire a fost în alegerea variabilei ω, fapt care a permis determinarea ecuațiilor caracteristice ale tuturor elementelor bazei.

Situîndu-ne în cazul $s > n$, apare dificultatea algebrică de a exprima fiecare din elementele θ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și puterile sale pînă la ordinul p numai cu ajutorul celorlalte elemente ale bazei considerate arbitrare $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{s-n}$. Oricînd această eliminare este posibilă, adică relațiile (54), cu notația de mai sus, se transformă în următoarele, echivalente,

$$\lambda_0^i \theta_i^p + \lambda_1^i \theta_i^{p-1} + \ldots + \lambda_{p-1}^i \theta_i + \lambda_p^i = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, p) \qquad (56)$$

cu $\lambda_0^i, \lambda_1^i, \ldots, \lambda_p^i$, polinoame numai în $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{s-n}$, atunci algebra asociată poate fi mînuită cu ușurință și elementele bazei sînt

$$\theta_1^{\alpha_1} \theta_2^{\alpha_2} \ldots \theta_n^{\alpha_n} \varphi_1^{\beta_1} \varphi_2^{\beta_2} \ldots \varphi_{s-n}^{\beta_{s-n}}, \qquad (57)$$

$$\theta_i^0 = 1, \quad \varphi_i^0 = 1,$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ luînd valori întregi între 0 și $p - 1$, iar $\beta_1, \ldots, \beta_{s-n}$ luînd toate valorile întregi negative și pozitive între $-\infty$ și $+\infty$.

Algebra apare astfel ca produsul direct a n-algebre definite de (56) și ordinul său este ∞^{s-n}.

Pentru ca ecuațiile caracteristice să apară direct de forma (56), trebuie ca sistemul de ecuații (53) să fie dat sub forma

$$\frac{\partial^p}{y_i^p} \Lambda_0^i + \frac{\partial^{p-1}}{\partial y_i^{p-1}} \Lambda_1^i + \ldots + \frac{\partial}{\partial y_i} \Lambda_{p-1}^i + \Lambda_p^i = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (58)$$

cu $\Lambda_0^i, \ldots, \Lambda_p^i$ operatori diferențiali de ordinul $0, 1, \ldots, p$, respectiv numai în $\frac{\partial}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$, $(n + m = s)$. Bineînțeles, $\Lambda_0^i, \Lambda_1^i, \ldots$ pot fi parțial nuli deoarece nu este absolut necesar ca ecuațiile (56) să fie de același grad p. De aici se vede că sistemul (53) poate fi modificat, în sensul că ecuațiile ce intervin în el pot fi de diferite ordine. În această situație elementele bazei (57) se modifică în consecință.

Să considerăm ca o aplicație sistemul

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^{s} a_i \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}, \qquad \frac{\partial^3 U}{\partial y_2^3} = \sum_{i=0}^{s} b_i \frac{\partial^3 U}{\partial x_i^3}. \tag{58'}$$

Pentru ω dat de

$$\omega = \sum_{i=0}^{s} \varphi_i x_i + \theta_1 y_1 + \theta_2 y_2, \qquad (\varphi_0 = 1)$$

ecuațiile caracteristice sînt

$$\theta_1^2 = \sum_{i=0}^{s} a_i \varphi_i^2, \qquad \theta_2^3 = \sum_{i=0}^{s} b_i \varphi_i^3. \tag{59}$$

Algebra A are elementele bazei

$$\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_s^{\alpha_s}, \ \theta_1 \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_s^{\alpha_s}, \ \theta_2 \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_s^{\alpha_s}, \ \ldots$$
$$\theta_2^2 \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_s^{\alpha_s}, \ \theta_1\theta_2 \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_s^{\alpha_s}, \ \theta_1\theta_2^2 \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_s^{\alpha_s}, \tag{60}$$
$$\varphi_i^0 = 1, \qquad \theta_i^0 = 1,$$

unde α_i pot lua toate valorile întregi între $-\infty$ și $+\infty$. Un număr din algebră se scrie sub forma

$$\omega = X_{0,0} + \theta_1 X_{1,0} + \theta_2 X_{0,1} + \theta_2^2 X_{0,2} + \theta_1\theta_2 X_{1,1} + \theta_1\theta_2^2 X_{1,2}$$

cu

$$X_{i,j} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s}^{(i,j)} \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_s^{\alpha_s},$$

adică cu $X_{i,j}$ în algebra B_n obținută ca produsul direct al celor s algebre infinite ciclice elementare $B_1^{(1)} \times B_1^{(2)} \times \ldots \times B_1^{(s)}$ [1]*).

Să observăm că ω se mai poate scrie

$$\omega = \omega_0 + \theta_2\omega_1 + \theta_2^2 \omega_2,$$

*) p. 613.

cu ω_i în algebra definită de prima relație (59), sau

$$\omega = \omega_0 + \theta_1 \omega_1 ,$$

cu ω_i în algebra definită de a doua relație (59). Toate proprietățile stabilite pentru algebrele pornind de la ecuația caracteristică se mențin, deși sînt într-o oarecare măsură mai complicate deoarece de astă dată algebra A este produsul direct a două algebre infinite, determinate fiecare de cîte o ecuație caracteristică, ambele construite pe același produs direct B_n.

12. *Soluții analitice generate de funcții monogene în algebră. Soluții polinoame.* Nu vom insista asupra acestor probleme pe care cititorul le poate reface singur avînd în vedere în special lucrarea [1] și ne vom ocupa de soluțiile analitice generate de seriile întregi

$$S(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n .$$

Să căutăm mai întîi soluțiile sistemului (58) sub forma unui polinom omogen de gradul n. Un astfel de polinom conține

$$C_{n+s+2}^{n}$$

parametri arbitrari, deoarece numărul variabilelor este $s + 3$. Înlocuind în sistemul (58′) obținem

$$C_{n+s}^{n-2} + C_{n+s-1}^{n-3}$$

legături între aceste constante arbitrare, deci mai rămîn disponibile

$$C_{n+s+2}^{n} - C_{n+s}^{n-2} - C_{n+s-1}^{n-3} = \frac{(n+s-1)!}{n!\,(s+2)!}\,[(n+s)(s+2)(2n - + s + 1) - n(n-1)(n-2)]$$

legături, și cum s este fix, iar n arbitrar, determinarea constantelor nu mai este posibilă, aparent, începînd de la un rang n pentru care termenul din croșete este negativ. Acest fapt nu este adevărat deoarece există polinoame omogene de orice grad care să verifice sistemul (58′). Într-adevăr, nu avem decît să considerăm puterea a $n - a$ a lui ω

$$\omega^n = (x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_s x_s + \theta_1 y_1 + \theta_2 y_2)^n =$$
$$= (x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_s x_s)^n + C_n^1 (x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots +$$
$$+ \varphi_s x_s)^{n-1} (\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2) + C_n^2 (x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_s x_s)^{n-2} (\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2)^2 +$$
$$+ C_n^3 (x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_s x_s)^{n-3} (\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2)^3 + \ldots$$

și observăm imediat că ω^n conține

$$C_{s+n}^{n} + 2C_{s+n-1}^{n-1} + 2C_{s+n-2}^{n-2} + C_{s+n-3}^{n-3}$$

componente, polinoame omogene de gradul n, toate soluții ale sistemului (58′). Mai mult încă, aceste polinoame sînt liniar independente, deoarece

fiecare conține cîte un element din

$$(x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_s x_s)^n,$$
$$(x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_s x_s)^{n-1} y_1,$$
$$(x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_s x_s)^{n-1} y_2,$$
$$(x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_s x_s)^{n-2} y_1 y_2,$$
$$(x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_s x_s)^{n-2} y_2^2,$$

și

$$(x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_s x_s)^{n-3} y_1 y_2^2,$$

care sînt liniar independente.

Astfel, pentru sistemul (58) cu $s = 1$ avem efectiv

$$\omega^3 = (x_0 + \varphi_1 x_1 + \theta_1 y_1 + \theta_2 y_2)^3 =$$
$$= x_0^3 + b_0 y_2^3 + 3a_0 x_0 y_1^2 + \varphi_1 (3x_0^2 x_1 + 3a_0 x_1 y_1^2) +$$
$$+ \varphi_1^2 (3x_1^2 x_0 + 3a_1 y_1^2 x_0) + \varphi_1^3 (x_1^3 + b_1 y_2^3 + 3a_1 y_1^2 x_1) +$$
$$+ \theta_1 (3y_1 x_0^2 + a_0 y_1^3) + \theta_2 (3x_0^2 y_2 + 3a_0 y_1^2 y_2) + \theta_1 \varphi_1 6x_0 y_1 x_1 +$$
$$+ \theta_1 \varphi_1^2 (3x_1^2 y_1 + a_1 y_1^3) + \theta_2 \varphi_1 6x_0 x_1 y_2 + \theta_2 \varphi_1^2 (3x_1^2 x_2 + 3a_1 y_1^2) +$$
$$+ \theta_2^2 3x_0 y_2^2 + \theta_2^2 \varphi_1 3y_2^2 x_1 + \theta_1 \theta_2 6x_0 y_1 y_2 + \theta_1 \theta_2 \varphi_1 6x_1 y_1 y_2 + \theta_1 \theta_2^2 3y_2^2 y_1.$$

Se vede că avem $C_4^3 + 2C_3^2 + 2C_2^1 + C_1^0 = 15$ componente, polinoame omogene de gradul trei, care, conform celor spuse mai sus, sînt liniar independente, deși acest fapt se poate demonstra și direct.

Pentru sistemul general de n ecuații (58), punînd $s = n + m$, deci variabila ω avînd forma

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_m x_m + \theta_1 y_1 + \ldots + \theta_n y_n,$$

polinoamele de gradul r, soluții ale sistemului, sînt date de componentele lui ω^r. Numărul lor este dat de numărul componentelor N_r din

$$\sum_{\substack{0 \\ \beta}}^{p-1} (x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_m x_m)^{r - \sum_{i=1}^{n} \beta_i} \theta_1^{\beta_1} \theta_2^{\beta_2} \ldots \theta_n^{\beta_n},$$

$$p > \beta_i \text{ (întreg)} \geqslant 0. \tag{61}$$

Bineînțeles, orice combinație liniară a lor este de asemenea soluție a sistemului (58). Orice combinație liniară introduce N_r constante arbitrare, deci un polinom omogen de gradul r, soluție a sistemului (58), depinde de N_r constante arbitrare. Numărul N_r poate fi calculat numărînd componentele din (61)

$$N_r = B_0 C_{r+m}^r + B_1 C_{r+m-1}^{r-1} + \ldots + B_{n(p-1)} C_{r+m-n(p-1)}^{r-n(p-1)},$$

unde B_k este numărul elementelor de forma

$$\theta_1^{\beta_1} \theta_2^{\beta_2} \ldots \theta_n^{\beta_n}$$

cu

$$0 \leqslant \beta_i \leqslant n - 1,$$

deci

$$B_0 = 1,\ B_1 = C_n^1,\ B_2 = C_{n+1}^2, \ldots, B_{p-1} = C_{n+p-2}^{p-1}, \ \ldots,\ B_{n(p-1)} = 1.$$

Să arătăm că aceste polinoame formează o bază, adică orice polinom omogen de grad r, soluție a sistemului (58), se poate exprima printr-o combinație liniară a lor. Vom face raționamentul mai întîi pe sistemul (58′).

Să observăm că toate derivatele unei soluții $U(y_1, y_2, x_0, x_1, \ldots, x_s)$ a lui (58′),

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial y_1^{\alpha} \partial y_2^{\beta}}, \quad (\alpha > 1; \quad \beta > 2)$$

se pot exprima cu ajutorul derivatelor

$$\frac{\partial^q U}{\partial y_1^{\lambda} \partial y_2^{\mu} \partial x_0^{\gamma_0} \partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_s^{\gamma_s}}, \ (\lambda + \mu + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_s = q)$$

cu $\lambda \leqslant 1$ și $\mu \leqslant 2$. De aici se deduce că două polinoame de gradul r, Q și Q', soluții ale sistemului (58′), sînt identice dacă polinoamele $P_{ij}(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ și $P_{i,j}(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ care le compun

$$Q = \sum_{i,j=0}^{r} y_1^i y_2^j P_{i,j}(x_0, x_1, \ldots, x_s),$$

$$Q' = \sum_{i,j=0}^{r} y_1^i y_2^j P'_{i,j}(x_0, x_1, \ldots, x_s),$$

sînt identice numai pentru indicii $i = 0, 1$ și $j = 0, 1, 2$, adică avem

$$Q \equiv Q' \tag{62}$$

numai dacă

$$P_{i,j} \equiv P'_{i,j}, \quad (i = 0, 1; \quad j = 0, 1, 2). \tag{62′}$$

Într-adevăr, din identitatea $Q \equiv Q'$ deducem și

$$\frac{\partial^{\lambda+\mu} Q}{\partial y_1^{\lambda} \partial y_2^{\mu}} \equiv \frac{\partial^{\lambda+\mu} Q'}{\partial y_1^{\lambda} \partial y_2^{\mu}}; \quad (\lambda = 0, 1; \quad \mu = 0, 1,2,)$$

care pentru $y_1 = y_2 = 0$ conduce la identitatea (62′). Identificînd derivatele parțiale de ordin superior în raport cu y_1 și y_2, ținînd seama de observația precedentă și făcînd apoi pe y_i să tindă către zero, observăm că toate polinoamele $P_{i,j}$ cu $i > 1$ și $j > 2$ se exprimă cu ajutorul derivatelor polinoamelor $P_{i,j}$ cu $i \leqslant 1$ și $j \leqslant 2$. Identificarea polinoamelor $P_{i,j}$ și $P'_{i,j}$ cu $i \leqslant 1$, $j \leqslant 2$ introduce

$$C_{s+r}^r + 2C_{s+r-1}^{r-1} + 2C_{s+r-2}^{r-2} + C_{s+r-3}^{r-3} \tag{62″}$$

legături între coeficienții lor, deoarece conțin tot atîtea monoame distincte.

Numărul de legături dat de (62″) este egal însă cu numărul componentelor lui ω^r, deci numărul relațiilor este egal cu numărul parametrilor

arbitrari ce se introduc considerînd pe Q ca o expresie liniară în polinoamele omogene date de ω^r; acești parametri pot fi determinați prin urmare în mod unic.

Pentru sistemul (58) raționamentul este identic, deoarece se observă că toate derivatele unei soluții U

$$\frac{\partial^k U}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots \partial y_m^{\alpha_m} \partial x_0^{\beta_0} \partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_m^{\beta_m}},$$

pentru $\alpha_i \geqslant p$, se pot exprima cu ajutorul derivatelor de același tip, însă cu $\alpha_i < p$. În virtutea acestui fapt se obține că identitatea a două polinoame omogene de gradul r, soluții ale sistemului (58),

$$Q = \sum_{\alpha} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x_0, x_1, \dots, x_m)$$

$$Q' = \sum_{\alpha} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x_0, x_1, \dots, x_m)$$

este implicată doar de identitatea polinoamelor

$$P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \equiv P'_{\alpha_2, \alpha_1, \dots, \alpha_n}$$

pentru $\alpha_i < p$, ceea ce atrage unicitatea exprimării soluției Q cu ajutorul componentelor lui ω^r.

13. *Soluții analitice generate de funcții monogene. Cazul general.* Fiind dat un polinom omogen U_r, de gradul r, ne propunem să arătăm că există totdeauna în algebră un număr λ_r, astfel încît să avem

$$U_r \equiv \text{Real } [\lambda_r \omega^r]. \tag{63}$$

Scriind pe U_r cu ajutorul polinoamelor bazei P_{ijk}, avem în cazul sistemului (58′), cu $s = 1$,

$$U_r = \sum_{i=0}^{r} p_{0,0,i} P_{0,0,i} + \sum_{i=0}^{r-1} p_{1,0,i} P_{1,0,i} + \sum_{i=0}^{r-1} p_{0,1,i} P_{0,1,i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-2} p_{0,2,i} P_{0,2,i} + \sum_{i=0}^{r-2} p_{1,1,i} P_{1,1,i} + \sum_{i=0}^{r-3} p_{1,2,i} P_{1,2,i},$$

$$\lambda_r = \sum_{i=0}^{r} \varphi^{-i} p^*_{0,0,i} + \sum_{i=0}^{r-1} \varphi^{-i} \theta_1 p^*_{1,0,i} + \sum_{i=0}^{r-1} \varphi^{-i} \theta_2 p^*_{0,1,i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-2} \varphi^{-i} \theta_2^2 p^*_{0,2,i} + \sum_{i=0}^{r-2} \varphi^{-i} \theta_1 \theta_2 p^*_{1,1,i} + \sum_{i=0}^{r-3} \varphi^{-i} \theta_1 \theta_2^2 p^*_{1,2,i}$$

și

$$\omega^r = \sum_{i=0}^{r} \varphi^i P_{0,0,i} + \sum_{i+0}^{r-1} \varphi^i \theta_1 P_{1,0,i} + \sum_{i=0}^{r-1} \varphi^i \theta_2 P_{0,1,i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-2} \varphi^i \theta_2^2 P_{0,2,i} + \sum_{i=0}^{r-2} \varphi^i \theta_1 \theta_2 P_{1,1,i} + \sum_{i=0}^{r-3} \varphi^i \theta_1 \theta_2^2 P_{1,2,i}$$

condiția (63) se transformă în următoarele legături între numerele cunoscute p_{ijk} și parametri ce urmează a fi determinați $p^*_{i,j,k}$ prin identificarea coeficienților lui $P_{i,j,k}$. Avem deci

$$p_{0,0,i} = p^*_{0,0,i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

și, ținînd seamă că

$$\theta_1^2 = a_0 + a_1 \varphi^2,$$
$$\theta_2^3 = b_0 + b_1 \varphi^3,$$

avem și

$$p_{1,0,i} = a_0 p^*_{1,0,i} + a_1 p^*_{1,0,\,i+2} ,$$
$$p_{0,1,i} = b_0 p^*_{0,2,i} + b_1 p^*_{0,2,\,i+2} , \qquad (i = 0, 1, \ldots, r-1),$$

și

$$p_{0,2,i} = b_0 p^*_{0,1,i} + b_1 p^*_{0,1,\,i+2} \tag{64}$$

$$p_{1,1,i} = a_0 b_0 p^*_{1,2,i} + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, p^*_{1,2,i+2} + a_1 b_1 p^*_{1,2,i+4}, \; (i = 0,1, \ldots, r-2)$$

și

$$p_{1,2,i} = a_0 b_0 p^*_{1,1,i} + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, p^*_{1,1,i+2} + a_1 b_1 p^*_{1,1,i+4} \; (i = 0,1, \ldots, r-3).$$

Se observă că fiecare din relațiile de mai sus, determină necunoscutele ce intervin în ele cînd i variază. Astfel

$$p^*_{0,0,i} = p_{0,0}i ;$$

sistemul

$$p_{1,0,i} = a_0 p^*_{1,0,i} + a_1 p^*_{1,0,i+2}$$

cu r necunoscute, determină pe p^*_{10i}; tot astfel sistemul

$$p_{0,1,i} = b_0 p^*_{0,2,i} + b_1 p^*_{0,2,i+2}$$

determină pe p_{02i}; tot așa sistemul

$$p_{0,1,i} = b_0 p^*_{0,2,i} + b_1 p^*_{0,2,i+2}$$

determină pe $p^*_{0,2,i}$. Raționamentul se aplică și la restul ecuațiilor ce intervin, adică prezintă particularitatea că, în ordinea dată mai sus, sistemul este de tip triunghiular, adică ecuațiile ce apar se împart în subsisteme de ecuații care se rezolvă prin ele însele sau cu ajutorul ecuațiilor dinaintea lor. Să mai remarcăm că legătura între $p_{i,j,k}$ și $p^*_{i,j,k}$ se face prin constantele ce intervin în sistemul (58′) și este realizată numai între un număr limitat (depinzînd de ordinul sistemului și numărul necunoscutelor) dintre necunoscutele $p_{i,j,k}$ și $p^*_{i,j,k}$.

Concluziile de mai sus sînt evident valabile și pentru sistemul (58), oricare ar fi n, m și p finite, iar p altul pentru fiecare ecuație din sistem. Acest fapt ne arată că oricare ar fi r, finit, numărul hipercomplex λ_r este complet și — în general — în mod unic determinat de relațiile (64).

Să considerăm acum o soluție analitică în jurul originei a sistemului (58),

$$U(x_0, x_1, \ldots, x_m ; y_1, y_2, \ldots, y_n) =$$

$$= \sum_{\substack{0 \\ \alpha,\beta}}^{\infty} a_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m ; \beta_1, \ldots, \beta_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \ldots y_n^{\beta_n} \qquad (65)$$

și să căutăm un sistem de numere $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \ldots$, în algebră, astfel încît să avem identic

$$U \equiv \text{Real} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r \omega^r \right). \qquad (66)$$

Grupînd expresia lui U, după polinoame omogene de gradul $0,1, \ldots, r, \ldots$, putem scrie

$$U = \sum_{r=0}^{\infty} U_r .$$

Am arătat însă că pentru r finit putem găsi totdeauna un λ_r, astfel încît să avem

$$U_r = \text{Real} \, (\lambda_r \omega^r)$$

și componentele lui λ_r se obțin dintr-un sistem triunghiular ce se poate rezolva din aproape în aproape. Cînd $r \to \infty$, componentele lui λ_r se obțin în același mod, însă se pot întîmpla mai multe cazuri. Primul caz, cel mai favorabil, apare cînd expresiile care dau pe p^* în funcție de p sînt convergente și în această situație lim λ_r, cînd $r \to \infty$, este un număr λ_∞, în algebră, cu o infinitate de componente care aparțin spațiului (m).

Al doilea caz intervine cînd componentele lui λ_r tind către ∞ cînd $r \to \infty$.

În această situație seria

$$\sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r \omega^r$$

poate avea un domeniu de convergență conținînd mai mult decît un punct și pentru ω aparținînd domeniului corespunzător putem scrie identitatea

$$U \equiv \text{Real} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r \omega^r \right).$$

Cazul ultim cel mai dificil, poate apărea cînd seriile care dau de p^* în funcție de p sînt complet nedeterminate. Să remarcăm însă încă o proprietate remarcabilă a sistemului (64) și anume că toți p^*se exprimă liniar cu ajutorul numerelor p. Cînd $r \to \infty$, expresiile care dau pe p^* în funcție de p devin serii în p cu coeficienți dați de constantele sistemului (58). Dacă seriile respective sînt *absolut sumabile Borel*, putem înlocui suma lor, complet nedeterminată, cu o sumă Borel. Într-adevăr, după cum am spus, în legăturile între p^*(și în cazul cînd $r \to \infty$), pentru determinarea lui λ_r intervine un număr finit din p^*, număr care depinde de m, n și de gradul sistemului și nu de r. Însă, după cum se știe, aceste relații se mențin cînd

înlocuim pe p^* cu sume Borel. Se vede astfel că numerele λ_r, în acest ultim caz, sînt înlocuite cu numerele λ'_r, ale căror componente sînt sumele Borel ale componentelor p^*ale lui λ_r (pentru r finit sau infinit) și avem și în această situație

$$U \equiv \sum_{r=0}^{\infty} (\lambda'_r \, \omega^r).$$

III. Soluții ale ecuațiilor cu derivate parțiale, liniare, neomogene, cu coeficienți constanți, de ordin oarecare, prin intermediul algebrelor infinite

14. *Algebre infinite asociate la ecuații cu derivate parțiale liniare, cu coeficienți constanți și neomogene.*

Fie acum ecuația diferențială cu derivate parțiale, neomogenă, cu coeficienți constanți, de ordinul n,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p+\beta=k}}^{n} C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\beta} \frac{\partial^k U}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p} \partial y^{\beta}} = 0 \qquad (67)$$

Căutînd soluții prin funcții monogene $f(\omega)$ de variabila ω

$$\omega = x_1 \varphi_1 + x_{2\varphi_2} + \ldots + x_p \varphi_p + \theta y \qquad (68)$$

se observă [6] că $f(\omega)$ este legat printr-o ecuație diferențială de ordinul n cu coeficienți constanți

$$\mu_0 f^{(n)} + \mu_1 f^{(n-1)} + \ldots + \mu_{n-1} f' + \mu_n f = 0$$

cu μ_i numere în algebră, deci $f(\omega)$ nu poate fi decît o exponențială de ω. Din acest motiv, renunțăm la funcții monogene și căutăm direct soluții de forma $\exp(\omega)$. Într-adevăr, punînd

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_p, y) = \exp(\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \ldots + \varphi_p x_p + \theta y)$$

sîntem conduși pentru elementele hipercomplexe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \theta$, la legătura

$$\sum_{k=0}^{n} C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_p^{\alpha_p} \theta^{\beta} = 0 \qquad (69)$$

$$\varphi_i^0 = 1, \qquad \theta^0 = 1$$

care se mai scrie, punînd în evidență pe θ,

$$\lambda_0 \theta^n + \lambda_1 \theta^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} \theta + \lambda_n = 0. \qquad (69')$$

Avem deci

$$\exp \omega = H_0 + \theta H_1 + \theta^2 H_2 + \ldots + \theta^{n-1} H_{n-1}$$

cu

$$H_i = \sum_{\substack{-\infty \\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}}^{+\infty} H^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}(x_1, x_2 \ldots, x_p, y) \, \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_p^{\alpha_p}.$$

Vom stabili cîteva proprietăți ale componentelor H^i.

a) Din modul cum sînt definite funcțiile H, ele sînt legate prin următoarele relații care se obțin derivînd parțial exp (ω) în raport cu x_k și y,

$$H^{k}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1},\ \alpha_i-1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_p} = \frac{\partial}{\partial x_i} H^{k}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}$$

$$H^{k-1}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} - \sum_{\gamma_1,\ldots,\gamma_p} \frac{c_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p,k}}{c_{0,0,\ldots,0,n}} H^{n-1}_{\alpha_1-\gamma_1,\ldots,\alpha_p-\gamma_p} = \frac{\partial}{\partial y} H^{k}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} \tag{70}$$

$$(c_{0,0,\ldots,0,n} \neq 0)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

și

$$\sum_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p} \frac{c_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p,0}}{c_{0,0,\ldots,0,n}} H^{n-1}_{\alpha_1-\gamma_1,\ldots,\alpha_p-\gamma_p} + \frac{\partial}{\partial y} H^{0}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} = 0,$$

unde, dacă $\alpha_i - \gamma_i$ sau $\alpha_i - 1$ sînt negativi, termenii corespunzători sînt identic nuli.

b) Funcțiile H sînt soluții ale ecuației (67). Vom verifica acest fapt pe ecuația

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^n U}{\partial x_i^n} = \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{71}$$

pentru care relațiile (70) devin

$$H^{0}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i-1,\alpha_{i+1},\ldots\alpha_p} = \frac{\partial}{\partial x_i} H^{0}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p},$$

$$\sum_{i=1}^{p} H^{0}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i-n,\alpha_{i+1},\ldots\alpha_p} = \frac{\partial}{\partial y} H^{0}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}. \tag{72}$$

Din prima relație obținem imediat

$$H^{0}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i-n,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_p} = \frac{\partial^n}{\partial x_i^n} H^{0}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$$

care combinată cu a doua confirmă afirmația făcută.

c) Funcțiile H sînt convergente în tot spațiul variabilei ω. Într-adevăr, o majorantă a modulelor componentelor lui exp ω este dată de [1]*)

$$U_s = \frac{1}{s!} A^{\frac{s}{n}} y^s \exp\left(\sum_{i=1}^{p} |x_i|\right),$$

unde

$$A = \sum_{\alpha_1,\ldots\alpha_p,\beta} \left| \frac{c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\beta}}{c_{0,0,\ldots,0,n}} \right|, \quad (c_{0,0,\ldots,0,n} \neq 0)$$

seria cu termenul general U_s fiind convergentă pentru orice x_i, y finiți.

d) Ecuația caracteristică (69′), independent de problemele care ne interesează în acest capitol, definește o algebră infinită, asociativă și

*) p. 619.

comutativă. Dacă considerăm în această algebră funcțiile monogene de variabila ω

$$f(\omega) = U_0 + \theta U_1 + \ldots + \theta^{n-1} U_{n-1}$$

$$U_i = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} U^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})\, \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_p^{\alpha_p}$$

$$\omega = x_1\varphi_1 + \ldots + x_p\,\varphi_p + \theta\, x_{p+1}$$

condițiile de monogenitate sînt [1]*)

$$\frac{\partial U^k_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i-1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_p}}{\partial x_j} = \frac{\partial U^k_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\alpha_j-1,\alpha_{j+1},\ldots\alpha_p}}{\partial x_i}, \quad (i, s \neq p+1, i \neq j),$$

$$\frac{\partial U^k_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_j-1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_p}}{\partial x_{p+1}} + \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_p} \frac{c_{\beta_1,\ldots,\beta_p,k}}{c_{0,0,\ldots,0,n}} \frac{\partial U^{n-1}_{\alpha_1-\beta_1,\ldots,\alpha_p-\beta_p}}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial U^{k-1}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial x_i}, \quad (i \neq p+1),$$

unde $k = 0,1, \ldots, n-1$, și α_i luînd toate valorile întregi între $-\infty$ și $+\infty$.

Se vede imediat că funcțiile H^i verifică relațiile de monogenitate, însă funcțiile U^k nu verifică relațiile (70). Acest fapt era de așteptat, întrucît $\exp(\omega)$ este o funcție monogenă în tot spațiul variabilei ω.

Dacă cosiderăm acum ecuația (67) *omogenizată* cu ajutorul variabilei x_0, atunci funcțiile

$$W_i = e^{x_0} \quad H^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$$

cu H^i date de (70) sînt soluții ale ecuației (67), omogenizată.

Reciproca, bineînțeles, nu este adevărată.

15. *Ecuații cu derivate parțiale liniare neomogene care admit soluții polinoame.*

Ne propunem să găsim condițiile pe care trebuie să le îndeplinească ecuația (67), pentru ca funcțiile H^i să fie polinoame. Acest fapt este echivalent cu a arăta că există un număr h, astfel încît pentru $s > h$ *toate polinoamele* $\bar{\lambda}^l$ în $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ ce intervin în

$$\theta^s = \bar{\lambda}_1\theta^{n-1} + \bar{\lambda}_2\,\theta^{n-2} + \ldots + \bar{\lambda}_{n-1}\,\theta + \bar{\lambda}^n \qquad (s > n)$$

au gradul inferior (gradul cel mai mic al monoamelor ce intervine în componența lor) crescător. În această situație urmează că pentru $s > h$ expresia

$$\frac{\omega^h}{h!}$$

nu va mai furniza componente pentru nici unul din polinoamele componente H, începînd de la un rang oarecare în jos.

*) p. 622.

Pentru a arăta acest fapt să pornim de la ecuația (69′) (pe care o scriem puțin modificată)

$$\theta^n = \lambda_1^0 \theta^{n-1} + \lambda_2^0 \theta^{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1}^0 \theta + \lambda_n^0, \tag{73}$$

din care obținem

$$\theta^{n+1} = (\lambda_1^0 \lambda_1^0 + \lambda_2^0) \theta^{n-1} + (\lambda_1^0 \lambda_2^0 + \lambda_3^0) \theta^{n-2} + \ldots$$
$$+ (\lambda_1^0 \lambda_k^0 + \lambda_{k+1}^0) \theta^{n-k} + \ldots + (\lambda_1^0 \lambda_{n-1}^0 + \lambda_n^0) \theta + \lambda_1^0 \lambda_n^0. \tag{74}$$

Dacă

$$\theta^{n+m} = \lambda_1^m \theta^{n-1} + \lambda_2^m \theta^{n-2} + \ldots + \lambda_k^m \theta^{n-k} + \ldots + \lambda_{n-1}^m \theta + \lambda_n^m \tag{75}$$

avem și

$$\theta^{n+m+1} = (\lambda_1^0 \lambda_1^m + \lambda_2^m) \theta^{n-1} + (\lambda_1^m \lambda_2^0 + \lambda_3^m) \theta^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (\lambda_k^0 \lambda_1^m + \lambda_{k+1}^m) \theta^{n-k} + \ldots + (\lambda_{n-1}^0 \lambda_1^m + \lambda_n^m) \theta + \lambda_1^m \lambda_n^0. \tag{76}$$

Vom stabili cîteva proprietăți de invarianță ale polinoamelor λ_i^{m+1} ce intră în componența lui θ^{n+m+1}:

α) Dacă toate polinoamele λ_i^0, (73), sînt de grad inferior zero, atunci toate polinoamele λ_i^m ce intervin în θ^{n+m} pentru orice $m \geqslant 0$ vor fi de grad inf. zero.

Într-adevăr, dacă polinoamele λ_i^0, sînt de grad inf. zero, din (74) se observă că și polinoamele λ_i^1 ce intervin în θ^{n+1} se bucură de această proprietate. Prin recurență, proprietatea se transmite polinoamelor λ_i^m.

β) Dacă în (73), polinomul λ_n^0 este de grad inf. r, iar celelalte polinoame sînt de grad inf. zero, această proprietate se menține pentru polinoamele λ_i^m ce intervin în componența lui θ^{n+m}, $m \geqslant 0$.

γ) Dacă λ_n^0, λ_{n-1}^0, $\ldots$, λ_{n-q}^0, $(n-q \neq 1)$, polinoame consecutive din (73) sînt respectiv de grad inf. $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_{n-q}$ *diferite de zero*, iar toate celelalte polinoame sînt de grad inf. zero, atunci această proprietate se menține, pentru λ_n^m, λ_{n-1}^m, $\ldots$, λ_{n-q}^m. Într-adevăr, conform lui (76) și (74) gradul inferior al lui λ_n^m, pentru $m \geqslant 1$, rămîne același, în timp ce gradul inf. al lui λ_{n-k}^m, sau rămîne neschimbat, sau se schimbă cu gradul inf. al lui λ_{n-k+1}^{m-1}, dacă gradul inf. al lui $\lambda_{n-k+1}^{m-1} <$ grad inf. λ_{n-k}^{m-1}. Putem spune deci că gradele inf. ale polinoamelor λ_{n-k}^m au tendința de a coborî spre cel mai mic dintre gradele inf. ale polinoamelor de la dreapta lor. De aici obținem imediat că dacă

$$\lambda_n^0 \geqslant \lambda_{n-1}^0 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{n-q}^0,$$

atunci gradul inf. al polinoamelor λ_{n-k}^m este stabil și egal cu al polinoamelor λ_{n-k}^0, iar dacă

$$\lambda_n^0 \leqslant \lambda_{n-1}^0 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-q}^0$$

atunci gradul inf. al tuturor polinoamelor λ_{n-k}^{m} tinde spre gradul inf. al lui λ_n^0.

δ) Să presupunem acum că $\lambda_\alpha^0, \lambda_{\alpha+1}^0, \ldots, \lambda_{\alpha+q}^0$, sînt $q+1$ polinoame din (73), $\alpha + q \neq n$, cu grad inf. $r_\alpha, r_{\alpha+1}, \ldots, r_{\alpha+q}$, diferite de zero, iar restul polinoamelor λ_k^0 de grad inf. zero. Avem

$$\lambda_\alpha^1 = \lambda_1^0 \lambda_\alpha^0 + \lambda_{\alpha+1}^0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{\alpha+q}^1 = \lambda_1^0 \lambda_{\alpha+q}^0 + \lambda_{\alpha+q+1}^0,$$

prin urmare pentru θ^{n+1}, numărul polinoamelor de grad inf. $\neq 0$ scade cu unul; urmează că există un rang s pentru care toți λ_i^s sînt de grad inf. zero. Acest rezultat subliniază atît *necesitatea* ca, în proprietatea (γ), λ_n^0 să aparțină șirului considerat, cît și faptul ca polinoamele $\lambda_n^0, \lambda_{\alpha_1}^0, \ldots, \lambda_{\alpha_q}^0$ să fie consecutive, deci $\alpha_1 = n-1, \ldots, \alpha_q = n-q$.

ε) Ca o consecință a celor de mai sus avem următorul rezultat:

Pentru ca să existe un rang h, astfel încît pentru $s > h$ toate polinoamele ce intervin în

$$\theta^s = \bar{\lambda}_1 \theta^{n-1} + \bar{\lambda}_2 \theta^{n-2} + \ldots + \bar{\lambda}_{n-1} \theta + \bar{\lambda}_n, \ (s > n),$$

să aibă gradul inferior strict crescător, este necesar și suficient ca toate polinoamele λ_i^0 din (73) să fie de grad inf. $\neq 0$.

Într-adevăr, din (74) se vede că λ_k^1, are sau gradul inf. lui λ_{k+1}^0 sau este de gradul inf. lui $\lambda_k^0 \lambda_1^0$, deci mărit.

Însă gradul inf. al lui λ_n^1 crește deoarece este gradul inf. al lui $\lambda_1^0 \lambda_n^0$. Se vede astfel că începînd de la un rang h, pentru $s > h$, toate polinoamele λ_i^{s-n} vor avea gradele inf. strict crescătoare față de λ_i^0.

Din cele de mai sus avem următoarele consecințe pentru ecuația (67).

Dacă ecuația (67), pe care o scriem sub forma

$$\left[\Delta_n + \frac{\partial}{\partial y}\Delta_{n-1} + \ldots + \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\Delta_1 - \frac{\partial^n}{\partial y^n}\right] U = 0,$$

are operatorii $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}, \Delta_n$, de ordinul unu cel puțin, în $\frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ adică sînt de forma

$$\Delta_k = \sum_{r=1}^{k} \sum_{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p = r} c_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p}^{(k,r)} \frac{\partial^r}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_p^{\beta_p}}, \qquad (77)$$

atunci toate componentele $H_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}^i$ pentru α_i finiți sînt polinoame.

Dacă cel puțin unul din operatorii Δ_k are $c_{0,0,\ldots,0}^{(k,0)} \neq 0$, atunci toate componentele $H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}^i$ sînt serii.

Trebuie însă să facem observația că rolul lui y poate fi luat de oricare din variabilele x_i. Este evident că ecuația (67), luînd pe un x_i în locul lui y, nu va avea în raport cu x_i forma menționată mai sus, pe care o are însă în raport cu y, deoarece acest fapt depinde de Δ_n, care este supus numai la restricția de a fi de grad inf. $\geqslant 1$. Urmează, conform rezultatelor (α, β, γ, δ, ε), că în această situație componentele H nu vor mai fi polinoame. Deducem de aici că funcțiile H din noua situație vor fi o combinație liniară între o infinitate de funcții H determinate în primul caz. În consecință rezultatul de mai sus poate fi îmbunătățit în modul următor :

O ecuație (67) (în care punem $y = x_{p+1}$) dacă printr-o transformare convenabilă se poate reduce la tipul

$$\left[\Delta_n + \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_{n-1} + \ldots + \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_i^{n-1}} \Delta_1 - \frac{\partial^n}{\partial x_i^n} \right] U = 0$$

numai pentru una oarecare din variabilele x_i cu Δ_k, operatori diferențiali disjuncți cu $\frac{\partial}{\partial x_i}$ de ordin inf. întîi cel puțin, atunci ecuația admite soluții polinoame.

Din rezultatele de mai sus să tragem cîteva concluzii. Ecuațiile (67) pot fi împărțite în două clase, clasa (P), formată de ecuațiile care admit soluții *și* polinoame, și clasa (S) formată de ecuațiile care nu admit soluții polinoame. Trecerea de la o clasă la alta, de exemplu de la clasa (S) la clasa (P), nu se poate face decît prin intermediul unei transformări care să realizeze implicit sau explicit această schimbare de structură.

Astfel, dacă luăm ecuația generalizată a căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - cu,$$

care aparține clasei (S) pentru $c \neq 0$, prin transformarea

$$u = e^{-ct} v$$

devine

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

care admite soluții polinoame, însă soluțiile primei ecuații se obțin prin intermediul lui exp ($-ct$) din soluțiile ecuației a doua.

Ecuația (67) poate fi scrisă în modul următor, în raport cu una din variabilele x_i,

$$\frac{\partial^n U}{\partial x_i^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} U}{\partial x_i^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{\partial U}{\partial x_i} + a_0 U =$$

$$= \Delta_1 \frac{\partial^{n-1} U}{\partial x_i^{n-1}} + \Delta_2 \frac{\partial^{n-2} U}{\partial x_i^{n-2}} + \ldots + \Delta_{n-1} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \Delta_n U \qquad (78)$$

cu a_i constante, iar operatorii Δ_i disjuncți în raport cu $\frac{\partial}{\partial x_i}$ și de grad inf. diferit de zero. Prin urmare, dacă $a_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) ecuația aparține clasei (P).

În același timp se vede că fiind dată o ecuație (67) oarecare, în $(p+1)$ moduri posibile, se poate însuma un operator în $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (i, fix) cu coeficienți constanți, astfel încît ecuația să aparțină clasei (P).

16. Ne propunem acum să găsim transformările care fac trecerea unei ecuații (67) din clasa (S) în clasa (P).

Dacă în (78) luăm pe $x_i = y$, operatorii Δ_i, fiind prin urmare de forma (77), o schimbare de funcție prin

$$U = V.\ \exp\ (ry), \tag{79}$$

introducînd numai un parametru arbitrar, r, nu permite decît să dispară termenul liber $r+a_{n-1}\ a_0$. Introducînd pe (79) în (78), $(x_i = y)$, avem

$$\frac{\partial^n V}{\partial y^n} + (r + a_{n-1})\frac{\partial^{n-1} V}{\partial y^{n-1}} + \ldots + (r^n + a_{n-1}\, r^{n-1} + \ldots + a_1 r +$$

$$+ a_0)\, V = \bar{\Delta}_1 \frac{\partial^{n-1} V}{\partial y^{n-1}} + \ldots + \bar{\Delta}_{n-1}\frac{\partial V}{\partial y} + \bar{\Delta}_n V \tag{78'}$$

cu $\bar{\Delta}_k$ de tipul (77).

Prin urmare, dacă r este o rădăcină a ecuației

$$r^n + a_{n-1}\, r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0, \tag{80}$$

termenul în U din (78) dispare. Deci avem, în general, n valori $r_1, r_2, \ldots, r_n$ care realizează acest fapt. Deoarece coeficientul lui $\frac{\partial^{n-k} V}{\partial y^{n-k}}$ din primul membru al ecuației (78') este derivata de ordinul $n - k$ în raport cu r a ecuației (80), urmează că transformarea (79) realizează trecerea ecuației (78) din clasa (S) în clasa (P) numai dacă a_k sînt coeficienții lui r^k din dezvoltarea

$$(r + \beta)^n$$

cu β oarecare, constant.

Dacă acum în ecuația (78') ($r = r_k$, deci coeficientul lui V e nul), facem o transformare liniară

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \alpha_{0,0}\, y + \alpha_{0,1}\, x_1 + \ldots + \alpha_{0,p}\, x_p \\ \bar{x}_k &= \alpha_{k,0}\, y + \alpha_{k,1}\, x_1 + \ldots + \alpha_{k,p}\, x_p \\ & \qquad\qquad (k = 1,2, \ldots, p) \end{aligned} \tag{81}$$

ea devine

$$\lambda_0 \frac{\partial^n V}{\partial \bar{y}^n} + \lambda_1 \frac{\partial^{n-1} V}{\partial \bar{y}^{n-1}} + \ldots + \lambda_{n-1}\frac{\partial V}{\partial \bar{y}} =$$

$$= \Delta_1^* \frac{\partial^{n-1} V}{\partial \bar{y}^{n-1}} + \ldots + \Delta_{n-1}^* \frac{\partial V}{\partial \bar{y}} + \Delta_n^* V,$$

cu Δ_k^* de forma (77). Dacă $(p+1)^n \geqslant n$ atunci putem determina constantele

$\alpha_{i,k}$ astfel ca $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ și astfel ecuația (78) să treacă din clasa (S) în clasa (P).

Să arătăm acum că dacă $(p+1)^2 < n$, atunci ecuația (78) (cu $a_0 = 0$) nu poate aparține clasei (P). Luînd $n = 3$, $p = 0$, obținem ecuația

$$\frac{d^3V}{dy^3} + \gamma_1 \frac{d^2V}{dy^2} + \gamma_2 \frac{dV}{dy} = 0,$$

care nu admite soluții polinoame, deoarece V este funcție numai de y. Excludem bineînțeles soluția banală $V = C$.

17. *Proprietăți ale polinoamelor* H. Să stabilim gradul polinoamelor componente H. Dacă omogenizăm ecuația caracteristică (69) sau (69′) cu ajutorul elementului φ_0, putem scrie

$$\exp \omega = H_0 + \theta H_1 + \ldots + \theta^{n-1} H_{n-1}$$

cu

$$H_i = \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p}^{\infty} H^i_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p, y)\, \varphi_0^{\alpha_0} \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_p^{\alpha_p};$$

gradul polinomului $H^i_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ este numărul

$$m = i + \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p.$$

Să considerăm toate polinoamele H^i de gradul $0,1,\ldots, m$. Ne propunem să arătăm că formează o bază, adică orice polinom de gradul m (evident neomogen) soluție a ecuației (67) se exprimă printr-o combinație liniară a lor.

Numărul acestor polinoame este dat de numărul elementelor distincte din

$$\varphi_0^{\alpha_0} \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_p^{\alpha_p} \theta^{\beta}, \qquad (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p + \beta = m)$$

$$(0 \leqslant \beta \leqslant n-1; \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant m)$$

și este

$$C^m_{m+p} + C^{m-1}_{m+p-1} + \ldots + C^{m-n+1}_{m+p-n+1} = C^m_{m+p+1} - C^{m-n}_{m+p-n+1}, \quad (m > n).$$

Dacă scriem ecuația (67) explicitată în raport cu $\frac{\partial}{\partial y}$

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n} = \Delta_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}} + \ldots + \Delta_{n-1} \frac{\partial}{\partial y} + \Delta_n,$$

se vede că toate derivatele parțiale în raport cu y, de la un rang $m \geqslant n$, ale unei soluții U, se pot exprima cu ajutorul derivatelor parțiale în raport cu x_i și a derivatelor parțiale în raport cu y pînă la ordinul $n-1$ incluiv.

Urmînd același raționament ca la ecuațiile simultane, se deduce că două polinoame, soluții ale ecuației (67), sînt identice, dacă coeficienții termenului liber și ai puterilor lui y pînă la ordinul $n-1$ sînt identici, acești coeficienți fiind, bineînțeles, polinoame de gradul $m, m-1, \ldots, m-n+1$, respectiv, în $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Întrucît numărul termenilor distincți din aceste polinoame este tot

$$C^m_{m+p-1} - C^{m-n}_{m+p-n-1},$$

urmează că se pot găsi, în general, în mod unic, $C^{m}_{m+p-1} - C^{m-n}_{m+p-n-1}$ constante, care să exprime acești coeficienți ca o combinație liniară a polinoamelor de gradul $0, 1, \ldots, m$, generate de $\exp \omega$. Prin urmare, polinoamele respective formează o bază.

Deoarece suma tuturor acestor polinoame este absolut convergentă urmează că orice combinație liniară între un număr finit sau infinit de astfel de polinoame, prin constante mărginite în ansamblul lor, conduce tot la o soluție a ecuației (67), convergentă în spațiul variabilei ω.

18. *Algebre infinite asociate la sisteme de ecuații cu derivate parțiale, liniare cu coeficienți constanți și neomogene.*

Să considerăm acum un sistem de m ecuații cu derivate parțiale, liniare, neomogene, cu coeficienți constanți, de ordin oarecare, cu o singură funcție necunoscută

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=k}}^{n} C^{(k,j)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} \frac{\partial^k U}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} = 0, (j = 1,2, \ldots, m); \tag{82}$$

în virtutea rezultatelor precedente nu putem căuta soluții decît prin exponențiale, deci, punînd

$$U = \exp \omega$$

$$\omega = x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 + \ldots + x_p \varphi_p$$

sîntem conduși la următoarele m ecuații caracteristice

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=k}}^{n} C^{(k,j)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_p^{\alpha_p} = 0, (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{83}$$

Dacă $p < m$, sistemul (83) este în general incompatibil, astfel încît calculele au sens pentru $p \geqslant m$. Pentru $p = m$, elementele hipercomplexe φ_i sînt separat legate prin ecuații de forma

$$a_0^i \varphi_i^s + a_1^i \varphi_i^{s-1} \ldots + a_{s-1}^i \varphi_i + a_s^i = 0, \tag{84}$$

cu a_k^i constante, deci algebra asociată este de ordin finit și este produsul direct al algebrelor definite de (84). Elementele bazei sale sînt

$$\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_p^{\alpha_p}$$

cu α_i finiți, și anume determinați de gradul ecuațiilor (84).

Dacă $p > m$, atunci $p - m$ din elementele φ_i rămîn nedeterminate și în acest caz ω aparține unei algebre infinite de ordinul ∞^{p-m}, iar ecuațiile caracteristice (84) au coeficienții a_k^i, polinoame în elementele φ_k, în număr de $p - m$ rămase disponibile. Pentru a înlătura dificultatea algebrică a determinării ecuațiilor caracteristice (84), vom considera sisteme de forma

$$\frac{\partial^n}{\partial y_i^n} + \Delta_{1,i} \frac{\partial^{n-1}}{\partial y_i^{n-1}} + \ldots + \Delta_{n-1,i} \frac{\partial}{\partial y_i} + \Delta_{n,i} = 0, (i = 1,2,3, \ldots, m) \tag{85}$$

$\Delta_{k,i}$ fiind operatori diferențiali *neomogeni*, în $x_1, x_2, \ldots, x_v$, adică, explicitate în raport cu operatorii diferențiali, $\frac{\partial}{\partial y_i}$. Punînd, în această situație,

$$\omega = \theta_1 y_1 + \theta_2 y_2 + \ldots + \theta_m y_m + x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_p \varphi_p,$$

ecuațiile caracteristice sînt

$$\theta_i^n + \lambda_{1,i}\,\theta_i^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1,i}\,\theta_i + \lambda_{n,i} = 0, (i = 1,2, \ldots, m) \tag{86}$$

cu $\lambda_{k,i}$ polinoame de gradul k în $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$. Avem așadar

$$\exp\,\omega = \sum_{\alpha} \theta_1^{\alpha_1}\,\theta_2^{\alpha_2} \ldots \theta_m^{\alpha_m} H_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m},\ (0 \leqslant \alpha_i \leqslant n-1)$$

cu

$$H_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} = \sum_{\beta} H^{(\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_m)}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p}(y_1 y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_p)\varphi_1^{\beta_1}\varphi_2^{\beta_2}\ldots\varphi_p^{\beta_p}$$

β_i luînd toate valorile întregi între 0 și $+\infty$.

Proprietățile funcțiilor H, stabilite pentru o singură ecuație se extind și în cazul mai multor ecuații. Derivînd pe $\exp\,\omega$ în raport cu x_j sau y_i obținem

$$\varphi_j \exp\,\omega = \sum_{\alpha} \theta_1^{\alpha_1} \ldots \theta_m^{\alpha_m} \frac{\partial H_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}}{\partial x_j}$$

$$\theta_i \exp\,\omega = \sum_{\alpha} \theta_1^{\alpha_1} \ldots \theta_m^{\alpha_m} \frac{\partial H_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}}{\partial y_i} \tag{87}$$

sau, dacă notăm în (86)

$$\lambda_{n-k,i} = \sum_{\substack{i=0 \\ \gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_p=i}}^{k} C^{(i,k)}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p}\,\varphi_1^{\gamma_1}\varphi_2^{\gamma_2} \ldots \varphi_p^{\gamma_p},$$

relațiile (87) sînt echivalente cu

$$H^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}_{\beta_1,\ldots,\beta_{j-1},\,\beta_j-1,\,\beta_{j+1},\ldots,\beta_p} = \frac{\partial H^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}_{\beta_1,\ldots,\beta_p}}{\partial x_j},\ (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{88}$$

$$H^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\,\alpha_i-1,\,\alpha_{i+1},\ldots\alpha_m)}_{\beta_1,\ldots,\beta_p} - \sum_{\gamma=0}^{\alpha_i} C^{(i,\alpha_i)}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p} H^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\,\alpha_i-1,\alpha_{i+1}\ldots,\alpha_m)}_{\beta_1-\gamma_1,\beta_2-\gamma_2,\ldots,\beta_p-\gamma_p} =$$

$$= \frac{\partial H^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}_{\beta_1,\ldots,\beta_p}}{\partial y_i},\ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{89}$$

În relațiile de mai sus se ține seama că termenii

$$H^{(\alpha_1,\ldots\alpha_{i-1}\,\alpha_i-1,\,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_m)}_{\beta_1,\ldots,\beta_p}$$

și

$$H^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}_{\beta_1-\gamma_1,\ldots,\beta_p-\gamma_p}$$

cu $\alpha_i - 1$ sau $\beta_i - \gamma_i$ negativi sînt identic nuli.

Se poate demonstra și în acest caz că funcțiile H, legate de relațiile (88) și (89), sînt soluții ale sistemului considerat.

Pentru ca funcțiile H să fie polinoame, adică sistemul (85) să admită soluții polinoame, ținînd seama de rezultatele de la cazul unei singure ecuații, se observă că acest fapt are loc cînd *toate* ecuațiile (86) au coeficienții $\lambda_{k.i}$ polinoame de grad inferior cel puțin egal cu unitatea în φ_i. Acest fapt este evident, întrucît dacă cel puțin una din ecuațiile sistemului nu admite soluții polinoame, chiar dacă celelalte soluții admit, această infirmitate a ecuației considerate o face să nu admită soluțiile celorlalte ecuații.

Faptul se poate arăta și direct, deoarece termenii care sînt de gradul inf. zero se mențin pentru orice puteri ale lui ω, și, deoarece algebra obținută este produsul direct dintre algebrele determinate de fiecare ecuație (5) în parte, apare, începînd de la un rang destul de depărtat s în toate componentele algebrei, termenii de forma $y_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\beta_p}$, oricare ar fi α_i, β_j, deci sistemul nu poate admite soluții polinoame.

În cazul cînd sistemul (85) admite soluții polinoame, omogenizînd ecuațiile (86) cu φ_0, și introducînd pe lîngă indicii care determină pe H și indicele β_0 dat de exponentul lui $\varphi_0^{\beta_0}$, adică

$$H_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} = \sum_p H^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p}\ \varphi_0^{\beta_0}\ \varphi_1^{\beta_1}\ldots\varphi_p^{\beta_p},$$

atunci gradul polinomului $H^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p}$ este dat de numărul întreg

$$s = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_p.$$

Se poate arăta și în acest caz că polinoamele de gradul $0, 1, \ldots, s$, formează o bază, adică orice polinom de gradul s, soluție a sistemului (85), se poate exprima cu ajutorul lor, printr-o combinație liniară cu coeficienți constanți. Raționamentul este asemănător cu cel făcut pentru sistemele omogene și se bazează pe principiul că derivatele parțiale de ordinul n sau superior lui n, în raport cu y_i, se pot exprima conform sistemului (85), numai cu ajutorul derivatelor în raport cu x_k și cu ajutorul derivatelor în raport cu y_i pînă la ordinul $n-1$ inclusiv. Acest fapt conduce la următorul rezultat și anume : două polinoame de gradul s, în y_i și x_k, soluții ale sistemului (85), sînt identice dacă polinoamele în $x_1, \ldots, x_q$, coeficienții lui

$$y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2} \ldots y_m^{\alpha_m}, \qquad (0 \leqslant \alpha_i \leqslant n-1),$$

sînt identice. Se constată însă că numărul polinoamelor de gradul $0, 1, \ldots, s$, furnizate de exp ω este egal tocmai cu numărul componentelor polinoamelor coeficienți ce intervin mai sus, deci constantele pot fi determinate în general în mod unic.

Este necesar să remarcăm că în sistemul (85) nu este obligatoriu ca ordinul fiecăreia din ecuațiile ce intervin să fie de gradul n, ci poate fi luat

variabil pentru fiecare ecuație (n_i). În această situație, în raționamentele de mai sus, nu se schimbă decît condițiile

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant n_i - 1$$

și, bineînțeles, derivatele parțiale în raport cu y_i, de la ordinul n_i în sus, se exprimă de astă dată cu ajutorul derivatelor în raport cu x_k și cu ajutorul derivatelor în raport cu y_i pînă la ordinul $n_i - 1$ inclusiv.

19. *Sisteme de ecuații cu derivate parțiale de ordin superior la care se pot asocia algebre infinite definite prin ecuații caracteristice.* Este natural să găsim acum forma generală a sistemelor de ecuații cu derivate parțiale, liniare, cu coeficienți constanți, omogene, cu mai multe necunoscute

$$\sum_{\alpha,\, i} a^{i,\, j}_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_p} \frac{\partial^n U_i}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} = 0, \quad (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n) \quad (90)$$
$$(i = 0,1,\ 2,\ \ldots,\ q)$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

cărora le putem găsi soluții, prin intermediul funcțiilor monogene, într-o algebră atașată sistemului (90), definită însă prin ecuațiile caracteristice ale elementelor bazei.

Punînd

$$\omega = x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_p x_p, \quad (91)$$

$$U_i = \text{Real}\,[\theta_i f(\omega)], \quad (92)$$

cu $f(\omega)$ o funcție monogenă de ω, obținem pentru θ_i condițiile

$$\sum_{\alpha,\, i} a^{i,\, j}_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p}\ \theta_0^{\alpha_0}\, \theta_1^{\alpha_1} \ldots \theta_{i-1}^{\alpha_{i-1}}\ \theta_i^{\alpha_i + 1}\ \theta_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots \theta_p^{\alpha_p} = 0 \quad (93)$$

$$(\theta_0 = 1)$$
$$(\theta_i^0 = 1)$$

din (90). Dacă $p < q$, atunci numărul elementelor θ_i se mărește pînă la q, astfel încît ω dat de (2) are formă redusă în algebră.

Dacă $q < p$, sistemul (93) are sens dacă și $p \leqslant m$. Pentru $p = m$, deoarece sistemul este omogen, însă conține și derivatele lui x_0, ecuațiile (93) se reduc prin rezolvare — dacă este posibilă — la un sistem echivalent unde fiecare din elementele θ_i $(i \neq 0)$ verifică o ecuație cu coeficienți constanți

$$\lambda_0^i\, \theta_i^{n_i} + \lambda_1^i\, \theta_i^{n_i - 1} + \ldots + \lambda_{n_i - 1}^i\, \theta_i + \lambda_{n_i}^i = 0, \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p) \quad (94)$$

și prin urmare algebra definită de (93) este produsul direct al acestor p a gebre, deci o algebră de ordin finit. Dacă $p < n$, atunci $n - p$ din elementele θ_i rămîn arbitrare, sînt conținute în coeficienții λ_k^i din (94) și algebra atașată sistemului (90) este o algebră infinită de ordinul ∞^{n-p}, obținîndu-se tot ca produsul direct al algebrelor definite de (94).

Toate dificultățile algebrice dispar dacă sistemul (90) este de forma

$$\frac{\partial^n}{\partial y_i^n}\Delta_0^i + \frac{\partial^{n-1}}{\partial y_i^{n-1}}\Delta_1^i + \ldots + \frac{\partial}{\partial y_i}\Delta_{n-1}^i + \Delta_n^i = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m) \tag{95}$$

cu $\Delta_0^i, \Delta_1^i, \ldots, \Delta_n^i$ operatori diferențiali, asupra lui U_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, q)$, de ordinul $0, 1, \ldots, n$ respectiv, cu coeficienți constanți, în variabilele $x_0, x_1, \ldots, x_p$. Într-adevăr punînd

$$U_k = \text{Real}\,[\varphi_k f(\omega)] \tag{96}$$

(sau mai general

$$U_k = H_c\,[\varphi\, f_k(\omega)]$$

înțelegîndu-se prin această notație că se ia o componentă hipercomplexă, aceeași însă pentru orice k), unde de astă dată am notat cu

$$\omega = \theta_1 y_1 + \theta_2 y_2 + \ldots + \theta_m y_m + x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_p x_p,$$

iar $f(\omega)$ este o funcție monogenă de ω. Sistemul (95), ținînd seama de (96), ne conduce la

$$\theta_i^n \lambda_0^i + \theta_i^{n-1} \lambda_1^i + \ldots + \lambda_{n-1}^i \theta_1 + \lambda_n^i = 0, \tag{97}$$

cu λ_k^i polinoame în $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, dacă $q < p$ și în $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$, dacă $q > p$.

Proprietățile algebrei astfel definite se pot obține cu ușurință ca și pentru ecuațiile simultane omogene.

20. *O aplicație.* Să considerăm ca aplicație sistemul

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\, \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,j}^k \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{98}$$

întîlnit într-o problemă de geometrie [7] cu

$$a_{i,j}^k = a_{j,i}^k \tag{99}$$

și

$$a_{he}^i\, a_{i,j}^k = a_{i,e}^k\, a_{h,j}^i. \tag{100}$$

Dacă punem

$$U = f(\omega),$$

$$\omega = x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_n\,\theta_n,$$

sîntem conduși pentru θ_i la relațiile

$$\theta_i\,\theta_j = \sum_k a_{i,j}^k\,\theta_k \tag{101}$$

care împreună cu (99) și (100) determină în mod unic o algebră de ordinul n, asociativă și comutativă.

Dacă toți $a_{i,j}^k$ sînt nuli, sîntem în cazul algebrei studiate de V. S. Feodorov [8].

Putem însă renunța la (99) și (100) luînd din (101) numai următoarele n ecuații

$$\theta_1 \theta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{1,i}^k \theta_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{102}$$

și algebra este în mod unic determinată conform lui [2]*), deci sistemul (98) în condițiile de mai sus este echivalent cu

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,i}^k \frac{\partial U}{\partial x_k}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{103}$$

Deoarece sistemul (98), respectiv (103), este neomogen, nu putem căuta soluții decît prin exponențiale și, cum algebra asociată este de ordin finit, componentele exponențialei sînt serii. Pentru ca totuși sistemul (98) să admită soluții polinoame, este neapărat necesar ca algebra asociată să fie nilpotentă, adică fiecare din elementele bazei să verifice o relație de forma

$$\theta_i^{n+1} = 0. \tag{104}$$

Într-adevăr, în această situație

$$\exp \omega = \sum_{\alpha} \theta_1^{\alpha_1} \theta_2^{\alpha_2} \ldots \theta_n^{\alpha_n} P_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

și pentru oricare din $\alpha_i \geqslant n + 1$ coeficientul corespunzător este nul. Ne propunem să arătăm că, dacă

$$\theta_1^{n+1} = 0, \tag{105}$$

atunci și celelalte elemente ale bazei verifică o relație identică (104).

Din relațiile de compoziție (102) avem, dacă $\theta_1 = \mu_1$ și $\theta_k = \mu_k$,

$$\mu_1 \mu_i = \sum_{k=1}^{n} a_{1,i}^k \mu_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{α}$$

iar pentru $\theta_1 = \lambda_1$ și $\theta_k = \lambda_k$ avem

$$\lambda_1 \lambda_i = \sum_{k=1}^{n} a_{1,i}^k \lambda_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{β}$$

Deoarece $a_{1,i}^k (i \neq 1)$ sînt arbitrari, dacă $\mu_1 = 0$, urmează că $\mu_k = 0$. Presupunînd acum că $\mu_1 = \lambda_1 = 0$, ecuațiile (α) și (β) conduc la sistemul

$$\sum_{k=2}^{n} a_{1,i}^k (\mu_k - \lambda_k) = 0, \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

care în baza ipotezelor făcute nu conduce decît la soluția

$$\mu_k = \lambda_k.$$

De aici deducem că, dacă ecuația (105) are toate rădăcinile nule, toate ecuațiile caracteristice ale elementelor bazei θ_i $(i \neq 1)$ au de asemenea numai rădăcini nule, deci algebra definită de (103) este nilpotentă.

*) p. 136.

КОММУТАТИВНЫЕ БЕСКОНЕЧНЫЕ АЛГЕБРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С СИСТЕМАМИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В одной из предыдущих статей [2] автор ассоциировал с линейным, однородным уравнением с частными производными и с постоянными коэффициентами любого порядка, бесконечную ассоциативную и коммутативную алгебру, определяемую характеристическим уравнением.

В настоящей статье этот метод распространяется на системы линейных уравнений с частными производными первого или высшего порядка с одной или несколькими неизвестными функциями и с постоянными коэффициентами, причем в этом случае алгебра определяется соотношениями, описывающими перемножения элементов базы.

В первой части статьи системы линейных и однородных уравнений с частными производными первого порядка с постоянными коэффициентами разбиваются на классы по алгебрам, которые могут быть ассоциированы с ними. Системе следующего вида

$$a^j_{0,i}\frac{\partial V^0}{\partial x^i}+a^j_{1,i}\frac{\partial V^1}{\partial x^j}=b^j_{k,i}\frac{\partial W^k}{\partial x^i}$$

$$(i=0,1,\ldots,n)$$
$$(j=1,2,\ldots,p)$$
$$(k=1,2,\ldots,s)$$

ассоциируется бесконечная ассоциативная и коммутативная алгебра с базисными элементами

$$\theta_i\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_s^{\alpha_s} \qquad (i=0,1,\ldots,r;\ \theta_0=1,\varphi_i^0=1)$$

порядка ∞^s, в которой моногенная функция переменной

$$\omega=\theta_i x^i+\varphi_j x^{r+j} \qquad (i=0,1,\ldots,r;\ j=1,2,\ldots,s;\ r+s=n)$$

дает решения системы, если принять

$$V^0=\text{Real}\,f(\omega)$$
$$V^1=\text{Real}\,[\theta_1\ f(\omega)]$$
$$W^k=\text{Real}\,[\varphi_k f(\omega)]$$

Затем рассматриваются системы одновременных однородных уравнений формы (58), которые легко допускают построение элементов алгебры. Исследуются решения, порожденные целыми рядами $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\omega^n$ и указывается, что компоненты ω^n образуют базу многочленов, решений системы (58), другими словами всякий однородный многочлен степени n, являющийся решением системы (58). может быть выражен их линейной комбинацией. Из этого выводится, что для аналитического в начале решения U координат си-

стемы (58), данного выражением (65), можно найти в алгебре последовательность чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$, чтобы имело место тождество

$$U \equiv \text{Real}\left(\sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r \, \omega^r \right).$$

Полученные результаты распространяются на неоднородные уравнения с частными производными и постоянными коэффициентами любого порядка или на системы подобных уравнений с одной или несколькими неизвестными функциями. В частности ставится задача определения неоднородных уравнений с частными производными, которые допускают многочленные решения. Статья заканчивается рассмотрением в этом смысле случая, когда ассоциированная алгебра имеет конечный порядок. Таким образом, снова находится условие, что алгебра должна быть нильпотентной.

ALGÈBRES INFINIES, COMMUTATIVES, ASSOCIÉES À DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

(RÉSUMÉ)

Dans un travail antérieur [2], l'auteur a associé, à une équation aux dérivées partielles, linéaire, homogène, à coefficients constants d'un ordre quelconque, une algèbre infinie, associative et commutative, définie par une équation caractéristique.

Dans le présent travail, cette méthode est étendue à des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre ou d'ordre supérieur, à une ou plusieurs fonctions inconnues, linéaires, à coefficients constants, l'algèbre étant, cette fois, définie par les relations de composition des éléments de la base.

Dans la première partie du travail, on sépare les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires et homogènes à coefficients constants, en classes, selon les algèbres qui peuvent être associées. A un système de la forme suivante :

$$a^j_{0,i} \frac{\partial V^0}{\partial x^i} + a^j_{1,i} \frac{\partial V^1}{\partial x^j} = b^j_{k,i} \frac{\partial W^k}{\partial x^i}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, s)$$

on lui associe une algèbre infinie associative et commutative d'éléments de la base

$$\theta_i \; \varphi_i^{\alpha_1} \; \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_s^{\alpha_s} \qquad (i = 0, 1, \ldots, r; \quad \theta_0 = 1, \quad \varphi_i^0 = 1)$$

d'ordre ∞^s, dans laquelle une fonction monogène de la variable

$$\omega = \theta_i \, x^i + \varphi_j \, x^{r+j} \quad (i = 0, 1, \ldots, r; \quad j = 1, 2, \ldots, s; \quad r + s = n)$$

fournit des solutions du système, pourvu que

$$V^0 = \text{Réel } f(\omega)$$

$$V^1 = \text{Réel } [\theta_1 f(\omega)]$$

$$V^k = \text{Réel } [\varphi_k f(\omega)].$$

On considère ensuite des systèmes d'équations simultanées, homogènes, de la forme (58), qui permettent de construire facilement les éléments de l'algèbre. On étudie les solutions engendrées par les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n$ et on démontre que les composantes de ω^n forment une base de polynômes qui sont des solutions du système (58) ou, ce qui revient au même, tout polynôme homogène de degré n, qui est une solution du système (58) peut être exprimé par une combinaison linéaire de ces composantes. On en déduit que, pour une solution U, analytique autour de l'origine, du système (58), donnée par (65), on peut trouver dans l'algèbre une suite de nombres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$, qui satisfassent à l'identité.

$$U \equiv \text{Réel } (\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_r \omega^r).$$

Les résultats obtenus s'étendent à des équations aux dérivées partielles à coefficients constants, non homogènes, d'ordre quelconque, ou à des systèmes d'équations de ce genre, à une ou à plusieurs fonctions inconnues. On pose surtout le problème de déterminer les équations aux dérivées partielles non homogènes admettant des solutions polynômes. Le travail conclut par une application en ce sens, dans le cas où l'algèbre associée est d'ordre fini. On retrouve ainsi la condition pour que l'algèbre soit nilpotente.

BIBLIOGRAFIE

1. Marcel N. Roşculeţ, *Algebre infinite asociate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare.* Studii şi cercetări matematice, t. VI, nr. 3—4, 1955, p. 567—643.
2. — *Algebre liniare asociative şi comutative şi funcţii monogene ataşate lor.* Studii şi cercetări matematice, t. VI, nr. 1—2, 1955, p. 135—173.
3. — *Algebre cu radical, asociative şi comutative şi funcţii monogene.* Studii şi cercetări matematice, t. VII, nr. 1—2, 1956, p. 147—178.
4. Ernest Snapper, *Partial Differentiation and Elementary Divisors.* Annals of Mathematics, iulie 1945, vol. 46, nr. 3, p. 388—408.
5. Marcel N. Roşculeţ, *O teorie a funcţiilor de o variabilă hipercomplexă din spaţiul cu trei dimensiuni.* Studii şi cercetări matematice, t. V, nr. 1—2, 1954, p. 361—401.
6. Courant-Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik.* 1937, vol. II, p. 150.
7. P. Mocanu, *Spaţii cu conexiune afină constantă, echivalente în mare cu spaţiul euclidian.* Comunicările Acad. R.P.R., t. II, nr. 7—8, iulie - august 1952, p. 389—395.
8. V. S. Feodorov, *O monoghennosti hiperkomplexrîh funkţii.* Mat. Sbornik, 1953, t. 32 (74), nr. 2, p. 249—254.
9. P. W. Ketchum, *Solutions of Partial Differential Equations by Means of Hypervariables,* Amer. Journ. Math., 1932, t. 54, p. 253.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 3—4, 1956

FUNDAMENTELE MECANICII *)

DE

VICTOR VÂLCOVICI

§ 1. Poziția mecanicii în cadrul general al științei

Științele pozitive au drept scop studiul cantitativ al lumii materiale sub toate aspectele.

Primul aspect al lumii materiale este acela al unei grămezi de obiecte sau, mai exact, al unei mulțimi de grămezi de obiecte. Tendința omului, de a distinge între ele diversele grămezi de obiecte alcătuind lumea, a condus la noțiunea de număr cel puțin pentru grămezile mai puțin numeroase. Noțiunea de număr s-a dezvoltat ulterior pentru sine însăși, degajată fiind de grămada pe care o reprezintă ; astfel, au luat naștere primele discipline matematice, anume *disciplinele aritmetice* (algebra, analiza, calculul funcțional etc.).

Tendința omului de a distinge între ele obiectele aparținînd unei aceleași grămezi a condus la alte caracteristici ale materiei, dintre care poate cele mai izbitoare sînt poziția obiectului în spațiu și forma sa. Pe linia cercetării acestor noi caracteristici ale lumii materiale, au apărut noțiunea de *distanță* precum și conceptul de *spațiu*. Disciplina matematică de bază care a preluat studiul sistematic al lumii sub acest aspect este *Geometria*.

Distincția mai intimă între corpuri se face cu cercetarea altor caracteristici ale materiei, privind schimbările corpurilor în legătură cu *timpul*, atunci cînd corpurile sînt supuse la anumite influențe sau operațiuni ; așa sînt schimbările corpurilor privind fie poziția lor, fie structura sau compoziția lor. Acestea sînt fenomenele *mecanice*, *fizice* și *chimice*, care formează obiectul științelor naturii : *Mecanica*, *Fizica*, *Chimia*.

În special, schimbarea poziției corpurilor în spațiu, în legătură cu scurgerea timpului, adică mișcarea lor, formează obiectul *Mecanicii*. Mai precis, am putea da următoarea definiție :

Mecanica este disciplina care se ocupă cu studiul cantitativ al stărilor de mișcare a materiei precum și al stării ei de repaus, ținînd seama de acțiunea forțelor asupra materiei.

Această definiție se apropie poate mai mult decît altele, de ceea ce se înțelege de obicei prin *Mecanică*. Evident însă că numai după ce vom fi parcurs tot domeniul disciplinei vom putea avea o noțiune completă și

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în ședința din 18 iunie 1956.

precisă — sau aproape — despre *Mecanică*. În orice caz, noțiunea de repaus introdusă în definiție poate produce oarecare confuzie sau nedumeriri, deoarece „repaus absolut" nu există pentru materie; pe de altă parte, o definiție a mecanicii din care ar fi lipsit „repausul materiei", în sensul în care se întrebuințează de obicei această expresie, ar fi fost lipsită de unul din capitolele ei cele mai importante, mai ales prin aplicațiile ei în tehnică; iar concepția repausului ca un caz particular al mișcării, pe care o propun unii pentru a elimina repausul din Mecanică, dă naștere la alte dificultăți, asupra cărora voi reveni.

Din cele ce preced, s-ar putea trage concluzia că disciplinele pur matematice (adică cele aritmetice și cele geometrice) fac parte din *științele naturii*, deoarece și ele s-au născut tot din nevoia sau tendința de a cunoaște cît mai bine și cît mai precis lumea materială. Aș dar, ele fac parte din *Fizică* (ἡ φυσική) în sensul larg aristotelic al cuvîntului. Trebuie totuși să menționăm că disci linele matematice au luat cu timpul o dezvoltare mult prea mare în raport cu suportul lor fizic, pentru ca ele să mai poată fi considerate ca un prim capitol al *Fizicii*. Ele s-au eliberat de legătura inițială cu lumea concretă și și-au creat un domeniu de cercetare aproape independent de izvorul originar, fizic. De aceea, disciplinele matematice sînt considerate, cu drept cuvînt, în faza lor actuală de dezvoltare, ca niște discipline *abstracte*. Ele continuă a primi sugestii din lumea concretă a *Fizicii* pentru dezvoltarea lor, însă rareori se țin strîns de firul cercetării realității fizice, sau, în sfîrșit, atunci cînd o fac, disciplina matematică respectivă ia alt nume — cum este cazul cu *Mecanica*, dacă aceasta este considerată ca o disciplină matematică. Elementul euristic de seamă, care joacă un rol preponderent în cercetarea matematică pură, este *imaginația științifică*; aceasta primește, este drept, sugestii importante din domeniul realității fizice, cum am menționat mai sus, însă clădirea disciplinei se face de obicei dincolo de realitate.

Prin linia aceasta de analizare a cugetării omenești, în procesul de cunoaștere a lumii materiale, pornind de la „simplu" la „complex", se vede că imediat după disciplinele matematice care au fost caracterizate ca discipline abstracte, apare *Mecanica*; ea reprezintă deci prima fază de studiu cantit tiv al materiei, fiind în același timp cea mai simplă și cea mai cuprinzătoare dintre toate disciplinele științelor naturii.

Așezată pe linia „simplu-complex", imediat după disciplinele matematice, mecanica a putut păstra caracterul deductiv matematic al cercetărilor ei, aceasta și din cauză că fenomenul mecanic, mișcarea, fiind mai simplu decît alte fenomene naturale, se lasă a fi tratat aproape exclusiv cu mijloace matematice. Instrumentul principal de cercetare în mecanică va fi deci instrumentul matematic, iar expunerea ei se va face „more geometrico": se va porni de la un număr restrîns de adevăruri admise ca evidente, așadar, privite ca axiome; luîndu-le ca fundament, se va clădi apoi pe ele tot edificiul disciplinei. Din punctul acesta de vedere, s-ar putea afirma că mecanica este o disciplină matematică.

Trebuie totuși să menționăm că între mecanică, de o parte, și o disciplină matematică oarecare, de alta, sînt deosebiri importante. Aceste deosebiri trebuie căutate mai ales în raportul dintre disciplina mecanicii și realitatea fizică. Disciplina matematică este clădită pe un număr de definiții, prin mijlocirea cărora se creează ființe matematice avînd anumite

proprietăți, fie individuale, fie de interdependență; aceste proprietăți sînt stabilite prin propoziții, unele (în număr restrîns) avînd caracter axiomatic, altele caracter deductiv. Atît definițiile, cît și propozițiile (axiomatice sau deductive) trebuie să îndeplinească anumite condiții pe care le cere „logica"; nu este însă necesar ca ele să fie conforme cu realitatea fizică.

Mecanica începe și ea, ca și disciplina matematică, prin a-și crea o serie de concepte abstracte, cum ar fi spre pildă punctu material, corpul rigid ș.a., prin mijlocirea unor definiții care le precizează proprietățile de bază; însă aceste concepte — niște abstracții, se înțelege, ca și în disciplina matematică — sînt ținute a reprezenta o imagine a realității și deci a nu se depărta prea mult de ea, așa încît construirea lor este foarte mult îngrădită de această condiție. Legătura între conceptele astfel create se face prin propoziții avînd caracter fie axiomatic, fie deductiv. Însă propozițiile aparținînd mecanicii nu numai că trebuie să împlinească condițiile impuse de „logică", așa cum se întîmplă cu propozițiile din orice disciplină matematică, dar ele trebuie să mai fie și conforme cu realitatea.

Această distincție între disciplinele matematice, de o parte, și mecanica, de alta, are, evident, un caracter calitativ; în consecință, ea implică o nedeterminare de graniță, care se lămurește abia prin „stilul" de lucru al mecanicii. Pe cînd în disciplina matematică accentul principal se pune pe calculul și pe fenomenul abstract matematic, în elaborarea mecanicii sîntem preocupați necontenit ca prin calculele pe care le întreprindem, să ne apropiem cît mai mult de fenomenul concret, fizic; pe cînd în disciplinele abstracte ale matematicii, calculul și ideea matematică, independentă de realitate, formează scopul cercetării, în mecanică scopul principal al cercetării îl formează detectarea fenomenului concret și reprezentarea lui cît mai aproape de aspectul său real, iar dezvoltarea matematică este unul din mijloacele mecanicii pentru a-și atinge scopul. Mecanica este o *disciplină fizică*, avînd „stilul" de lucru al științelor naturii.

Prin urmare, dezvoltarea matematică este un mijloc, un instrument de lucru, nu un scop al mecanicii. Însă trebuie să menționăm că disciplina matematicii constituie instrumentul cel mai important de cercetare în mecanică. Construirea întregii discipline a mecanicii se poate face, cum am mai spus-o, „more geometrico", pornind de la un număr restrîns de adevăruri axiomatice. Este drept că pînă în prezent nu există încă o axiomatizare complet riguroasăa mecanicii, în sensul în care a realizat D a v i d H i l b e r t una pentru geometrie; nu există poate și din cauza unei anumite nedeterminări care este legată organic de unele concepte fundamentale ale mecanicii, cum ar fi conceptul de masă, de forță, și chiar acela de spațiu și de timp. Această lipsă însă nu împiedică disciplina mecanicii de a lua o formă matematică, după cum geometria poseda o atare formă cu mult înainte de a fi apărut opera de axiomatizare a lui D a v i d H i l b e r t. Mecanica este deci o *disciplină fizică, avînd o structură matematică*. Ea reprezintă postul cel mai avansat și cel mai important al cuceririlor matematicii în domeniul științelor naturii; este vorba de cuceriri în care cuceritorul caută să fie de folos, fără a denatura scopul urmărit de elementele cucerite.

Au fost matematicieni în trecut, care priveau mecanica drept o ramură sau un capitol al Analizei matematice. L a g r a n g e, în introducerea

mecanicii sale analitice, declară că a scris toată mecanica fără a se folosi nici măcar de vreo figură geometrică în desfășurarea ei, înțelegînd prin aceasta că și-a putut dezvolta toată disciplina fără a recurge la vreun sprijin concret. Lucrările de mecanică din veacul al XIX-lea au adus însă o limpezire a ideilor în această privință. În prezent, mecanica este, cum am spus mai sus, considerată ca o disciplină fizică, un compartiment important al științei care se ocupă cu cercetarea naturii (ἡ φυσική), iar cercetările matematice care eventual au rădăcini sau motive de inspirație din fizică, însă care sînt preocupate numai de desfășurarea abstracțiunilor analitice, fără a simți nevoia unei autoverificări cu realitatea, rămîn cercetări matematice, deși cîteodată își iau titluri din mecanică.

Structura matematică a mecanicii îi împrumută acestei discipline atmosfera de certitudine și de precizie pe care o au matematicile. Din cauza aceasta, mecanica este privită ca un model din punct de vedere structural, către care trebuie să tindă oricare altă știință a naturii. Pînă azi, mecanica a rămas capitolul cel mai întins și mai cuprinzător al științelor naturii, al fizicii (ἡ φυσική), care să admită o prezentare riguros matematică. Aceasta se explică prin faptul că obiectul mecanicii, mișcarea materiei, deși reprezintă un fenomen foarte întins, foarte răspîndit, avînd același grad de întindere ca însăși materia, este totuși un fenomen simplu — cel mai simplu dintre fenomenele naturale — dacă se poate separa de altele, împreună cu care se prezintă observației noastre.

Generalitatea fenomenului mișcării în natură, pe de o parte, simplitatea și supleţea sa în acceptarea limbajului riguros matematic, pe de alta, au făcut pe unii cercetători să caute în el o concepție generală a lumii, *concepția mecanicistă*. Cum ecuațiile mecanicii ne dau putința să determinăm pozițiile și vitezele tuturor particulelor materiale alcătuind universul, în orice moment din trecut sau din viitor $t = (-\infty, +\infty)$, dacă cunoaștem pozițiile și vitezele la un moment dat, spre pildă, în momentul de față, atunci se poate afirma, spuneau mecaniciștii, că mecanica ne dezvăluie tot trecutul și tot viitorul universului, cu condiția ca Analiza matematică să ne dea mijlocul matematic de a găsi soluțiile unui sistem de ecuații diferențiale [1].

Acest fel simplist de a privi problema universului este departe de realitate. Fenomenele naturale nu se pot reduce numai la mișcarea materiei, așa cum pretind mecaniciștii, ci ele sînt determinate și de alți factori naturali, unii cunoscuți, alții numai bănuiți, care sînt ireductibili la fenomenul simplu mecanic. Pe măsură ce fizica realizează noi descoperiri, se vede tot mai clar că imaginea mecanicistă a lumii este o imagine nesatisfăcătoare, deci necorespunzătoare. Mișcarea este un aspect important al fenomenului natural privind materia, însă, deosebit de mișcare, materia mai posedă și alte însușiri, care se evidențiază pe linia unor fenomene deosebite de fenomenul mișcării. Din acest punct de vedere, mecanica se prezintă ca o disciplină care este nevoită să abstragă din complexul de fenomene, acela al mișcării; o atare abstracție se justifică prin faptul că de cele mai multe ori mișcarea se poate separa de celelalte fenomene din complex, fără prea mari inconveniente pentru aspectul complexului, fie că fenomenul mișcării ar fi fenomenul dominant, care imprimă aspectul său specific întregului complex, așa că restul ar apărea ca un fel de adaus de minimă importanță, într-o primă aproximație, fie că mișcarea ar apărea

ca un aspect care se poate suprapune peste aspectul celorlalte fenomene pentru a obține fenomenul natural în întregul său. Așa, spre pildă, mișcarea planetelor pe orbitele lor este un fenomen dominant mecanic, pe lîngă care fenomenele termic, electromagnetic etc., care însoțesc mișcarea planetelor pe orbită, pot fi tratate ca secundare într-o primă aproximație; mișcarea meteoriților pe traiectoriile lor, care ar traversa atmosfera pămîntească, se poate studia separat de fenomenul încălzirii lor pînă la incandescență, prin frecare, precum și de fenomenul corespunzător luminos, rămînînd ca apoi, prin suprapunere, să se poată reconstitui complexul întregului fenomen.

Mecanica fiind primul pas spre studiul sistematic al fenomenelor naturale, se va clădi pe observațiile cele mai simple și cele mai comune pe care le va face omul scrutînd lumea din preajma sa. Omul va observa că această lume este alcătuită din *corpuri* — porțiuni de materie — care ocupă un loc în *spațiu* și care-și pot schimba, cu *timpul*, locul din spațiu. Pentru a putea distinge corpurile între ele, omul va căuta o discriminare după *formă* și după *greutate*; această din urmă însușire a corpurilor, însușirea de a fi grele, trebuie să-l fi izbit pe primul cercetător foarte de timpuriu.

Vom încerca, așadar, să clădim disciplina mecanicii de la noțiunile și conceptele cele mai comune cu care trebuie să fi venit omul în contact la început și anume: *spațiu*, *materie*, *greutate*, *timp*, considerîndu-le cel puțin deocamdată, ca prime. Vom clădi astfel o mecanică mai întîi proprie fenomenelor de la suprafața pămîntului, pentru ca printr-un proces de extindere, însoțit de unul de abstracție, să eliberăm apoi mecanica de pecetea ei pămîntească și să o facem valabilă pentru tot Universul. Eliberarea vine o dată cu introducerea conceptului de *masă*.

§ 2. Spațiul

Vom porni de la ideea că lumea materială, precum și fenomenele legate de ea, au loc în spațiul fizic pe care-l vom numi *spațiu real* (S.R.).

În particular, locul materiei este spațiul real.

Structura lui ne permite a distinge în el puncte, fie discret așezate, fie formînd linii și suprafețe continue; se mai pot distinge în el direcții, sensuri și unghiuri între direcții și între sensuri; în sfîrșit, se poate măsura distanța între două puncte și deschiderea unui unghi.

Disciplina mecanicii își creează o imagine schematică a spațiului real, care va fi *spațiul de operație* (de lucru) *al Mecanicii* (S.M.). În acest spațiu schematic va trebui să regăsim proprietățile și conținutul spațiului real; va trebui să regăsim în particular puncte, linii, suprafețe, direcții, sensuri, unghiuri ș.a.m.d.

Între spațiul mecanicii (S.M.), de o parte, și spațiul real (S.R.) de alta, vom presupune că se poate stabili o corespondență punctuală, continuă, biunivocă pentru orice puncte situate la distanță finită de observator, precum și între configurațiile de puncte din cele două spații, așa fel încît proprietăților acestor configurații într-unul din spații să le corespundă proprietăți identice în celălalt.

În virtutea acestei corespondențe vom putea deduce proprietățile și fenomenele din S.R. studiind proprietățile și fenomenele corespunzătoare în S.M. În consecință, în mecanică ne vom mărgini de a studia

fenomenele în spațiul schematic și vom spune că am studiat fenomenele corespunzătoare din spațiul real.

Alegerea spațiului mecanicii nu este arbitrară; ea este comandată de tendința disciplinei de a reprezenta realitatea cît mai bine. Într-o primă și bună aproximație calitatea aceasta o are *spațiul euclidian în trei dimensiuni*, pe care-l vom nota în cele ce urmează cu E_3. De aceea, Mecanica newtoniană l-a adoptat ca spațiu de operații S.M. Unele fenomene privind viteze foarte mari față de cele obișnuite nu mai pot fi cuprinse în această schemă newtoniană, așa încît mecanica einsteiniană, care se ocupă cu astfel de fenomene, va abandona schema E_3 și o va înlocui cu o alta mai potrivită, anume o multiplicitate cu patru dimensiuni, de structură riemanniană, una dintre dimensiuni jucînd rolul timpului, sau chiar o multiplicitate mai complicată decît aceasta.

Vom înțelege prin *fenomen mecanic* imaginea fenomenului din S.R. în S.M., așa încît prin expresia „fenomenul se petrece în spațiu" vom înțelege că „imaginea fenomenului mecanic se petrece în imaginea spațiului fizic", adică în S.M., cu alte cuvinte, în mecanică vom fi preocupați de fenomenele din spațiul creat în vederea studiului matematic al fenomenului fizic. Trecerea de la rezultatele obținute pe cale matematică, la interpretarea lor fizică, se va face pe o cale în sens invers, fără nici o dificultate.

Unele fenomene ne vor permite de a reduce spațiul la două dimensiuni, la un plan, spațiu pe care-l vom nota, spre prescurtare, cu E_2; altele vor admite chiar o reducere a spațiului la o singură dimensiune, adică la o linie dreaptă, spațiu pe care-l vom nota, spre prescurtare, cu E_1.

Trebuie să spunem însă că spațiile de un număr de dimensiuni mai mic decît trei se pot prezenta cîteodată avînd o structură mai complicată decît cea euclidiană. Se poate întîmpla, spre pildă, ca fenomenul mecanic să se petreacă, în esență, pe o suprafață curbă dată S, sau pe o linie curbă dată L, în care caz, mișcarea se poate studia pe suprafața S sau pe curba L, făcînd abstracție de spațiul E_3, în care sînt cufundate aceste configurații și servindu-ne numai de coordonatele curbilinii de pe suprafața S, respectiv de pe curba L. Suprafața S poate fi considerată astfel ca un spațiu riemannian cu două dimensiuni, a cărui metrică reiese din expresia elementului de arc de pe S, exprimat în funcție de coordonatele curbilinii respective; în mod analog, curba L poate fi privită ca un spațiu riemannian cu o singură dimensiune.

Trebuie să menționăm că vom folosi în mecanică și alte spații decît cel euclidian sau cel riemannian. În special, în mecanica analitică vom avea să considerăm spațiul figurativ al coordonatelor generalizate, precum și spațiul fazelor, ambele fiind niște ajutoare prețioase la studiul fenomenelor.

Ele însă nu intervin decît ca artificii matematice, așa încît nu pot fi puse alături de spațiul E_3 sau de spațiul einsteinian, pentru că nu admit corespondența biunivocă cu spațiul real.

Vom mai menționa că dintre cele două spații, cel euclidian E_3 și cel einsteinian, care se vor folosi în mecanică, spațiul E_3 va fi cel obișnuit, pe care-l vom presupune la baza cercetării, cînd nu vom menționa nici o specificare.

§ 3. Materia. Masa

1. *Masa.* Corpurile ocupînd cîte un loc în S.R. vor avea drept imagine în mecanică, *domenii* rezultînd prin corespondența biunivocă definită mai sus. Vom atribui acestor domenii din E_3 unele proprietăți geometrice și fizice, care s-ar putea obține printr-o completare a corespondenței menționate.

Proprietatea fizică fundamentală a corpurilor la suprafața pămîntului este greutatea:

a. *Toate corpurile sînt grele.*

Această proprietate a corpurilor (deci a materiei) poate fi transpusă în E_3 împreună cu însuși mecanismul experimental care pune în evidență greutatea: tensiunea firului de care este atîrnat corpul sau deformarea unui resort sau, în sfîrșit, o schemă a balanței de cîntărire.

O proprietate fundamentală a greutăților este *ordonarea*:

b. *Greutățile corpurilor pot fi ordonante în* E_3.

Greutățile G_1 și G_2 a două corpuri C_1 și C_2 pot fi ordonate în E_3 cu ajutorul balanței sau cu ajutorul deformării unui resort folosit în S.R. în acest scop; se poate stabili pe calea aceasta una din următoarele trei relații:

$$G_1 > G_2, \tag{3.1}$$

$$G_1 = G_2, \tag{3.2}$$

$$G_1 < G_2, \tag{3.3}$$

în mod univoc; existența uneia dintre ele exclude pe celelalte două.

În cele ce urmează vom enunța proprietăți care au loc, prin intermediul corespondenței menționate, atît în E_3, cît și în S.R.

Dacă compoziția materială a corpurilor C_1 și C_2 este aceeași, vom spune că corpul C_1 conține *mai multă sau mai puțină materie* decît corpul C_2, după cum e valabilă relația (3.1) sau relația (3.3); în cazul relației (3.2) vom spune că cele două corpuri conțin fiecare aceeași cantitate de materie.

Vom admite apoi o proprietate de *adițiune*, pentru greutăți compuse din două părți și anume:

c. *Două corpuri* C_1 *și* C_2 *pot fi considerate laolaltă, alcătuind astfel un singur corp* C_3 *din punctul de vedere al greutății.*

d. *Greutatea corpului* C_3 *este egală cu suma* $C_1 + C_2$ *a greutăților* C_1 *și* C_2 *ale corpurilor* C_1, C_2 *respectiv.*

Aceste însușiri dau putința de a se *măsura* greutatea, luîndu-se drept unitate, greutatea unui corp standard, de exemplu greutatea unui dm^3 de apă — kgf sau kilopond.

O dată cu ordonarea greutăților se poate stabili experimental legea lui Hooke — o relație liniară și omogenă între deformarea resortului și forța de deformare — care ne conduce la construirea dinamometrului.

Pentru corpuri avînd aceeași compoziție am obținut astfel un mijloc de a le ordona după cantitatea de materie, ba chiar de a le măsura cantitatea de materie corespunzătoare, fie cu ajutorul balanței, fie cu ajutorul dinamometrului.

Conceptul „masă" necesar construirii mecanicii este în strînsă legătură cu noțiunea de „greutate". În scopul de a contura conceptul „masă" vom enunța următoarele însușiri ale materiei, în continuarea însușirilor a, b, c, d :

e. *Orice corp C posedă o masă m.*

f. *Într-un loc oarecare pe suprafața pămîntului masele* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *ale corpurilor* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *sînt mărimi pozitive, proporționale cu greutățile respective* $G_1, G_2, \ldots, G_n$, *adică vom avea*

$$\frac{m_1}{G_1} = \frac{m_2}{G_2} = \ldots = \frac{m_n}{G_n} = \frac{1}{g}, \tag{3.4}$$

notînd cu $1/g$ *factorul de proporționalitate, factor care poate fi luat în mod arbitrar.*

Din această proprietate deducem că prin șirul (3.4) nu vom putea determina fiecare masă în parte, chiar dacă am cunoaște în mod precis greutățile $G_1, G_2 \ldots, G_n$; vom putea însă determina raportul între două mase m_1 și m_2 :

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{G_2}{G_1}.$$

Legătura aceasta dintre masă și greutate ne spune că masa este, ca și greutatea, o mărime susceptibilă de a fi măsurată, pornind de la masa unui corp standard drept masă unitate, spre pildă, de la masa corpului care are greutatea de 1 kgf — masa de 1 kg.

Din cele ce preced putem trage concluzia că masa poate și ea fi considerată, ca și greutatea, ca reprezentînd cantitatea de materie pentru corpuri avînd aceeași compoziție.

Cu privire la conceptul „cantitate de materie" trebuie să facem următoarea observație : experiența ne arată, cu ajutorul dinamometrului, că greutatea unui corp variază pe suprafața pămîntului, cînd ne mutăm din loc în loc. Această constatare experimentală ne conduce la proprietatea ciudată că un corp oarecare posedă cantități de materie variabile depinzînd de locul unde facem măsurarea ei.

Pentru a evita această ciudățenie vom defini cantitatea de materie, nu prin greutatea, ci prin masa corpului, și vom postula în același timp următoarea proprietate :

g. *Masa unui corp este o mărime independentă de locul unde o măsurăm.*

De aici rezultă că factorul de proporționalitate, reprezentînd raportul dintre greutate și masă, pe care l-am notat mai sus cu $1/g$, variază, ca și greutatea, o dată cu locul de pe suprafața pămîntului. De cele mai multe ori, cîntărirea, adică măsurarea greutății unui corp, se face cu balanța. Aceasta determină raportul dintre greutatea corpului de cîntărit și greutatea corpului unitate ; cum raportul dintre greutăți este egal cu raportul dintre mase, rezultă că numărul care exprimă greutatea aflată prin acest fel de cîntărire, este același pe toată suprafața pămîntului.

Altfel se petrec lucrurile, dacă se face cîntărirea cu dinamometrul ; atunci greutatea măsurată cu dinamometrul, nemaireprezentînd un raport, apare variabilă pe suprafața pămîntului.

Pentru a înlătura definitiv acest inconvenient vom conveni ca unitatea de masă, *kilogramul*, să fie masa unui decimetru cub de apă pură la temperatura de 4°C. O dată stabilită unitatea de masă, vom putea determina masa oricărui corp la suprafața pămîntului prin cîntărire, ținînd, bineînțeles, seama de observațiile pe care le-am făcut mai sus cu privire la greutate. Așadar, masa unui corp se va exprima, în orice loc, prin greutatea sa determinată cu balanța și luînd drept unitate de greutate, greutatea decimetrului cub de apă la 4°C. Masa poate fi măsurată și prin greutatea corpului determinată cu dinamometrul, dar în acest caz dinamometrul va trebui să aibă o gradație diferită de la un punct la altul pe suprafața pămîntului, potrivit variației pe care o încearcă greutatea decimetrului cub de apă cînd ne deplasăm din loc în loc. Masa se va exprima totdeauna printr-un număr pozitiv m.

Acest mod de a introduce „masa" prin mijlocirea greutății corpului la suprafața pămîntului, are inconvenientul de a lega măsura masei de operația de cîntărire la *suprafața pămîntului*. Inconvenientul se înlătură însă prin observarea că toate corpurile sînt grele nu numai la suprafața pămîntului, ci și la suprafața oricărei planete pe care s-ar afla, iar proprietatea (3.4) de proporționalitate între masă și greutate se menține ca și pe pămînt; factorul de proporționalitate g se schimbă de la planetă la planetă, firește; însă masa măsurată prin greutate, așa cum am operat pe pămînt, își păstrează aceeași valoare, oricare ar fi planeta pe care ne-am afla.

Putem merge mai departe, înlocuind planeta printr-un corp de dimensiuni mici, printr-un meteorit, spre pildă, sau chiar printr-un punct material. Corpul C, a cărei masă vrem să o determinăm, va avea o greutate și față de meteorit, sau față de punctul material, care înlocuiește planeta, căci greutatea corpului nu este altceva decît manifestarea atracției gravitaționale exercitate de pămînt, de planetă, de meteorit sau de punctul material considerat, asupra corpului C. Greutățile corpului C față de aceste diverse corpuri vor fi diferite între ele, însă operația cîntăririi, așa cum am făcut-o la suprafața pămîntului, ne va duce la aceeași măsură pentru masa corpului C. Rezultă astfel că este de ajuns a avea la dispoziție încă un corp C', diferit de C, pentru a putea calcula masa corpului C, prin mijlocirea „greutății" acestui corp C față de C'; de altfel, tot așa vom putea determina masa corpului C' prin mijlocirea „greutății" acestui corp față de C.

Este drept că dacă nu am dispune decît de un singur corp C, atunci nu i-am putea determina masa prin procedeul descris; cu alte cuvinte, dacă Universul ar fi alcătuit dintr-un singur corp C, atunci n-am fi în stare să determinăm masa corpului C. Trebuie să recunoaștem însă că, dacă Universul s-ar reduce la un singur corp, masa acestui corp ar fi un concept inutil.

În mecanica newtoniană vom admite următoarea însușire a masei:

h_1. *Masa unui corp este constantă.*

Se înțelege prin aceasta că, dacă nu i se răpește corpului din materie și nici nu i se adaugă nimic, masa sa rămîne aceeași.

Această proprietate generală a masei, care-i întărește caracterul menționat mai sus, de a indica oarecum cantitatea de materie a corpului, stă în directă legătură cu *principiul conservării materiei*.

În mecanica relativistă (einsteiniană) această însușire a masei este înlocuită prin următoarea :

h_2. *Masa unui corp este funcție de viteza sa.*

2. *Punctul material.* Vom introduce acum un nou concept abstract, *punctul material* în E_3, care ne va fi de mare folos în procesul de construire a mecanicii.

Vom admite că printr-un proces la limită, petrecut în spațiul fizic, se poate obține un corp ocupînd un singur punct în spațiul mecanicii. Un atare corp redus la un punct se numește *punct material.* Vom admite că punctul material posedă o *masă* diferită de zero.

Punctul material este în mecanică reprezentarea aproximativă a corpurilor de dimensiuni foarte mici, atunci cînd aceste dimensiuni pot fi neglijate într-o primă aproximație. Uneori însă, vom considera chiar corpuri de dimensiuni mari, cum ar fi planetele sistemului solar și chiar soarele însuși, drept puncte materiale. Justificarea unui atare procedeu o putem găsi în faptul că dimensiunile unei planete și chiar acelea ale soarelui, sînt foarte mici în raport cu distanțele dintre aceste corpuri, așa încît în problemele unde dimensiunile planetei nu intervin decît prin raportul dintre aceste dimensiuni și distanțele dintre planete, planeta poate fi considerată ca un punct material într-o primă aproximație.

Masa m a punctului material este o caracteristică fizică a sa. Punctul material este complet determinat din punct de vedere mecanic, prin poziția sa în spațiul E_3, în fiece moment și prin masa sa m.

3. *Sisteme de puncte materiale. Continuum.* Un număr oarecare n de puncte materiale așezate discret în spațiu în pozițiile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și avînd respectiv masele $m_1, m_2, \ldots, m_n$ alcătuiesc un *sistem de puncte materiale* pe care-l vom desemna pe scurt prin simbolul (A) sau (A_i). Suma $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ se numește *masa totală a sistemului* sau simplu *masa sistemului.*

Pentru studiul fenomenului mecanic privind sisteme de puncte materiale, se impune împărțirea lor în două categorii : *sisteme deformabile* și *sisteme nedeformabile.*

Un sistem (A_i) de puncte se numește *nedeformabil* sau *rigid,* dacă toate distanțele dintre punctele ce-l alcătuiesc luate două cîte două sînt invariabile cu timpul. În caz contrar, adică dacă cel puțin una din aceste distanțe este variabilă cu timpul, sistemul de puncte considerat se numește *deformabil.*

Ca o consecință semnalăm proprietatea că unghiul dintre dreptele A_iA_j și A_iA_k, i, j, k fiind trei numere oarecare din șirul $1, 2, \ldots, n$, este invariabil, dacă sistemul (A_i) este nedeformabil.

Dacă un domeniu D conex, oarecare, din spațiu este complet ocupat de materie, în sensul că fiecare punct al domeniului D este ocupat de cîte un punct material, atunci se zice că domeniul D este ocupat de un *mediu continuu material* sau de un *continuum material.*

Vom presupune că masa Δm a materiei conținută într-un volum oricît de mic $\Delta\tau$ este de ordinul de mărime a lui $\Delta\tau$ și deci că raportul $\frac{\Delta m}{\Delta\tau}$

are o limită finită pozitivă μ, cînd $\Delta\tau$ tinde la zero,

$$\mu = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta \tau}. \tag{3.1}$$

Limita μ poate depinde de poziția punctului la care s-a redus $\Delta\tau$: ea poartă numele de *densitate* sau *masă specifică* (raportată la unitatea de volum). Funcția μ este *dată* pentru un mediu continuu cunoscut.

Dacă μ este o constantă în tot domeniul D, mediul continuu considerat se zice *omogen*; în caz contrar, *neomogen*.

Vom presupune că funcția μ de poziția punctului este integrabilă în sensul lui Riemann în tot domeniul D, adică integrala

$$M = \int_D \mu \, d\tau \tag{3.2}$$

luată pe tot domeniul D există. Mărimea M reprezintă *masa mediului continuu* considerat.

Putința de a divide masa M a mediului continuu în mase elementare Δm corespunzătoare elementelor de volum $\Delta\tau$ va apropia mediul continuu de un sistem de puncte. În adevăr, să presupunem că domeniul D ocupat de mediul continuu σ, de masă M, este divizat într-un număr foarte mare n de volume foarte mici $\Delta\tau$. Masa Δm, conținută într-un asemenea volum $\Delta\tau$, va fi aproximativ dată de relația (3.1)

$$\Delta m = \mu \, \Delta\tau, \tag{3.3}$$

μ avînd valoarea corespunzătoare unui punct arbitrar dat al volumului $\Delta\tau$. Aproximația va fi cu atît mai bună, cu cît elementele $\Delta\tau$ vor fi mai mici, în virtutea relației (3.1).

Vom stabili o corespondență biunivocă $\mathcal{C}$ între masele Δm (volum $\Delta\tau$), de o parte, și un sistem S de n puncte materiale (A), fiecare punct A al sistemului fiind situat oriunde în interiorul volumului $\Delta\tau$ corespunzător, sau pe suprafața care-l mărginește, iar masa punctului fiind egală cu masa Δm din mediul continuu σ. Masa totală a sistemului S este egală cu $\sum \Delta m$, mărime care este egală cu masa M a mediului σ, așa încît vom putea scrie și la limită

$$\lim_{\Delta m \to 0} \sum \Delta m = M. \tag{3.4}$$

Rezultă că pentru calculul masei M a mediului σ putem înlocui mediul prin sistemul S de puncte materiale A, trecînd la limită ($\Delta m \to 0$).

Acest procedeu de a înlocui mediul continuu σ prin sistemul S de puncte materiale, care pentru calculul masei este pe deplin justificat, ne sugerează folosirea lui și pentru alte calcule. Sînt unele proprietăți importante ale sistemelor de puncte materiale, care se cer a fi extinse și la medii continue ; extinderea se poate face numai prin înlocuirea mediului continuu σ printr-un sistem S de puncte materiale. O atare înlocuire va fi, bineînțeles, cu atît mai justificată din punct de vedere fizic, cu cît volumele $\Delta\tau$, respectiv masele Δm, vor fi mai mici. Cu modul acesta, problemele și proprietățile legate de aflarea centrului maselor, a momentelor de inerție, precum și de teoremele generale, care se formulează numai pentru sisteme

de puncte materiale, vor căpăta un înțeles și pentru medii continue. Sumele care vor interveni în formularea proprietăților privind sistemele de puncte materiale se vor transforma, la limită, în integrale, și atunci cînd aceste integrale vor exista, vom conveni a privi proprietățile sistemului de puncte ca aparținînd mediului continuu σ.

Prin urmare, vom admite următorul postulat:

Proprietățile unui sistem S de puncte materiale (A) obținut prin corespondența biunivocă $\mathcal{C}$ între punctul A și elementul de masă Δm al unui mediu continuu σ vor fi considerate la limită ca aparținînd mediului σ.

Un mediu continuu este imaginea reprezentativă a mai tuturor corpurilor din natură, așa cum le percepem într-un prim aspect al lor: apa, aerul, o piatră, o bucată de lemn etc. Cercetarea mai atentă a structurii corpurilor ne-a condus azi la ideia că materia are o structură corpusculară (molecule, atomi), așa încît mediul continuu apare ca o reprezentare ipotetică a ei. Cum însă corpusculele din care sînt alcătuite corpurile sînt foarte mici și foarte numeroase (ca 3.10^{22} molecule într-un cm^3 de apă, adică 30 de miliarde într-un micron cub), se poate accepta ipoteza unui continuum pentru descrierea fenomenelor legate de mișcarea aparentă a materiei ca o primă aproximație.

Fără această aproximare a materiei ar trebui să ne ocupăm de soarta fiecărui corpuscul în parte, ținînd seama, bineînțeles, de interacțiunile dintre toate corpusculele alcătuind corpul considerat. Un atare procedeu ar fi legat de două dificultăți mai importante: *a*) numărul cel mare al corpusculelor ne-ar obliga la metode statistice de lucru, care de cele mai multe ori nu sînt mai precise decît acelea bazate pe ipoteza mediului continuu; *b*) însăși natura materială și structura corpusculului este necunoscută.

Din aceste motive mecanica teoretică a acceptat ipoteza mediului continuu.

Vom face aici un examen sumar al ipotezei mediului continuu, pentru a ne da seama mai precis de gradul corespunzător de aproximare, încercînd a pune în evidență genul erorii legată de ea.

Vom observa în acest scop că oricît de mare ar fi numărul corpusculelor conținute într-un cm^3 de materie, dacă acest număr este finit, procesul la limită prin divizarea corpului considerat în volume mici $\Delta\tau$, care să tindă la zero, ne va conduce la volume dintre care unele ar mai conține abia cîte un singur corpuscul (considerat punctual), iar altele ar fi complet goale de materie. Relația fundamentală (3.3) care fixează distribuția masei în corp va da $\mu = 0$ în cazul volumelor $\Delta\tau$ goale de materie, iar pentru volumele elementare care ar conține cîte un corpuscul material, am avea pentru μ valori infinit de mari. Ar rezulta astfel pentru μ o funcție discontinuă luînd valoarea zero în toate punctele domeniului D, cu excepția punctelor ocupate de corpusculele materiale, unde ar lua valori infinit de mari. Pentru a evita această situație ar trebui să oprim procesul la limită, într-o fază în care numărul corpusculelor conținute în oricare din volumele $\Delta\tau$ încă ar mai fi foarte mare; am obține astfel pentru raportul $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta\tau}$ cîte o valoare finită, diferită de zero pentru fiecare volum elementar $\Delta\tau$. Am avea deci o funcție discontinuă de speța întîia pentru a reprezenta pe μ în D, însă distribuția valorilor lui μ ar depinde de felul în care se face divizarea domeniului D în volume elementare $\Delta\tau$, așa încît

însușirea caracteristică a integralei, de a fi o limită independentă de felul cum este divizat domeniul D în volume elementare $\Delta\tau$ ar dispărea. Prin urmare, suma $\sum \Delta m$ nu ar mai putea fi transformată într-o integrală.

Dacă totuși, obligați de motive și împrejurări de natură algoritmică, vom continua să înlocuim suma $\sum \Delta m$ (și altele similare pe care le vom mai întîlni) prin integrale, vom comite o eroare a cărei evaluare este imposibilă cîtă vreme nu posedăm cunoștințe mai precise în privința naturii materiale și a structurii corpusculului (moleculă, atom, electron, proton etc.).

Înlocuirea sumelor prin integrale, așa cum se practică ea în mecanică, este bazată pe ipoteza că eroarea acestei aproximări cade sub limita mărimilor fizice observabile, ipoteză pe care deocamdată nu o putem justifica decît prin controlul experimental al rezultatelor, așa cum se justifică de altfel și celelalte ipoteze cu caracter axiomatic, ale mecanicii. Cu această ipoteză ne va fi îngăduit de a trata corpurile ca fiind efectiv porțiuni de medii continue, simplificînd astfel în mod simțitor calculele corespunzătoare, care altfel ar trebui să ia forma impusă de structura corpusculară a materiei.

Mediul continuu se zice *nedeformabil* sau *rigid*, dacă el își păstrează forma și structura sa interioară tot timpul. Mai toate corpurile solide pot fi privite într-o primă aproximație ca medii nedeformabile.

Dacă, dimpotrivă, mediul considerat își schimbă cu timpul forma sau structura interioară sau și una și alta el se numește *deformabil*. Ca exemplu am putea cita apa, aerul și în general toate fluidele. Chiar corpurile solide sînt în ultimă analiză deformabile, deoarece dacă sînt supuse la eforturi mari exterioare, ele își modifică forma. O vargă de oțel supusă la întindere se lungește, deci își schimbă forma. O bucată de ceară solidă asupra căreia exercităm o presiune cu un corp dur, cu o pecete rigidă, spre pildă, păstrează desenul pe care i l-a imprimat pecetea. Mecanica face distincția între cele două forme de deformări, a oțelului și a cerei. Alungirea vergei de oțel, produsă de forțele de întindere, durează numai atîta timp cît acționează aceste forțe; dacă ele încetează, de a mai lucra, varga revine la lungimea ei inițială. Astfel de corpuri se numesc *solide elastice*. Amprenta făcută de pecete asupra cerei rămîne și după ce am încetat de a mai apăsa pecetea dură pe suprafața cerei; deformația are un caracter permanent, iar corpul care prezintă o astfel de deformare este un *solid plastic*.

În orice caz, pentru deformarea solidelor este necesar să exercităm un efort asupra lor. Mediile fluide, însă, cum ar fi apa, aerul, au proprietatea de a se deforma fără intervenția vreunei forțe de afară. Această proprietate este *caracteristică* pentru fluide.

Dintr-un alt punct de vedere, anume din punctul de vedere al volumului pe care-l ocupă, fluidele se împart în două categorii;

1) *fluide incompresibile*, care deformîndu-se, își păstrează volumul și

2) *fluide compresibile* care își schimbă și volumul o dată cu forma.

Tipul fluidelor incompresibile sînt *lichidele*, iar tipul fluidelor compresibile îl formează *gazele*.

În realitate nu există nici medii nedeformabile, nici fluide incompresibile, adică nu se cunoaște corp solid care supus la forțe îndeajuns de mari, să nu se deformeze și de asemenea, nu există nici un fluid care supus la presiuni îndeajuns de mari să nu se comprime. Ambele aceste categorii, solidul rigid și fluidul incompresibil, sînt niște abstracții, create în vederea

simplificării calculelor. În cazul cînd deformările, respectiv comprimările, sînt destul de mici, pentru a fi neglijate, calculele se simplifică în mod simțitor uneori, așa încît abstracțiile astfel create conduc la rezultate care pot fi obținute relativ ușor pe cale matematică și care pot fi de folos problemei pusă mecanicii, relativ la aceste medii.

Vom admite și cazul cînd materia s-ar putea prezenta sub o formă mixtă : continuu în care s-ar afla puncte materiale. În cazul acesta vom folosi axiomele *c*) și *d*) pentru tot ceea ce privește sistemul material astfel constituit*); cu alte cuvinte vom avea de tratat un sistem de puncte, deoarece mediul continuu este reductibil, în ultimă analiză, la un sistem de puncte.

§ 4. Concepția „acceleratistă" și concepția „impulsistă" a masei

Am introdus la § 3 conceptul de masă servindu-ne de proprietatea generală a corpurilor la suprafața pămîntului, de a fi grele, ceea ce revine la a prezenta masa ca un coeficient al accelerației pentru a obține expresia forței. Vom numi „acceleratistă" concepția aceasta a masei.

În mecanica relativistă concepția acceleratistă a masei se izbește de o dificultate : vectorul accelerației nu mai are același suport cu vectorul forță, așa cum se întîmplă în mecanica newtoniană. Din această cauză ecuațiile de mișcare ale punctului material, în mecanica relativistă, pun în evidență două feluri de mase : masa longitudinală și masa transversală. Se poate evita o atare complicație scriind ecuațiile de mișcare cu ajutorul impulsului (viteza multiplicată cu masa transversală). Sîntem conduși astfel a admite pentru masă o origine „impulsistă".

E natural atunci să ne întrebăm, dacă n-ar fi preferabil să pornim chiar în mecanica newtoniană de la o concepție „impulsistă" a masei, abandonînd concepția clasică „acceleratistă". Marele prestigiu pe care l-a căpătat noțiunea de „impuls" în timpul din urmă, în fizică în general, în mecanica relativității în special, a determinat pe unii autori să dea preferință concepției „impulsiste" a masei, față de concepția „acceleratistă". Iată, spre pildă, ce spune Hermann Weyl, unul dintre cei mai reprezentativi și mai cunoscuți autori, care apără punctul de vedere „impulsist" : ideea că o porțiune de materie, corpul, constă dintr-o substanță care ar fi egală cu masa sa, a fost deja depășită (überwunden) de Galileu; „căci pentru Galileu masa nu este o cantitate de substanță" ci un coeficient dinamic de proporționalitate a impulsului („Impetus" „Stosswucht") unui corp avînd o viteză dată"**).

Se înțelege că se poate construi mecanica pornind de la impuls ca noțiune primară și definind masa ca raportul dintre impuls și viteză. Însă cînd e vorba să alegem unul dintre cele două sisteme, „accelaratist" și „impulsist", se impune o cercetare mai adîncă a avantajelor și a inconvenientelor fiecăruia dintre ele.

Mai întîi trebuie să observăm că impulsul este o noțiune dinamică, depinzînd și de viteză. Prin urmare, dacă vrem să individualizăm un punct

*) Întrebuințînd noțiunea de integrală Radon-Stieltjes se pot obține formule omogene pentru masă totală, centre și momente de inerție etc.

**) H. Weyl [9], p. 197—198.

material prin impulsul său, așa cum o facem prin masa sa, va trebui să ne precizăm nu numai valoarea impulsului, ci și valoarea vitezei.

Să presupunem că ne-am împăca, în definitiv, cu această complicație pe care, de altminteri, o întîlnim și la determinarea masei relativiste, cînd avem iarăși nevoie de mărimea vitezei. Dar se pune întrebarea: ce se întîmplă în cazul cînd punctul considerat se află în stare de repaus față de reper? Ce devine masa concepută ca raport între impuls și viteză pentru cazul unui punct material avînd viteza egală cu zero, adică avînd impulsul nul? Masa punctului ne apare în acest c z sub forma nedeterminată $\frac{0}{0}$; adică *masa de repaus* a punctului, o mărime de o importanță deosebită prin utilizarea ei așa de frecventă în viața de toate zilele, nu poate fi determinată în mod simplu, folosind raportul dintre impuls și viteză.

Pentru a determina masa, autorii „impulsiști" recurg la fenomenul ciocnirii a două corpuri, adică la un fenomen *dinamic* foarte complicat, ale cărui legi trebuie *postulate*, căci fără postularea lor nu vom putea deduce masa.

Așadar, în locul fenomenului simplu, *static*, al cîntăririi corpurilor, cerut de metoda „acceleratistă", metoda „impulsistă" introduce fenomenul *dinamic* al ciocnirii, pentru determinarea masei.

Peste aceste considerații mai vine și faptul că impulsul este un *vector*, iar masa este o mărime scalară, așa încît în concepția „impulsistă" am reprezenta o mărime scalară, printr-o mărime de ordin tensorial superior, printr-un vector, fără a fi forțați la această reprezentare; pe cînd tendința naturală de simplificare este dirijată tocmai în sens invers, adică în sensul de a reprezenta un vector printr-un scalar, atunci cînd este cu putință, cum se întîmplă, spre pildă, cu vectorul reprezentabil printr-un pseudoscalar.

Această succintă comparație între concepția „impulsistă" a masei și concepția ei „acceleratistă" (newtoniană) nu ne-ar îndreptăți de a părăsi concepția „acceleratistă" pentru a adopta pe cea „impulsistă" pentru toată mecanica (atît cea newtoniană cît și cea relativistă). Dimpotrivă, putem spune că adaptarea concepției „impulsiste" în mecanica newtoniană prezintă serioase inconveniente față de concepția „acceleratistă".

Care ar fi concluzia care se degajă din această cercetare?

Pare că soluția cea mai potrivită ar fi să adoptăm concepția „acceleratistă" în mecanica newtoniană și să primim definiția „impulsistă" a masei în mecanica relativistă, această ultimă definiție confundîndu-se, de altfel, în cazul particular al mecanicii newtoniene cu concepția „acceleratistă" a ei.

În fond, discuția în vederea unei alegeri între cele două metode de lucru se pune numai pentru mecanica newtoniană, unde „masa" se leagă, de obicei, de ceva foarte concret și foarte util: *cantitatea de materie*. Depășind granițele mecanicii newtoniene și intrînd în domeniul mecanicii relativiste, masa încetează de a mai fi o *mărime constantă*, devenind o mărime ce depinde de reperul la care o raportăm; ea își pierde deci calitatea ei cea mai caracteristică, aceea care ar trebui să individualizeze punctul material.

De aceea ne este aproape indiferent, din acest punct de vedere, cum definim masa în mecanica relativistă, cu condiția doar ca în cazul particular al mecanicii newtoniene ea să se reducă la masa constantă, caracterizînd punctul material. Avînd în vedere însă avantajele pe care le prezintă metoda „impulsistă" în mecanica relativistă, o vom prefera pe aceasta față de cea acceleratistă în mecanica relativistă.

În ceea ce privește masa, ca măsură a cantității de materie, vom întîmpina bineînțeles o oarecare dificultate, căci ar trebui să admitem că „substanța" materială a unui corp depinde cantitativ de reperul la care raportăm corpul, ceea ce ar fi cu totul împotriva felului cum concepem cantitatea de materie.

Există totuși un mijloc de a scăpa de această dificultate ; nu avem decît să legăm noțiunea de „cantitate de materie" — așa de necesară în viața de toate zilele — nu de masa „acceleratistă" și nici de masa „impulsistă", ci de *masa de repaus* ; să admitem deci următorul postulat :

Cantitatea de materie este măsurată prin masa de repaus.

Practic vorbind, masa de repaus se confundă, pentru viteze la scara obișnuită, atît cu masa „acceleratistă" (fie longitudinală, fie transversală), cît și cu masa „impulsistă" deoarece diferența dintre masa de repaus și una oarecare, dintre celelalte mase, este de ordinul de mărime al patratului raportului dintre viteza față de reper și viteza luminii. Așa fiind, cîntărirea va rămîne mijloc valabil pentru determinarea „cantității de materie", precum de altfel și oricare alt mijloc de aflare a masei „acceleratiste" sau a masei „impulsiste".

Trebuie să observăm că toate considerațiile făcute mai sus au avut în vedere masa punctului material, pentru a simplifica expunerea. Trecerea de la masa unui punct material, la masa unui sistem de puncte nu prezintă nici o dificultate.

§ 5. Timpul

Conceptul de timp se bazează pe noțiunile de *succesiune*, de *simultaneitate* și de *durată*, cu ajutorul cărora se realizează o ordine în șirul fenomenelor. Observatorul interesat își ordonează fenomenele care-l privesc mai de aproape — de ordin fiziologic, psihic sau de altă natură — înserîndu-le în scara fenomenelor externe, în ordinea în care le percepe. El își creează astfel o scară personală a timpului, care va fi valabilă în imediata sa vecinătate și pe care am putea-o numi *scară locală* a timpului. Prin coordonarea diferitelor scări locale între ele, se poate obține baza conceptului general, de timp fizic. Însă o atare coordonare va depinde, în mare măsură, de modul de transmisie a semnalelor care marchează diferitele trepte ale fiecăreia dintre scările locale, de la un punct la altul al spațiului. În felul acesta, construirea unei scări unice a timpului fizic, apare ca o operație foarte complexă.

Mecanica newtoniană evită această dificultate presupunînd existența unui *timp universal*, cadru al tuturor fenomenelor din univers, de orice natură ar fi ele, scara timpului local nefiind decît o expresie aproximativă a acestui timp universal. Procesul de coordonare a diferitelor scări locale se face legîndu-le și supunîndu-le scării timpului general. Transmisiile, care eventual ar fi necesare în acest proces de coordonare, se presupun a fi efectuate instantaneu.

Acest „timp universal" poartă numele de *timp* în mecanica newtoniană.

Pentru ca timpul astfel introdus să devină o *mărime măsurabilă*, se alege o mișcare simplă, spre pildă mișcarea diurnă a unui punct imobil față de pământ, mișcare despre care se știe că se face pe cerc, dacă luăm în considerație numai mișcarea de rotație a pământului în jurul axei polilor și dacă se admite că două arce egale, oarecare, aparținînd cercului descris de punct, sînt parcurse în durate egale de timp. S-a redus astfel măsura duratei în timp la măsura unor lungimi. Tehnica măsurării se bazează pe observația că mișcarea considerată a punctului imobil față de pământ este *periodică*, adică după o anumită durată de timp constantă T, punctul revine în aceeași poziție în spațiu. Durata de timp T, care se scurge între două treceri consecutive ale punctului ales, prin aceeași poziție, este *perioada* mișcării. Durata T poate fi luată drept „unitate de măsură". Se ia însă, de obicei, un submultiplu al lui T drept unitate de măsură, anume durata de timp necesară punctului pentru a parcurge a 86 400-a parte din întregul cerc descris; această unitate este *secunda*. Pentru a se realiza o astfel de unitate de măsură a timpului s-a presupus, cum am menționat mai sus, că două arce egale între ele, altminteri oarecare, ale cercului sînt parcurse în durate de timp egale. Dezvoltarea mecanicii ne arată că această ipoteză nu creează vreo dificultate specială în cercetare, mai ales dacă se înlocuiește perioada T prin „ziua solară medie", adică prin intervalul de timp scurs între două treceri consecutive ale punctului în dreptul soarelui, interval socotit în medie pe un an întreg (intervalul dintre două treceri consecutive ale punctului prin echinocțiul de primăvară).

Scara timpului va fi perfect definită, dacă-i alegem o *origine* — momentul de la care începem a socoti arcele pe cerc. Originea poate fi, evident, arbitrar aleasă. Intervalul de timp t ce s-a scurs de la origine, pînă la ivirea unui eveniment oarecare E, este „momentul" t, cînd se petrece evenimentul E. Mărimea t este deci esențial pozitivă.

Astfel, timpul newtonian apare ca un parametru fizic, real, pozitiv, care variază în mod continuu, necontenit în același sens, monoton crescător, independent de orice mărime și susceptibil de a lua orice valoare reală, pozitivă. Timpul este singura variabilă independentă în desfășurarea evenimentelor, toate celelalte mărimi fiind dependente de timp, dacă nu sînt constante, cum se întîmplă în cazuri particulare.

Putem admite și *timpuri negative*, dacă le interpretăm ca reprezentînd în valoare absolută, durata scursă din momentul cînd s-a întîmplat fenomenul pînă la originea timpurilor. Cu această completare, putem spune că timpul t este un parametru fizic, continuu, avînd sens unic de variație, fiind deci ireversibil în intervalul $(-\infty, +\infty)$.

Din cauza caracterului său de universalitate și de independență, timpul newtonian se mai numește și *timp absolut*.

În mecanica relativistă conceptul „timp" suferă o schimbare fundamentală, care provine din faptul că ea nu admite transmisia instantanee, a semnalelor. Considerînd că transmisia instantanee, prin intermediul căreia se realizează sincronizarea scărilor locale, este ceva inadmisibil din punct de vedere fizic, mecanica relativistă presupune că această transmisie se face prin semnale luminoase. Cu toate că semnalul luminos se propagă cu viteză mare (300 000 km/s), totuși transmisia lui de la un

loc la altul cere un anumit interval de timp. Această împrejurare răpește timpului caracterul de „universal" pe care i-l construise mecanica newtoniană. Complicația care ar rezulta din presupunerea că fiecare punct în parte ar putea avea o mișcare proprie (necunoscută) este înlăturată în mecanica relativistă, prin ipoteza de bază că viteza de propagare a luminii este independentă de viteza sursei luminoase.

§ 6. Mișcarea

Ne vom ocupa exclusiv de sisteme de puncte din spațiul E_3. Conceptul „mișcare" în alte spații decît E_3, concept de care mecanica va avea nevoie cîteodată în cursul dezvoltării ei, se va deduce din cele stabilite în spațiul E_3.

Un sistem nedeformabil S de puncte, alcătuit din cel puțin trei puncte necoliniare, la care raportăm poziția altor sisteme, se numește *sistem de referință* sau *reper*. Pentru a evita orice ambiguitate vom lua un anumit sens de circulație a laturilor triunghiului-reper drept pozitiv și vom numi *pozitive* punctele de un sensul de circulație adoptat pentru triunghiul-reper apare pozitiv (sensul trigonometric) și *negative* punctele de unde acest sens apare contrar sensului trigonometric. Vom afecta fiecare punct P de semnul + sau — după cum el se află în prima sau în cea de a doua mulțime de puncte; pentru punctele din planul triunghiului-reper această completare este inutilă.

Poziția unui punct P față de un sistem de referință S este perfect determinată prin distanțele lui P la diversele puncte ale sistemului S, iar poziția unui sistem S_1 de puncte este determinată atunci cînd poziția fiecărui punct al sistemului S_1 este determinată. Vom înțelege prin expresia „poziția punctului P în spațiu", poziția sa față de un astfel de reper S, aceasta din urmă putînd fi luat în mod arbitrar.

Vom zice că un punct oarecare P se află în *stare de mișcare* față de un sistem de referință S, atunci cînd cel puțin una dintre distanțele punctului P, la diversele puncte ale sistemului S, variază cu timpul.

Dacă toate distanțele punctului P la diversele puncte ale sistemului de referință S rămîn constante, vom zice că punctul P se află în *stare de repaus față de* S, sau *invariabil legat de* S.

Un sistem S_1 de puncte (deformabil sau nedeformabil) se zice că se află în *stare de mișcare față de sistemul de referință* S, atunci cînd cel puțin unul din punctele sistemului S_1 se află în stare de mișcare față de S; dacă toate punctele sistemului S_1 se află în stare de repaus față de S, atunci se zice că sistemul S_1 se află *în stare de repaus față de* S, sau *invariabil legat de* S.

Iată acum o serie de proprietăți a căror demonstrare neprezentînd nici o dificultate, o lăsăm în seama cititorului.

I. *Dacă sistemul S_1 se află în stare de repaus față de sistemul de referință S, atunci sistemul S_1 este nedeformabil.*

II. *Dacă sistemul nedeformabil S' de puncte alcătuit din cel puțin trei puncte necoliniare se află în stare de repaus față de sistemul de referință S, atunci sistemul S se află în stare de repaus față de S'.*

III. *Dacă sistemul S_1 de puncte se află în stare de mișcare, respectiv de repaus față de sistemul de referință S, atunci S_1 se află în stare de mișcare,*

respectiv de repaus, față de orice alt sistem de referință, care se află în stare de repaus față de S.

IV. *Dacă punctele P_1, P_2 se află în stare de repaus față de sistemul de referință S, atunci toate punctele dreptei P_1P_2 se află în stare de repaus față de S.*

V. *Orice punct A din spațiul E_3 poate fi o poziție a unui punct material, fie în stare de repaus, fie în stare de mișcare.*

Sistemul de referință va fi reprezentat de obicei în mecanică prin trei axe concurente Ox, Oy, Oz, care să nu fie așezate în același plan și care să facă între ele, două cîte două, unghiuri constante. El poate fi înlocuit de altfel, în virtutea proprietăților I, II, III, IV, prin trei puncte oarecare deosebite de O și așezate fiecare pe cîte una din cele trei axe.

Din cele ce preced, rezultă că atît starea de repaus, cît și starea de mișcare, au un caracter *relativ*; aceste stări sînt definite față de un reper pe care ni-l putem alege după voie, din infinitatea de repere posibile.

Vom conveni a numi *fix* sau *imobil* pe unul oarecare S_0 dintre aceste sisteme de referință. Nu vom atribui acestei denumiri nici un substrat fizic în afară de acela cuprins în însăși definiția dată aici sistemului de referință „fix" S_0.

Mișcarea, respectiv repausul față de sistemul „fix" S_0, se numește *mișcare absolută*, respectiv *repaus absolut*. Este evident, în virtutea proprietății III, că sistemul S_0 poate fi înlocuit, ca sistem de referință „fix", prin oricare alt sistem S_0' care s-ar afla în stare de repaus față de S_0; un punct oarecare P în repaus sau în mișcare față de S_0' se va găsi în repaus respectiv în mișcare față de S_0.

Mișcarea, respectiv repausul față de un sistem de referințe care nu s-ar afla în stare de repaus față de sistemul fix S_0 se numește *mișcare relativă*, respectiv *repaus relativ*.

În cursul dezvoltării sale, mecanica își va alege drept sistem de referință „fix", fie sistemul format din cel puțin trei puncte necoliniare de pe pămînt — *sistemul geocentric* sau *sistemul Ptolemeu* — fie un sistem legat într-un anumit fel de soare — *sistemul helicocentric numit și sistemul Copernic*—fie, în sfîrșit, un alt sistem, de fiecare dată potrivindu-și sistemul „fix", așa cum o cere natura problemei. În alegerea sistemului „fix" se arată uneori oarecare preferință pentru sistemul format de stelele îndepărtate, așa-numite „fixe". Făcînd această alegere comitem eroarea de a socoti sistemul format de stelele îndepărtate, considerate ca puncte, drept sistem nedeformabil, ceea ce nu este adevărat. Este drept însă, că deformarea unui astfel de sistem ne apare nouă ca fiind foarte lentă, din cauza distanței la care se află stelele față de noi, așa încît ar putea fi considerat într-o primă aproximație, ca un sistem de referință, deci nedeformabil pentru intervale de timp la scara obișnuită*).

Se pune întrebarea naturală: care din sistemele considerate de mecanică s-ar apropia mai mult de un sistem fix?

Pentru a putea răspunde la această întrebare ar trebui să cunoaștem sistemul fix — ceea ce cum am menționat mai sus, nu este cu putință. Așa fiind, trebuie să ne mulțumim a elimina sistemele care ne-ar obliga la ipoteze lipsite de bază fizică, sau, mai bine, la ipoteze foarte puțin probabile.

*) Observațiile astronomice ne spun că nebuloasele extragalactice cele mai depărtate au o deplasare unghiulară de ordinul de mărime 0″, 01 pe secol.

Spre pildă, sistemul geocentric este un atare sistem care deci trebuie eliminat. În adevăr, observațiile astronomice ne arată că față de pămînt, considerat ca fix, adică față de un sistem geocentric, mișcarea astrelor, mai cu seamă a celor depărtate de pămînt, prezintă o uniformitate greu de admis din capul locului : toate astrele au o mișcare diurnă, de rotație, în jurul axei polilor pămîntului, precum și cîte o mișcare anuală eliptică, avînd caracter local. Prima mișcare diurnă de rotație în jurul axei polilor, ar trebui să se efectueze cu viteze liniare foarte mari, aceste viteze fiind proporționale cu distanța astrei considerate la pămînt. Chiar la distanța la care se află planeta Neptun, viteza de mișcare a astrei ar trebui să întreacă viteza luminii. Din aceste motive reperul geocentric, ca reper general, trebuie considerat drept nefizic.

Reperul heliocentric poate fi definit ca fiind determinat de un triunghi nedeformabil, situat în planul eclipticei și avînd unul din vîrfuri în centrul soarelui ; planul eclipticei în acest caz este socotit fix. Față de un astfel de reper toate stelele acuză o mișcare determinată de viteze paralele, de același sens și de aceeași mărime (circa 20 km/s). O atare uniformitate izbitoare a îndreptățit pe astronomi să atribuie reperului, nu stelelor, o mișcare și anume o mișcare de viteză egală cu 20 km/s dirijată în sens invers aceleia observate. În consecință nici reperul heliocentric nu poate fi „sistemul fix" în sensul fizic. Oricum însă, se poate spune că reperul heliocentric reprezintă mai bine reperul „fix" decît cel geocentric.

În sfîrșit, reperul „stelelor fixe" poate fi considerat ca reprezentînd mai bine reperul „fix", decît o fac ambele aceste repere, și cel geocentric, și cel heliocentric.

De altfel, condițiile mișcării față de reperul „stelelor fixe" au un aspect mai simplu decît l-ar avea față de reperul geocentric, și chiar față de cel heliocentric.

Trebuie totuși să menționăm că, pentru anumite probleme, mecanica folosește reperul geocentric, mai ales atunci cînd ecuațiile mișcării, considerate față de acest reper prezintă o diferență neglijabilă pentru fenomenul ce se urmărește, în comparație cu ecuațiile considerate față de reperul „stelelor fixe".

§ 7. Forța

Noțiunea de *forță* este una din noțiunile fundamentale ale mecanicii. Este drept că ea se poate introduce ca o noțiune derivată din conceptele de lungime (spațiu), timp și masă ; în adevăr, mulțumită unei legi naturale enunțate de Newton, anume legea a II-a, putem scrie o relație care leagă între ele forța, masa și accelerația — aceasta din urmă fiind un parametru al mișcării dedus numai cu ajutorul lungimii și al timpului. Luînd, așadar, drept noțiuni prime, conceptele de *lungime*, de *timp* și de *masă*, putem face față tuturor cerințelor mecanicii în ceea ce privește noțiunile cu care operează disciplina. Dar această împrejurare nu scade întru nimic valoarea noțiunii de *forță* ca noțiune fundamentală necesară pentru clădirea mecanicii. De altfel, legea lui Newton amintită mai sus, care ne procură o relație între forță, masă și accelerație, ar putea tot așa de bine să ne dea expresia *masei* ca o mărime derivată, în cazul cînd am considerat ca noțiuni prime *forța*, *lungimea* și *timpul*. Propriu-zis, așa am procedat la § 3, cînd am

introdus conceptul „masă" am bazat acest concept pe noțiunea curentă de „greutate" a corpurilor, iar greutatea este o *forță*, anume forța de atracție pe care o exercită pământul asupra corpului considerat.

Ce este forța?

Încercările de a da un răspuns concret acestei întrebări, duc sau la tautologii, sau la enunțări formaliste, lipsite de conținut fizic. Conceptele fundamentale *spațiu*, *timp*, *forță* nu pot fi reduse la ceva mai simplu și mai cunoscut, astfel încît definițiile ce le-ar concerne nu pot avea o natură explicativă, lămuritoare.

Mișcarea proprie a vietăților la suprafața pământului este legată de un efort muscular. Pentru ca omul să deplaseze un bloc de piatră are nevoie să pună în funcțiune o forță interioară musculară. Prin analogie se consideră în mecanică, mișcarea corpului legată de o forță asemănătoare efortului muscular. De pildă, piatra care cade pe verticală, este atrasă de pământ cu o „forță" analogă cu forța musculară care ar produce această mișcare; este forța pe care am numit-o „greutatea" pietrei la suprafața pământului. Astfel se intuiește cea mai comună forță în viața noastră, „greutatea". Existența ei ne este concretizată prin mișcarea pietrei.

Se întîmplă însă, cîteodată, ca un corp, care se află în stare de repaus, să rămînă tot în stare de repaus, chiar după ce i se va fi aplicat un număr de forțe, acționînd fiecare în parte, asupra corpului, în modul cum acționează greutatea. Se zice în acel caz că forțele își fac *echilibru*. Pentru ca astfel de forțe să-și facă echilibru, trebuie ca între ele să existe anumite relații.

Prin mijlocirea relațiilor acestora, vom putea deduce existența unora dintre forțe, din existența altora. Spre exemplu, se constată experimental, că un corp — asupra căruia sîntem siguri că lucrează greutatea sa proprie, ca forță — rămîne în stare de repaus dacă este așezat pe o masă orizontală. Acest fenomen nu se poate astfel explica decît făcînd ipoteza că masa orizontală reprezintă, din punct de vedere mecanic, niște forțe care lucrînd asupra corpului considerat, împreună cu forța greutății, să-și facă laolaltă echilibru.

Din cele ce preced reiese că existența forțelor poate fi pusă în evidență prin două căi: *a*) pe cale *dinamică*, atunci cînd criteriul de recunoaștere a forței este mișcarea materiei; *b*) pe cale *statică*, atunci cînd criteriul de recunoaștere a forței este condiția de echilibru cu alte forțe. Vom vedea că ambele aceste căi ne duc la măsurarea cantitativă a forțelor așa încît putem spune că forțele pot fi măsurate fie pe cale *dinamică*, fie pe cale *statică*. Pe ambele căi vom izbuti a stabili relații între forțele care intervin în mecanică și forța greutății. Cum am admis ca unitatea de măsură a greutății să fie kilogramul-forță (kgf), vom admite că orice forță se poate măsura cu kgf.

§ 8. Problema generală a mecanicii

Problema generală a mecanicii constă în stabilirea unor relații între forțele care acționează asupra unui sistem de corpuri, de o parte, și elementele determinante ale mișcării acelor corpuri, de alta; de obicei, se presupun cunoscute forțele și, prin intermediul relațiilor menționate, se caută a se determina, pe cale matematică, mișcarea corpurilor.

Forțele care lucrează asupra sistemului de corpuri alcătuiesc la rîndul lor un *sistem de forțe.*

Toate sistemele de forțe care aplicate pe rînd asupra aceluiași sistem de corpuri conduc la aceleași mișcări, corpurile pornind la început de la aceeași stare de mișcare, alcătuiesc o clasă, clasa *sistemelor echivalente.* În particular, sub clasa sistemelor de forțe, care lasă în stare de repaus sistemul de corpuri ce se găsesc la început în stare de repaus, este subclasa *sistemelor de forțe în echilibru*, sau subclasa *sistemelor de forțe echivalente cu zero.*

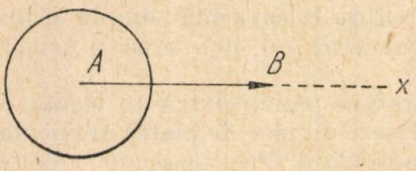

Fig. 1

Caracterul vectorial al forței. Forța nu este o mărime obișnuită, aritmetică, susceptibilă de a fi determinată printr-un singur număr. Spre pildă, forța cu care tîrîm un corp pe suprafața pămîntului prin intermediul unei funii de care corpul este legat nu este complet determinată numai prin mărimea ei, dată printr-un număr de kgf.

Forța este o *mărime orientată* (dirijată). Imaginea unei astfel de mărimi ne este dată de un segment de dreaptă AB (fig. 1), pe care ne închipuim un mobil punctual deplasîndu-se de la A la B. Vom spune că segmentul de dreaptă AB este *orientat* de la A spre B. „Sensul" de deplasare adică, „*sensul*" segmentului AB, va fi indicat în mod convențional printr-o săgeată în capătul B (final) al segmentului AB, iar segmentul orientat însuși va fi notat $\overrightarrow{AB}$.

Oricare mărime care poate fi reprezentată printr-un segment orientat poate fi înglobată în clasa *mărimilor vectoriale.*

Forța fiind o mărime dirijată, poate fi reprezentată printr-un segment orientat de dreaptă. Prin urmare, forța este o *mărime vectorială.*

Imaginea forței în E_3, adică segmentul de dreaptă care o reprezintă, se numește *vector.* Scurtînd vorbirea, vom spune că *forța este un vector.*

În natură întîlnim mai des următoarele forțe :

a. *Forța greutății corpurilor* (*gravitatea*) la suprafața pămîntului, în virtutea căreia toate corpurile au tendința să cadă pe verticală.

b. *Forța gravitației universale* care se exercită între două corpuri oricare ar fi ele și în orice împrejurare s-ar găsi ele. Este cea mai generală forță cunoscută, la care este supusă lumea materială. Forța greutății corpurilor la suprafața pămîntului este un caz particular al acesteia.

c. *Forța de frecare* avînd tendința de a se opune totdeauna mișcării.

d. *Forțele electromagnetice* care se exercită între corpuri, atunci cînd acestea se găsesc într-o anumită stare fizică.

Pe lîngă forțele enumerate, se mai întîlnesc în științele naturii : forța elastică, forța de coeziune, forțele capilare etc.

§ 9. Diviziunea mecanicii

Potrivit unei împărțiri clasice, mecanica se compune din următoarele trei părți : *cinematica, statica și dinamica.*

Cinematica se ocupă cu studiul mișcării corpurilor, abstracție făcînd de forțele care eventual ar lucra asupra acelor corpuri.

Statica, făcînd abstracție de mișcare, se ocupă numai de forțele care acționează asupra unui corp sau asupra unui sistem de corpuri, căutînd să determine clasa sistemelor de forțe echivalente. În particular, statica se ocupă cu subclasa sistemelor de forțe care își fac echilibru.

Dinamica se ocupă cu studiul mișcării corpurilor în legătură cu forțele care acționează asupra lor.

Din definițiile acestea rezultă că statica și cinematica sînt oarecum conjugate între ele, întrucît în statică apar numai forțele, fără ca mișcarea să fie luată în considerație, iar în cinematică apare numai mișcarea, fără ca forțele să fie luate în considerație. Statica este deci un fel de mecanică fără mișcare, iar cinematica, un alt fel de mecanică fără forțe. Se înțelege că nici statica, nici cinematica nu pot reda atmosfera unei mecanici reale, deoarece amîndorura le lipsește cîte ceva esențial din structura mecanicii; dreptul lor de existență se bazează mai mult pe motive de ordin metodologie.

Totuși, trebuie să observăm că cinematica, ocupîndu-se de mișcarea corpurilor, adică de deplasarea lor în timp, are un caracter pronunțat geometric; este un fel de geometrie, căruia i s-a adăugat o a patra dimensiune, timpul. De aceea, cinematica era denumită în trecut, o „Geometrie în patru dimensiuni" mai ales atunci cînd această denumire nu implica unele confuzii. Statica, luînd în cercetare un parametru fizic (forța), nou față de parametrii necesari disciplinelor aritmetice și geometrice, se apropie mai mult decît cinematica de caracterul concret fizic al mecanicii.

Din aceste motive cinematica va fi considerată, ca și calculul vectorial și tensorial, ca o disciplină de introducere. Trebuie să recunoaștem însă că ori care ar fi caracterul pe care i l-am da, cinematica merită să se bucure de toată atenția, mai ales din cauza numeroaselor și importantelor ei aplicații practice.

În ceea ce privește statica, adică studiul clasei sistemelor de forțe echivalente între ele, pe aceasta o vom considera ca fiind o parte integrantă a mecanicii. În consecință, ea va forma un însemnat capitol de introducere din mecanica propriu-zisă.

Sînt unii cercetători, în domeniul mecanicii, care consideră statica drept un caz particular al dinamicii, motivînd această părere prin faptul că statica se ocupă de starea de repaus a corpurilor, adică de starea pe care am obține-o din rezultatele dinamicii prin anularea doar a unor parametri cinematici (viteză, accelerație). Acest fel de a vedea îi răpește însă staticii o foarte importantă parte din domeniul ei de preocupări, deoarece din toată clasa sistemelor de forțe echivalente, nu-i lasă decît subclasa sistemelor de forțe echivalente cu zero, adică aceea a sistemelor de forțe în echilibru. De altminteri, admițînd chiar această restrîngere a domeniului de preocupări din statică, conceperea acesteia ca un caz particular al dinamicii introduce o notă de formalism matematic, incompatibil cu caracterul concret al mecanicii. În fenomenologia concretului nu se poate spune că starea de repaus a unui corp este un caz particular al stării sale de mișcare, deși din punct de vedere matematic repausul, fiind caracterizat prin anularea unor parametri de mișcare (viteză, accelerație), ar apărea ca o stare datorită unor valori particulare ale acestor parametri. În fizică starea de repaus și starea de mișcare sînt

două noțiuni contradictorii, care se exclud una pe alta; un corp sau se mișcă, sau nu se mișcă, una din două, iar atunci el se află în stare de repaus, nu se poate spune că el se află în stare de mișcare avînd viteza egală cu zero.

Statica este mult mai veche decît dinamica; ea se datorește aproape în întregime vechilor elini, pe cînd dinamica este opera timpurilor moderne. Omenirea cultă a început a studia mecanica limitîndu-se mai întîi la subclasa sistemelor de forțe echivalente cu zero, adică presupunînd corpurile în stare de repaus; căci este mult mai simplu studiul unui corp fixat într-o anumită poziție, decît studiul unui corp în mișcare; așa încît deși starea de repaus este o pură abstracție, este o simplificare ideală a stării reale a corpurilor, acestea aflîndu-se în necontenită mișcare, examenul științific al corpului a început a se face pe corpul în repaus, pentru a obține o primă aproximație de rezultate concrete.

Această cale de cercetare a naturii, pe care a adoptat-o omenirea, pornind de la corpul fix, pentru a trece abia într-o a două fază la studiul corpului în mișcare, a mai fost dictată în mecanică de o împrejurare în strînsă legătură cu metoda matematică necesară cercetării. Problema subclasei de sisteme de forțe echivalente cu zero, subclasă destul de întinsă pentru studiul corpului fix, din punctul de vedere al mecanicii, se poate realiza cu mijloace matematice reduse — acelea pe care le posedau grecii antici. Abia după două mii de ani de tatonări, de ezitări și de reflexii, omenirea a ajuns ca, prin geniul lui Newton, să determine cantitativ legătura dintre forțe, de o parte, și parametrii mișcării, de alta, legătură fără de care dinamica nu putea lua naștere; elaborarea amplă a dinamicii nu se poate face decît cu mijloace de fină analiză matematică, mijloace realizate abia în ultimele două-trei veacuri.

ОСНОВАНИЯ МЕХАНИКИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В этой статье автор пытается установить связь между физической реальностью, с одной стороны, и понятиями, необходимыми механике для возможности математического ее построения, с другой стороны.

Сначала определяется позиция механики по отношению к другим наукам, в частности по отношению к математическим дисциплинам. Правда, механика применяет почти исключительно математический язык, но отличается от математических дисциплин дополнительным условием, обязательным для нее, чтобы иметь право на существование, а именно: в то время как математическая дисциплина обязана только соблюдать правила логики, применяемые к произвольной концептуальной и аксиоматической конструкции, механика должна выбирать понятия и аксиомы с учетом физической реальности при постоянном контроле результатов путем их сопоставления с действительностью.

В механике основное понятие пространства должно быть отображением реального пространства, т. е. должно вытекать из него путем точечного

взаимно-однозначного соответствия. Материя должна быть помещена в таким образом построенное при помощи указанного соответствия гипотетическое пространство для возможности изучения ее движения.

Основным свойством материи является *вес* на поверхности земли; отсюда выводится понятие массы.

Затем автор вводит *материальную точку, систему точек и непрерывную среду.*

Рассматривается „ускорительная" концепция массы параллельно с ее „импульсной" концепцией.

Наконец, обсуждается понятие времени, для того чтобы перейти к движению. При этом автор уточняет понятия относительного движения и абсолютного движения, стараясь отнести их к действительности. Затем, после введения понятия силы, намечается некоторое подразделение механики.

LES FONDEMENTS DE LA MÉCANIQUE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail l'auteur tâche d'établir la liaison entre la réalité physique, d'une part, et les notions nécessaires à la Mécanique, de l'autre, afin que celle-ci puisse être traitée mathématiquement.

Il commence par fixer la position de la Mécanique par rapport à d'autres sciences, notamment par rapport aux disciplines mathématiques. La mécanique emploie, il est vrai, presque exclusivement le langage mathématiques, mais elle se distingue des disciplines mathématiques par une condition supplémentaire qu'on lui impose pour qu'elle ait droit d'existence, à savoir : tandis que la discipline mathématique est obligée seulement d'observer les règles de la logique en les appliquant sur une construction axiomatique quelconque, la mécanique est obligée de choisir ses définitions et ses axiomes en tenant compte de la réalité physique et en contrôlant toujours les resultats obtenus avec la réalité.

La notion fondamentale d'*espace* en mécanique doit être une image de l'espace réel, c'est-à-dire qu'il doit résulter de celui - ci à l'aide d'une correspondance ponctuelle biunivoque.

La *matière* sera placée dans cet espace hypothétique à l'aide de la correspondance mentionnée ci-dessus, pour étudier son mouvement. La propriété fondamentale de la matière à la surface de la terre est son *poids*; on en déduit ensuite la notion de *masse*.

On passe ensuite à l'introduction de la notion du *point matériel*, du *système de points matériels* et du *milieu continu*.

On prend en discussion la conception „accélératiste" de la masse en la mettant en parallèle avec sa conception „impulsiste".

On discute le concept „*temps*" pour passer au „mouvement". À cette occasion on précise les notions de *mouvement relatif* et de *mouvement absolu* en les rapportant à la réalité physique.

A la fin, après avoir introduit la notion de „*force*", on donne l'esquisse d'une division de la Mécanique.

BIBLIOGRAFIE

1. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris, 1814.
2. G. Kirchhoff, *Vorl. ub. Math. Phys. Mechanik*. Leipzig, 1897.
3. A. Voss, *Enz. d. math. Wiss.*, 1901, IV, 1.
4. Fr. Engels, *Dialektik der Natur*, Traducere franceză, 1952.
5. E. Mach, *Die Mechanik*. Leipzig, 1901, ed. a 4-a.
6. V. I. Lenin, *Materialism şi empiriocriticism*. Ed. P.M.R., 1948.
7. G. Hamel, *Die Axiome der Mechanik*. Hdb. d. Phys. Geiger u. Scheel, Berlin 1927.
8. D. Alt, *Geometrie der Bewegungen*. Hdb. d. Phys. Geiger u. Scheel, Berlin, 1927.
9. H. Weyl *Raum. Zeit. Materie*. Berlin, 1923.
10. P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*. Paris, 1926, vol. I şi II.
11. G. Hamel, *Theoretische Mechanik*. Berlin, 1949.
12. J. Perès, *Mécanique générale*. Paris, 1953.
13. I. Nekrasov, *Kurs teoreticeskoi Mehaniki*. Moscova, 1953, vol. I, ed. 5-a.
14. I, M. Voronkov, *Kurs teoreticeskoi Mehaniki*. Moscova, 1953, ed. a 4-a.
15. S. E. Friş i A. Timoreva, *Kurs obşcei Fiziki*. Moscova, 1953.
16. A. A. Kosmodemianski, *Kurs teoreticeskoi Mehaniki*. Moscova, 1955.
17. V. A. Fok, *Teoria prostranstva, vremeni i tiagotenia*. Moscova, 1955.
18. D. Ivanenko i A. Sokolov. *Teoria clasică a cîmpului*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
19. V. Novacu, *Introducere în electrodinamică*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1955.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VII, nr. 3—4, 1956

ASUPRA REDUCERII NUMĂRULUI DE CONTACTE PRIN INTRODUCEREA CIRCUITELOR ÎN PUNTE. CONDUCTIBILITĂŢI DIRECTE CONJUGATE *)

DE

PAUL CONSTANTINESCU

I

Am văzut în [1] că în baza teoremelor 1,2,3 reuşim, prin introducerea circuitelor în punte, să reducem numărul de contacte necesare schemei**) pentru îndeplinirea programului cerut.

În cele ce urmează vom introduce noţiunea de conductibilităţi directe conjugate. Prezenţa acestor conductibilităţi în matricea conductibilităţilor directe indică posibilitatea formării de circuite în punte.

Teoremele pe care le vom demonstra stabilesc condiţiile de trecere la scheme echivalente ca funcţionare, ca şi teoremele precedente, pentru cazul special al conductibilităţilor directe conjugate.

Vom numi conductibilităţi directe conjugate două conductibilităţi directe de forma

$$a_{\alpha\mu} = P + RS\,;\quad a_{\alpha\nu} = R + PS,$$

unde cu P, R, S, am notat ca şi în [1] funcţii booleene de variabilele a, b, c, d, e,..., conductibilităţile contactelor din schemă.

Se observă că cele două conductibilităţi directe conjugate se află pe aceeaşi linie α la intersecţia cu coloana μ respectiv ν. Deoarece matricea conductibilităţilor d recte este simetrică faţă de diagonala principală, vom regăsi aceste două conductibilităţi directe conjugate pe coloana α la incidenţa cu liniile μ, respectiv ν:

$$a_{\mu\alpha} = P + SR\,;\quad a_{\nu\alpha} = R + SP.$$

Bineînţeles

$$a_{\alpha\mu} = a_{\mu\alpha} \text{ şi } a_{\alpha\nu} = a_{\nu\alpha}.$$

---

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 18 iunie 1956.
**) Fără elemente ventil.

De pildă

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 1 & d+ef & e+df \\ b & d+ef & 1 & g \\ c & e+df & g & 1 \end{Vmatrix},$$

unde : $\alpha = 2$, $\mu = 3$, $\nu = 4$ iar

$$a_{23} = d + ef$$
$$a_{24} = e + df.$$

Deoarece presupunem că schemele conțin numai contacte putem scrie ca și în [1] numai jumătatea, superioară a matricilor care intervin.

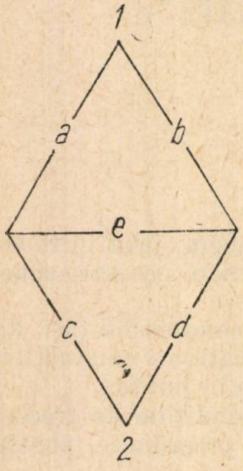

Fig. 1

Să considerăm circuitul punte tip (fig. 1) :

$$\chi_{12}(A) = aed + bec + ac + bd,$$
$$\chi_{12}(A) = a(c + ed) + b(d + ec).$$

Se observă că pentru acest circuit se pun ușor în evidență conductibilitățile directe conjugate (prin dilatări, parantezele devin conductibilități directe într-o matrice intermediară obținută în succesiunea de operații). În acest sens, prezența conductibilităților directe conjugate în matricea conductibilităților directe indică posibilitatea formării circuitelor în punte. Exemplele pe care le vom prezenta (§ IV), vor ilustra mai complet acest lucru.

Fie un multipol cu n noduri și p poli avînd asociată matricea conductibilităților directe $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2,\ldots,n}$ simetrică.

În cele ce urmează cînd vrem să punem în evidență că în calculul conductibilității totale nu considerăm un nod λ oarecare al multipolului vom nota :

$$\hat{\chi}^{\lambda}_{\alpha\beta}(A) = \sum a_{\alpha i_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_m \beta}$$

unde $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ parcurge toate aranjamentele posibile ale numerelor $1,2,\ldots,\alpha-1,\ \alpha+1,\ldots,\lambda-1,\lambda+1,\ldots,\beta-1,\beta+1,\ldots,n$ cîte $m = 0,1,\ldots,n-3$.

Vom stabili următoarea formulă :

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = a_{\alpha\beta} + a_{\alpha 1}\hat{\chi}^{\alpha}_{1\beta}(A) + \ldots a_{\alpha,\alpha-1}\hat{\chi}^{\alpha}_{\alpha-1,\beta}(A) +$$
$$+ a_{\alpha,\alpha+1}\hat{\chi}^{\alpha}_{\alpha+1,\beta}(A) + \ldots a_{\alpha,\beta-1}\hat{\chi}^{\alpha}_{\beta-1,\beta}(A) + a_{\alpha\,\beta+1}\hat{\chi}^{\alpha}_{\beta+1,\beta}(A) +$$
$$+ \ldots + a_{\alpha,n}\hat{\chi}^{\alpha}_{n\beta}(A). \qquad (1)$$

Într-adevăr :

Excludem nodul α din schemă ; fie $\sigma \neq \beta$ unul dintre cele $n-1$ noduri ale schemei care au rămas după excluderea nodului α. Formăm conducti-

bilitățile totale între cele n—2 noduri ($\sigma = 1,2,\ldots,\alpha-1, \alpha+1,\ldots,\beta-1, \beta+1,\ldots,n$) și nodul β.

De pildă, conductibilitatea totală $\hat{\chi}^{\alpha}_{\sigma\beta}(A)$ este suma produselor conductibilităților directe din toate lanțurile care unesc σ cu β direct, trecînd printr-un nod oarecare al schemei (în afară de α, σ, β), trecînd prin două noduri oarecare ș. a. m. d., trecînd prin $n-3$ noduri ale schemei.

Înmulțind aceste produse cu $a_{\alpha\sigma}$ obținem o parte din suma produselor conductibilităților directe care alcătuiesc conductibilitatea totală $\chi_{\alpha\beta}(A)$ și anume suma conductibilităților corespunzătoare lanțurilor care unesc α cu β trecînd toate prin nodul σ.

Pentru a obține conductibilitatea totală $\chi_{\alpha\beta}(A)$ trebuie însumate cele n—2 expresii $a_{\alpha\sigma}\hat{\chi}^{\alpha}_{\sigma\beta}(A)$.

$$(\sigma = 1,2,\ldots,\ \alpha-1,\ \alpha+1,\ldots,\beta-1,\ \beta+1,\ \ldots,n)$$

și conductibilitatea directă $a_{\alpha\beta}$. q·e·d·

Formula (1) se poate considera ca fiind dezvoltarea conductibilității totale după elementele liniei α din minorul elementului $a_{\alpha\beta}$.

Să remarcăm că pentru fiecare dintre expresiile

$$\hat{\chi}^{\alpha}_{1\beta}(A),\ldots,\hat{\chi}^{\alpha}_{n,\beta}(A)$$

vom avea descompuneri analoge ș. a. m. d. În cele din urmă vom găsi suma conductibilităților tuturor lanțurilor, considerată în definiția, [2], a conductibilității totale $\chi_{\alpha\beta}(A)$*).

II

Fie multipolul cu n noduri și p poli avînd asociată matricea conductibilităților directe simetrică $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,2,\ldots,n}$, în care presupunem că există două conductibilități directe conjugate avînd nodurile α (pe linia și coloana α) respectiv μ și ν marginale:

$$a_{\alpha\mu} = P + RS,\ a_{\alpha\alpha} = R + PS.$$

Să presupunem de asemenea că toate conductibilitățile directe care au nodul α marginal sînt nule în afară de

$$a_{\alpha\mu}, a_{\alpha\nu}, a_{\alpha\beta} \text{ și } a_{\alpha\alpha} = 1$$

(și simetricele lor față de diagonala principală).

Vom construi un nou multipol avînd atașată matricea conductibilităților directe simetrică

$$B = \{b_{i,j}\}_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

ale cărei elemente sînt:

$$b_{\alpha\mu} = P,\ b_{\alpha\nu} = R,$$

$$b_{\nu\mu} = b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + S.$$

*) Vezi de asemenea [1], § I.

Celelalte elemente ale matricei B sînt egale cu ale matricei A. Matricele corespunzătoare acestor multipoli sînt :

$$
A = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc}
 & & & \alpha & & & & & & & & \\
 & & & \downarrow & & & & & & & & \\
1 & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1\mu} & \dots & a_{1\nu} & \dots & a_{1\beta} & \dots & a_{1n} \\
 & 1 & \dots & 0 & \dots & a_{2\mu} & \dots & a_{2\nu} & \dots & a_{2\beta} & \dots & a_{2n} \\
 & & & \vdots & & & & & & & & \\
 & & & 1 & \dots & P+RS & \dots & R+PS & \dots & a_{\alpha\beta} & \dots & 0 \\
 & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & 1 & \dots & a_{\mu\nu} & \dots & a_{\mu\beta} & \dots & a_{\mu n} \\
 & & & & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & & 1 & \dots & a_{\nu\beta} & \dots & a_{\nu n} \\
 & & & & & & & & & \vdots & & \\
 & & & & & & & & & 1 & \dots & a_{\beta n} \\
 & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & 1
\end{array} \right\} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \alpha \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
B = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc}
1 & \dots & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1\mu} & \dots & a_{1\nu} & \dots & a_{1\beta} & \dots & a_{1n} \\
 & & 1 & \dots & 0 & \dots & a_{2\mu} & \dots & a_{2\nu} & \dots & a_{2\beta} & \dots & a_{2n} \\
 & & & & \vdots & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & \dots & P & \dots & R & \dots & a_{\alpha\beta} & \dots & 0 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & \dots & a_{\mu\nu}+S & \dots & a_{\mu\beta} & \dots & a_{\mu n} \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & \dots & a_{\nu\beta} & \dots & a_{\nu n} \\
 & & & & & & & & & & \vdots & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & \dots & a_{\beta n} \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & 1
\end{array} \right\}
$$

Schimbarea conductibilităților directe între nodurile α, μ, ν în trecerea de la matricea A, la matricea B, se poate urmări pe figura 2.

Vom demonstra

T e o r e m a 4*). *Conductibilitatea totală* $\chi_{\alpha\beta}(A)$ *considerată între nodurile date* α *și* β *este egală cu conductibilitatea totală* $\chi_{\alpha\beta}(B)$:

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = \chi_{\alpha\beta}(B).$$

Vom scrie

$$A \xrightarrow{T_4} B.$$

*) Teoremele 1, 2 și 3 sînt date în lucrarea [1].

Să remarcăm deci că dacă considerăm conductibilitatea totală între nodul α (pe linia α aflîndu-se cele două conductibilități conjugate) și nodul β, conductibilitatea directă $a_{\alpha\beta}$ de pe linia α poate fi diferită de zero împreună cu conductibilitățile conjugate și bineînțeles, cu $a_{\alpha\alpha} = 1$.

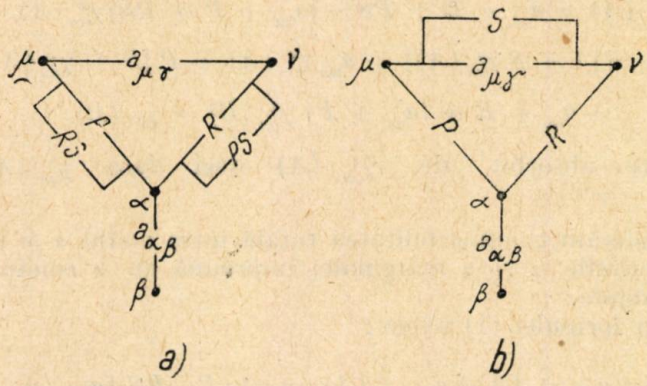

Fig. 2

Demonstrație. a) Considerăm conductibilitatea totală între nodul α și unul dintre nodurile μ sau ν, marginale, împreună cu α celor 2 conductibilități directe conjugate:

$$a_{\alpha\mu} = P + RS\,;\quad a_{\alpha\nu} = R + PS.$$

Fie $\beta = \nu$. În acest caz $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\nu} \neq 0$ deci pe linia α singurele elemente diferite de zero sînt $a_{\alpha\mu}$, $a_{\alpha\nu}$, $a_{\alpha\alpha} = 1$.

În baza formulei (1) avem

$$\chi_{\alpha\nu}(A) = R + PS + (P + RS)\,\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\nu}(A),$$

$$\chi_{\alpha\nu}(A) = R + PS + (P + RS)\,[a_{\mu\nu} + a_{\mu 1}\,\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{1\nu}(A) + \ldots + a_{\mu n}\,\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{n\nu}(A)],$$

$$\chi_{\alpha\nu}(A) = R\,[1 + S\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\nu}(A)] + P[a_{\mu\nu} + S + a_{\mu 1}\,\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{1\nu}(A) + \ldots + a_{\mu n}\,\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{n\nu}(A)].$$

Să observăm că putem înlocui expresiile $\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{1\nu}(A), \ldots, \hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{n\nu}(A)$ prin $\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{1\nu}(B), \ldots, \hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{n\nu}(B)$, deoarece lipsind nodurile μ și α deci liniile și coloanele respective în matricile A și B, calculul acestor expresii se face cu aceleași elemente.

Prin urmare

$$\chi_{\alpha\nu}(A) = R + P\,[(a_{\mu\nu} + S) + a_{\mu 1}\,\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{1\nu}(B) + \ldots + a_{\mu n}\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{n\nu}(B)] = R + P\,\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\nu}(B).$$

Deci $\chi_{\alpha\nu}(A) = \chi_{\alpha\nu}(B)$.

La fel se demonstrează că

$$\chi_{\alpha\mu}(A) = \chi_{\alpha\mu}(B).$$

Să observăm că dacă conductibilitățile directe între nodul α și nodurile μ respectiv ν, în matricea A, sînt $a_{\alpha\mu} + a'_{\alpha\mu}$ și $a_{\alpha\nu} + a'_{\alpha\nu}$, ca atare

dacă conductibilitățile directe conjugate $a_{\alpha\mu}$ și $a_{\alpha\nu}$ se însumează cu *) $a'_{\alpha\mu}$ respectiv $a'_{\alpha\nu}$ atunci trecerea la matricea B în condițiile teoremei 4 se poate efectua dacă $a_{\mu\nu} = S$.

Într-adevăr

$$\chi_{\alpha\nu}(A) = a'_{\alpha\nu} + R + PS + (a'_{\alpha\mu} + P + RS)\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\nu}(A) =$$

$$= a'_{\alpha\nu} + R[1 + S\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\nu}(A)] + a'_{\alpha\mu}\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\nu}(A) + P[S + \hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\nu}(A)] =$$

$$= a'_{\alpha\nu} + R + (a'_{\alpha\mu} + P)\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\nu}(B) = \chi_{\alpha\nu}(B)$$

dacă S este absorbit de $\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\nu}(A)$ deci dacă $\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\nu}(A) = \hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\nu}(B)$ $(a_{\mu\nu} = a_{\mu\nu})$.

b) Considerăm conductibilitatea totală între nodul α și nodul β distinct de nodurile μ și ν marginale, împreună cu α conductibilităților directe conjugate.

Conform formulei (1) avem :

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = a_{\alpha\beta} + a_{\alpha\mu}\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\beta}(A) + a_{\alpha\nu}\hat{\chi}^{\alpha}_{\nu\beta}(A) = a_{\alpha\beta} + (P + RS)[a_{\mu\beta} + a_{\mu 1}\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{1\beta}(A) + \ldots$$

$$+ a_{\mu\nu}\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{\nu\beta}(A) + \ldots + a_{\mu n}\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{n\beta}(A)] + (R + PS)[a_{\nu\beta} + a_{\nu 1}\hat{\chi}^{\alpha,\nu}_{1\beta}(A) + \ldots$$

$$\ldots + a_{\nu\mu}\hat{\chi}^{\alpha,\nu}_{\mu\beta}(A) + \ldots + a_{\nu n}\hat{\chi}^{\alpha,\nu}_{n\beta}(A)].$$

Dînd factor pe P și R avem.

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = a_{\alpha\beta} + P[a_{\mu\beta} + a_{\mu 1}\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{1\beta}(A) + \ldots + (a_{\mu\nu} + S)\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{\nu\beta}(A) + \ldots +$$

$$+ a_{\mu n}\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{n\beta}(A)] + R[a_{\nu\beta} + a_{\nu 1}\hat{\chi}^{\alpha,\nu}_{1\beta}(A) + \ldots + (a_{\nu\mu} + S)\hat{\chi}^{\alpha,\beta}_{\mu\beta}(A) + \ldots + a_{\nu n}\hat{\chi}^{\alpha,\nu}_{n\beta}(A)].$$

Într-adevăr fie de exemplu $S\hat{\chi}^{\alpha}_{\nu\beta}(A)$ din paranteza lui P.

Din această expresie am considerat numai $S\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{\nu\beta}(A)$, deoarece termenii care conțin nodul μ în această expresie sînt absorbiți de termenii respectivi din paranteza lui P corespunzători lanțurilor care unesc μ cu β.

Deoarece în expresiile $\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{1\beta}(A), \ldots, \hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{n\beta}(A)$ și $\hat{\chi}^{\alpha,\nu}_{1\beta}(A), \ldots, \hat{\chi}^{\alpha,\nu}_{n\beta}(A)$ nu intervin nodurile α și μ respectiv α și ν calculul lor se efectuează cu aceleași elemente atît în matricea A cît și în matricea B.

Deci

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = a_{\alpha\beta} + P[a_{\mu\beta} + a_{\mu 1}\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{1\beta}(B) + \ldots + (a_{\mu\nu} + S)\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{\nu\beta}(B) + \ldots +$$

$$+ a_{\mu n}\hat{\chi}^{\alpha,\mu}_{n\beta}(B)] + R[a_{\nu\beta} + a_{\nu 1}\hat{\chi}^{\alpha,\nu}_{1\beta}(B) + \ldots + (a_{\nu\mu} + S)\hat{\chi}^{\alpha,\nu}_{\mu\beta}(B) +$$

$$+ \ldots + a_{\nu n}\hat{\chi}^{\alpha,\nu}_{n\beta}(B)] = a_{\alpha\beta} + P\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\beta}(B) + R\hat{\chi}^{\alpha}_{\nu\beta}(B) = \chi_{\alpha\beta}(B).$$

Bineînțeles, dacă $a_{\alpha\beta} = 0$ avem egalitatea $\chi_{\alpha\beta}(A) = \chi_{\alpha\beta}(B)$ pentru toate conductibilitățile totale corespunzătoare elementelor de pe linia și coloana $\alpha : \beta = 1,2, \ldots, n$.

---

*) $a'_{\alpha\nu}$ și $a'_{\alpha\mu}$ reprezintă funcții booleene de variabilele $a, b, c, d, e, \ldots$

Dacă în matricea A, $a_{\alpha\mu}$ și $a_{\alpha\nu}$ se însumează cu $a'_{\alpha\mu}$ respectiv $a_{\alpha\nu}$ atunci trecerea la matricea B în condițiile teoremei se poate efectua dacă $a_{\mu\nu} = S$.

Într-adevăr :

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = a_{\alpha\beta} + (a_{\alpha\mu} + a'_{\alpha\mu})\,\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\beta}(A) + (a_{\alpha\nu} + a'_{\alpha\nu})\,\hat{\chi}^{\alpha}_{\nu\beta}(A) =$$

$$= a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\mu}\,\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\beta}(A) + a'_{\alpha\nu} + \hat{\chi}^{\alpha}_{\nu\beta}(A) + (P + RS)\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\beta}(A) + (R + PS)\,\hat{\chi}^{\alpha}_{\nu\beta}(A) =$$

$$= a_{\alpha\beta} + (a'_{\alpha\mu} + \hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\beta}(A) + a'_{\alpha\nu}\hat{\chi}^{\alpha}_{\nu\beta}(A) + P[\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\beta}(A) + S\hat{\chi}^{\alpha}_{\nu\beta}(A)] + R[\hat{\chi}^{\alpha}_{\nu\beta}(A) +$$

$$+ S\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\beta}(A)] = a_{\alpha\beta} + (a'_{\alpha\mu} + a_{\alpha\mu})\,\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\beta}(B) + (a'_{\alpha\nu} + a_{\alpha\nu})\,\hat{\chi}^{\alpha}_{\nu\beta}(B)$$

dacă

$$\hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\beta}(A) = \hat{\chi}^{\alpha}_{\mu\beta}(B) \text{ și } \hat{\chi}^{\alpha}_{\nu\beta}(A) = \hat{\chi}^{\alpha}_{\nu\beta}(B)$$

deci dacă

$$a_{\mu\nu} = S. \qquad \text{q. e. d.}$$

În aplicații întîlnim mai ales cazul particular cînd $a_{\alpha\beta} = 0$, deci pe linia și coloana α avem diferite de zero numai conductibilitățile directe conjugate și $a_{\alpha\alpha} = 1$.

În acest caz rămîn neschimbate toate conductibilitățile totale considerate între nodul α și celelalte noduri ale rețelei. Conform acestei teoreme se conservă o singură conductibilitate totală $\chi_{\alpha\beta}(A)$ dacă $a_{\alpha\beta} \neq 0$, iar dacă și $a_{\alpha\beta} = 0$, atunci se conservă toate conductibilitățile totale corespunzătoare elementelor de pe linia și coloana α; prin urmare vom putea utiliza această teoremă în cazul sintezei dipolilor sau în cazul cînd se dau conductibilitățile totale între nodul α și celelalte noduri ale schemei. Pentru cazul general cînd se dau conductibilitățile totale corespunzătoare unor perechi oarecare de noduri, această teoremă nu se mai paote aplica.

Să mai demonstrăm o teoremă asemănătoare.

Să presupunem că în matricea conductibilităților directe $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ elementele a_{ij} sînt de forma : Pe linia și coloana α avem elemente oarecare în afară de conductibilitățile directe conjugate $a_{\nu\mu} = P + RS$ și $a_{\alpha\nu} = R + PS$ respectiv $a_{\mu\alpha}$ și $a_{\nu\alpha}$.

— Restul elementelor matricei care nu au nodul α marginal sînt nule în afară de elementele de pe diagonala principală.

Construim o nouă schemă care are matricea conductibilităților directe

$$B = \{b_{ij}\} \quad i, j, = 1, 2, \ldots, n$$

cu elementele

$$b_{\alpha\mu} = P,$$

$$b_{\alpha\nu} = R,$$

$$b_{\mu\nu} = S.$$

Restul elementelor matricei B sînt egale cu cele ale matricei A.

$$A = \begin{Vmatrix} 1\,0\,0 \ldots a_{1\alpha} \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 1\,0 \ldots a_{2\alpha} \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 1 \ldots a_{3\alpha} \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 1 \ldots P+RS & \ldots & R+PS & \ldots & a_{\alpha n} & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \\ & & \vdots & & & \\ & & 1 & \ldots & 0 & \\ & & & & \vdots & \\ & & & & 1 & \end{Vmatrix};$$

$$B = \begin{Vmatrix} 1\,0\,0 \ldots a_{1\alpha} \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 1\,0 \ldots a_{2\alpha} \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 1 \ldots a_{3\alpha} \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ \vdots \\ 1 \ldots P \ldots R \ldots a_{xn} \\ \vdots \\ 1 \ldots S \ldots 0 \\ \vdots \\ 1 \ldots 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

În trecerea de la matricea A la matricea B, schimbarea conductibilităţilor directe dintre nodul α şi nodurile $1, 2, \ldots, \mu, \ldots, \nu, \ldots, n$, se poate urmări pe figura 3

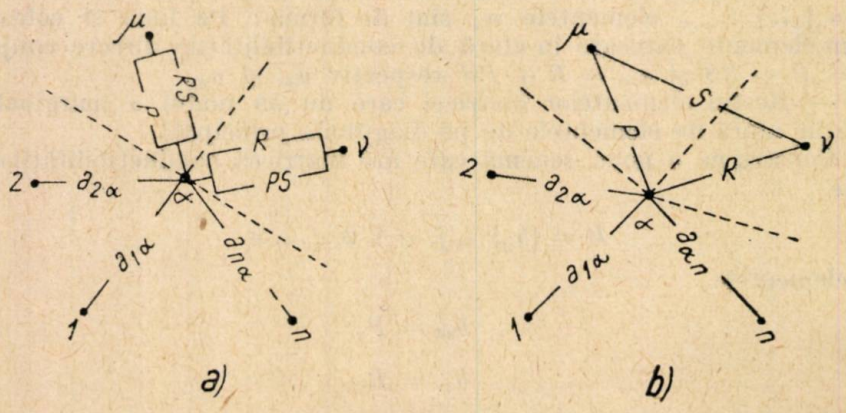

Fig. 3

Teorema 5. *Conductibilitățile totale considerate între nodul* α *și un nod oarecare al schemei, deci conductibilitățile totale corespunzătoare elementelor de pe linia și coloana* α *rămîn neschimbate cînd trecem de la matricea* A *la matricea* B :

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = \chi_{\alpha\beta}(B)_{\beta=1,2,\ldots,n}$$

Vom scrie

$$A \xrightarrow{T_5} B.$$

Demonstrație. a) Considerăm conductibilitatea totală între două noduri care sînt noduri marginale pentru una dintre conductibilitățile directe conjugate; conform formulei (1) avem :

$$\chi_{\alpha\mu}(A) = a_{\alpha\mu} + a_{\alpha 1} \cdot 0 + \ldots + a_{\alpha n} \cdot 0 = P + RS$$

deoarece se observă că pentru fiecare dintre expresiile $\hat{\chi}^{\alpha}_{1\mu}(A), \ldots, \hat{\chi}^{\alpha}_{n\mu}(A)$ minorul corespunzător în matrice are elementele unei linii sau coloane 0.

Să calculăm conductibilitatea totală între aceleași noduri pentru elementele din matricea B. Folosind formula (1) :

$$\chi_{\alpha\mu}(B) = P + a_{\alpha 1} \cdot 0 + \ldots + R(S + a_{\nu 1} \cdot 0 + \ldots + a_{\nu n} \cdot 0) + \\ + \ldots + a_{\alpha n} \cdot 0 = P + RS.$$

Prin urmare

$$\chi_{\alpha\mu}(A) = \chi_{\alpha\mu}(B).$$

La fel se demonstrează că $\chi_{\alpha\nu}(A) = \chi_{\alpha\nu}(B)$.

Să observăm că dacă conductibilitățile directe avînd α, μ, și ν ca noduri marginale în matricea A sînt :

$$a'_{\alpha\mu} + a_{\alpha\mu} \text{ și } a'_{\alpha\nu} + a_{\alpha\nu} \text{ respectiv } a'_{\mu\alpha} + a_{\mu\alpha} \text{ și } a'_{\nu\alpha} + a_{\nu\alpha}$$

atunci trecerea de la matricea A la matricea B (avînd între nodurile α, μ și ν conductibilitățile $P + a'_{\alpha\mu}$, $R + a'_{\alpha\nu}$ respectiv $P + a'_{\mu\alpha}$, $R + a'_{\nu\alpha}$) în condițiile teoremei nu poate avea loc.

Fie de pildă :

$$\chi_{\alpha\mu}(A) = a_{\alpha\mu} + a'_{\alpha\mu} = P + a'_{\alpha\mu} + RS,$$

$$\chi_{\alpha\mu}(B) = P + a'_{\alpha\mu} + (R + a'_{\alpha\nu})S = P + a'_{\alpha\mu} + RS + a'_{\alpha\nu}S.$$

Dacă $S = 0$ sau $a'_{\alpha\mu} = 0$ atunci $\chi_{\alpha\mu}(A) = \chi_{\alpha\mu}(B)$. La fel dacă $S = 0$ sau $a'_{\alpha\mu} = 0$ atunci $\chi_{\alpha\nu}(A) = \chi_{\alpha\nu}(B)$.

b) Considerăm conductibilitatea totală între nodul α și un nod oarecare al rețelei

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = a_{\alpha\beta} + a_{\alpha 1} \cdot 0 + \ldots + a_{\alpha\mu} \cdot 0 + \ldots + a_{\alpha\nu} \cdot 0 + \ldots + a_{\alpha n} \cdot 0 = a_{\alpha\beta},$$

$$\chi_{\alpha\beta}(B) = a_{\alpha\beta} + a_{\alpha 1} \cdot 0 + \ldots + a_{\alpha\mu} \cdot S \cdot 0 + \ldots + a_{\alpha n} \cdot 0 = a_{\alpha\beta}.$$

Deci $\chi_{\alpha\beta}(A) = \chi_{\alpha\beta}(B)_{\beta=1,2,\ldots,n}$

Dacă $a_{\alpha\mu}$ și $a_{\alpha\nu}$ se însumează în matricea A respectiv cu $a'_{\alpha\mu}$ și $a'_{\alpha\nu}$ conductibilitățile totale corespunzătoare elementelor liniei și coloanei α rămîn neschimbate cînd trecem de la matricea A la matricea B în afară

de conductibilitățile totale corespunzătoare nodurilor α, μ și ν conform demonstrației de la punctul *a*). În acest caz

$$b_{\alpha\mu} = P + a'_{\alpha\mu},$$

$$b_{\alpha\nu} = R + a'_{\alpha\nu},$$

$$b_{\mu\nu} = S,$$

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = \chi_{\alpha\beta}(B),$$

$$\beta = 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n.$$

q.e.d.

În aplicații teorema 4 se utilizează mai ales pentru cazul cînd $a_{\mu\nu} = 0$; împreună cu teorema 5 și teorema 3 din [1] permit considerarea de conductibilități directe între nodurile suplimentare introduse în procesul de dilatare, [1], și celelalte noduri ale rețelei.

Să ilustrăm aplicarea teoremelor 4 și 5 :

1)

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & a & b + ceg & c + beg \\ & 1 & d & f \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{Vmatrix} \xrightarrow{T_4} B = \begin{Vmatrix} 1 & a & b & c \\ & 1 & d & f \\ & & 1 & eg \\ & & & 1 \end{Vmatrix},$$

unde $\alpha = 1$, $\mu = 3$, $\nu = 4$.

$$a_{13} = b + ceg; \quad a_{14} = c + beg,$$

$$P = b, \quad R = c, \quad S = eg, \quad a_{34} = 0.$$

Deoarece $a_{12} \neq 0$, se conservă numai ($\beta = 2$).

$$\chi_{12}(A) = \chi_{12}(B).$$

2)

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & a & ab + cde & c + abd \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{Vmatrix} \xrightarrow{T_5} B = \begin{Vmatrix} 1 & a & ab & c \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & de \\ & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Bineînțeles și $\begin{cases} \chi_{1\beta}(A) = \chi_{1\beta}(B)_{\beta=1,2,3,4.} \\ \chi_{\beta 1}(A) = \chi_{\beta 1}(B). \end{cases}$

Deoarece prin aplicarea teoremei 5 se conservă numai conductibilitățile corespunzătoare elementelor de pe linia și coloana α, și această teoremă se va utiliza numai în cazul sintezei dipolilor sau în cazul sintezei multipolilor atunci cînd se dau conductibilitățile totale între un nod și celelalte noduri ale schemei.

Deși cu un caracter restrictiv (mențin invariante numai conductibilitățile totale corespunzătoare elementelor de pe o linie și o coloană) teoremele 4 și 5 sînt utile în aplicații. Prin procedeele de sinteză care conduc la scheme de clasa II se obțin de multe ori scheme formate din mai multe părți componente în paralel între liniile de alimentare.

Considerarea acestor scheme în general complicate, în ansamblu, face calculul laborios. Numerotînd, de exemplu, polul pozitiv cu α și considerînd pe fiecare dintre rețelele componente cîte un nod pentru polul negativ, matricea corespunzătoare va avea elementele date numai pe linia și coloana α. În aceste cazuri teoremele 4 și 5 se aplică cu succes.

III

Vom demonstra acum o teoremă în baza căreia, atunci cînd trecem de la o matrice A la o matrice B care este asociată unei scheme echivalente ca funcționare, vor rămîne neschimbate toate conductibilitățile totale în afară de una singură.

Să considerăm o schemă cu n noduri avînd asociată matricea conductibilităților directe simetrică $A = \{a_{\alpha\rho}\}_{\alpha,\beta=1,2,\ldots,n}$ ale cărei elemente sînt de forma :

— Conductibilitățile directe între nodul μ și celelalte noduri ale rețelei (conductibilitățile directe de pe linia și coloana μ) sînt

$$a_{\rho\mu} = P_\rho + R_\rho S \quad \rho = 1, 2, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots \nu-1, \nu+1, \ldots n ;$$

— Conductibilitățile directe avînd nodul ν marginal (elementele de pe linia și coloana ν) sînt

$$a_{\rho\nu} = R_\rho + P_\rho S, \quad \rho = 1, 2, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots \nu-1, \nu+1, \ldots, n ;$$

— Conductibilitatea directă dintre nodurile μ și ν este

$$a_{\mu\nu}.$$

Deci, conductibilitățile directe care au nodul μ marginal sînt conjugate cu conductibilitățile care au nodul ν marginal, două cîte două.

Construim o nouă schemă avînd matricea conductibilităților directe simetrică $B = \{b_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2,\ldots,n}$ ale cărei elemente sînt de forma

$$b_{\rho\mu} = P_\rho,$$

$$b_{\rho\mu} = R_\rho \quad \rho = 1,2, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n$$

și

$$b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + S.$$

Restul elementelor în matricea B sînt egale cu cele din matricea A. Deci

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & P_1+R_1S & \ldots & R_1+P_1S & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \ldots & P_2+R_2S & \ldots & R_2+P_2S & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ P_1+SR_1 & P_2+SR_2 & \ldots & 1 & \ldots & a_{\mu\nu} & \ldots & P_n+SR_n \\ \vdots & & & & & & & \\ R_1+SP_1 & R_2+SP_2 & \ldots & a_{\nu\mu} & \ldots & 1 & \ldots & R_n+SP_n \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & P_n+R_nS & \ldots & R_n+P_nS & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

și

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & a_{12} \dots & P_1 & \dots & R_1 & \dots a_{1n} \\ a_{21} & 1 \dots & P_2 & \dots & R_2 & \dots a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ P_1 & P_2 \dots & 1 & \dots a_{\mu\nu}+S & \dots & P_n \\ \vdots & & & & & \\ R_1 & R_2 \dots & a_{\nu\mu}+S \dots & 1 & \dots & R_n \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & P_n & \dots & R_n & \dots 1 \end{Vmatrix}$$

Schimbarea conductibilităților directe respective se poate urmări pe figura 4.

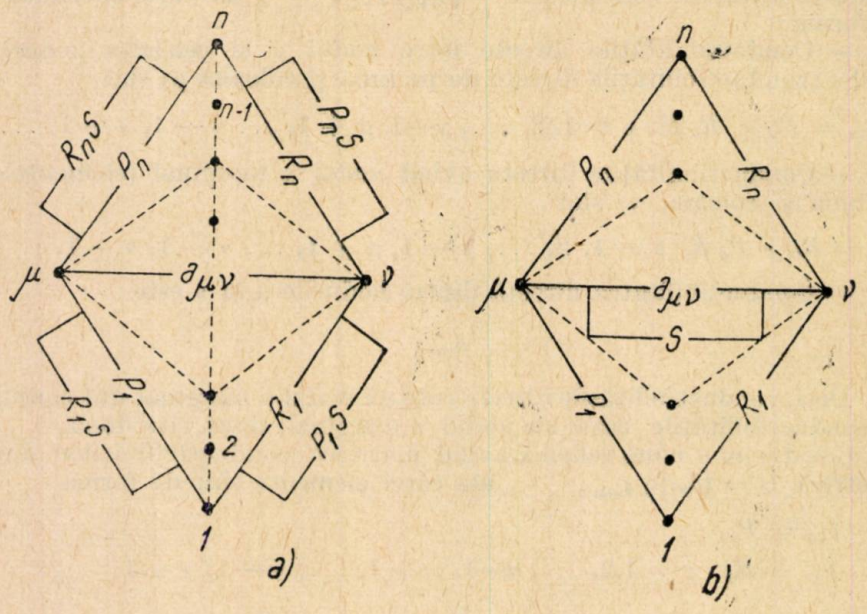

Fig. 4

Să demonstrăm

Teorema 6. *Conductibilitățile totale considerate între toate perechile de noduri în afară de perechea* (μ, ν), *în cele două scheme, sînt egale*

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = \chi_{\alpha\beta}(B);$$

unde (α, β) *parcurge toate perechile posibile formate cu nodurile* $1,2, \dots, n$ *în afară de perechea* (μ, ν)

Vom nota

$$A \overset{T_s}{\to} B.$$

Demonstrație. În demonstrațiile teoremelor 1 și 2 din [1] unde avem de pus în evidență una sau două conductibilități directe de formă specială,

specificam că mulțimea indicilor în sumele respective nu parcurge nodurile marginale ale acestora. Deoarece aici ca și în teorema 3 din [1] avem de-a face cu linii și coloane întregi ale căror elemente trebuie să le punem în evidență, în sumele respective vom exclude din mulțimea valorilor pe care le iau indicii, cîte un nod.

a) Considerăm conductibilitatea totală între μ și un nod oarecare al rețelei distinct de ν:

$$\chi_{\mu\beta}(A) = \sum (P_{i_1} + SR_{i_1})\, a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m\beta} + \sum (P_{h_1} + SR_{h_1})\, a_{h_1 h_2} \dots$$

$$a_{h_\eta h_\rho} (R_{h_\rho} + P_{h_\rho} S)\, (R_{h_\sigma} + SP_{h_\sigma})\, a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m\beta} + \sum a_{\mu\nu} (R_{k_1} + SP_{k_1}) a_{k_1 k_2} \dots a_{k_m}$$

$(i_1, i_2, \dots, i_m)$, $(h_1, h_2, \dots, h_m)$, $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ parcurg toate aranjamentele posibile ale numerelor $1, 2, \dots, \mu-1, \mu+1, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, \beta-1, \beta+1, \dots, n$ cîte $m = 0,1 \dots, n-3$.

Descompunem suma referitoare la indicii $(i_1 i_2, \dots, i_m)$:

$$\sum P_{i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m\beta} + \sum S R_{i_1} \dots a_{i_m\beta}.$$

Descompunînd suma referitoare la indicii $(h_1, h_2, \dots, h_m)$ obținem sumele*)

$$\sum P_{h_1} a_{h_1 h_2} \dots a_{h_\eta h_\rho} R_{h_\rho} R_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m\beta},$$

$$\sum P_{h_1} a_{h_1 h_2} \dots a_{h_\eta h_\rho} P_{h_\rho} SR_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum SR_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m\beta} \sum SR_{i_1} \dots a_{i_m\beta},$$

$$\sum P_{h_1} a_{h_1 h_2} \dots a_{h_\eta h_\rho} R_{h_\rho} SP_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum P_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum P_{i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m\beta},$$

$$\sum P_{h_1} a_{h_1 h_2} \dots a_{h_\eta h_\rho} P_{h_\rho} SSP_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum P_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum P_{i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m\beta}$$

$$\sum SR_{h_1} \dots a_{h_\eta h_\rho} R_{h_\rho} R_{h_\sigma} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum SR_{h_\sigma} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum SR_{i_1} \dots a_{i_m\beta},$$

$$\sum SR_{h_1} \dots a_{h_\eta h_\rho} R_{h_\rho} SP_{h_\sigma} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum P_{h_\sigma} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum P_{i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m\beta},$$

$$\sum SR_{h_1} \dots a_{h_\eta h_\rho} P_{h_\rho} SR_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum SR_{h_\sigma} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum SR_{i_1} \dots a_{i_m\beta},$$

$$\sum SR_{h_1} \dots a_{h_\eta h_\rho} P_{h_\rho} SSP_{h_\sigma} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum P_{h_\sigma} \dots a_{h_m\beta} \subset \sum P_{i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m\beta},$$

Descompunem suma efectuată asupra indicilor $(k_1, k_2, \dots, k_m)$:

$$\sum a_{\mu\nu} R_{k_1} a_{k_1 k_2} \dots a_{k_m\beta} \subset \sum a_{\mu\nu} R_{i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m\beta}$$

și

$$\sum a_{\mu\nu} SP_{k_1} a_{k_1 k_2} \dots a_{k_m\beta} \subset \sum P_{k_1} a_{k_1 k_2} \dots a_{k_m\beta} \subset \sum P_{i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m\beta}$$

Deci

$$\chi_{\mu\beta}(A) = \sum P_{i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m\beta} + \sum SR_{i_1} \dots a_{i_m\beta} + \sum P_{h_1} \dots a_{h_\eta h_\rho} R_{h_\rho} R_{h_\rho} \dots a_{h_m\beta} + \sum a_{\mu\nu} R_{i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m\beta}$$

de unde

$$\chi_{\mu\beta}(A) = \sum P_{i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m\beta} + \sum (S + a_{\mu\nu}) R_{i_1} \dots a_{i_m\beta} + \sum P_{h_1} \dots a_{h_\eta h_\rho} R_{h_\rho h_\sigma} \dots a_{h_m\beta}.$$

*) Întrebuințăm „$\subset$” în sensul definiției date în [1], § I.

Prin urmare

$$\chi_{\mu\beta}(A) = \chi_{\mu\beta}(B).$$

La fel se demonstrează că : $\chi_{\nu\beta}(A) = \chi_{\nu\beta}(B)$.

b) Considerăm conductibilitatea totală între două noduri distincte de μ și ν. Vom scrie separat termenii care nu conțin conductibilitățile directe avînd nodurile μ sau ν marginale, termenii care conțin conductibilitățile directe avînd μ sau ν ca noduri marginale și termenii care conțin conductibilitatea directă avînd nodurile μ și ν marginale :

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = \sum a_{\alpha i_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_m \beta} + \sum a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_\eta j_\rho} (P_{j_\rho} + R_{j_\rho} S)(P_{j_\sigma} + S R_{j_\sigma}) a_{j_\sigma j_\varepsilon} \ldots a_{j_m \beta} +$$

$$+ \sum a_{\alpha h_1} \ldots a_{h_\eta h_\rho} (R_{h_\rho} + P_{h_\rho} S)(R_{h_\sigma} + S P_{h_\sigma}) a_{h_\sigma h_\varepsilon} \ldots a_{h_m \beta} + \sum a_{\alpha k_1} a_{k_1 k_2} \ldots a_{k_\eta h_\rho}$$

$$(P_{k_\rho} + R_{k_\rho} S)(P_{k_\sigma} + S R_{k_\sigma}) a_{k_\sigma k_\delta} \ldots a_{k_\eta k_\tau} (R_{k_\tau} + P_{k_\tau} S)(R_{k_\zeta} + S P_{k_\zeta}) a_{k_\zeta k_\varepsilon} \ldots$$

$$\ldots a_{k_m \beta} + \sum{}' a_{\alpha l_1} a_{l_1 l_2} \ldots a_{l_\eta l_\rho} (P_{l_\rho} + R_{l_\rho} S) a_{\mu\nu} (R_{l_\sigma} + S P_{l_\sigma}) a_{l_\sigma l_\rho} \ldots a_{l_m \beta},$$

$(i_1, i_2, \ldots, i_m)$, $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ $(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ parcurg toate aranjamentele posibile ale numerelor $1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, \beta - 1, \beta + 1, \ldots, n$ cîte $m = 0, 1, \ldots, n - 4$.

Conform convenției de scriere adoptată [1] în suma efectuată asupra indicilor $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ intervine atît termenul

$$\ldots (P_{l_\rho} + R_{l_\rho} S)\, a_{\mu\nu}\, (R_{l_\sigma} + S P_{l_\sigma}) \ldots$$

cît și termenul

$$\ldots (R_{l_\rho} + P_{l_\rho} S)\, a_{\nu\mu}\, (P_{l_\sigma} + S R_{\sigma}) \ldots$$

Descompunem suma efectuată asupra indicilor $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$; obținem sumele :

$$\sum a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_\eta j_\rho} P_{j_\rho} P_{j_\sigma} a_{j_\sigma j_\varepsilon} \ldots a_{j_m \beta},$$

$$\sum a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_\eta j_\rho} P_{j_\rho} S R_{j_\sigma} a_{j_\sigma j_\varepsilon} \ldots a_{j_m \beta},$$

$$\sum a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_\eta j_\rho} R_{j_\rho} S P_{j_\sigma} a_{j_\sigma j_\varepsilon} \ldots a_{j_m \beta},$$

$$\sum a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_\eta j_\rho} R_{j_\rho} S S R_{j_\sigma} a_{j_\sigma j_\varepsilon} \ldots a_{j_m \beta} \subset \sum a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_\eta j_\rho} R_{j_\rho} R_{j_\sigma} a_{j_\sigma j_\varepsilon} \ldots a_{j_m \beta}.$$

Cele două sume

$$\sum a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \ldots P_{j_\rho} S R_{j_\sigma} \ldots a_{j_m \beta} + \sum a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \ldots R_{j_\rho} S P_{j_\sigma} \ldots a_{j_m \beta}$$

le putem scrie, conform convenției utilizate, ca o singură sumă

$$\sum{}' a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_\eta j_\rho} P_{j_\rho} S R_{j_\sigma} a_{j_\sigma j_\varepsilon} \ldots a_{j_m \beta}$$

unde intervin și termenii care conțin factorul $R_{j_\rho} S R_{j_\sigma}$ adică și conductibilitățile lanțurilor care trec, prin nodurile ν și μ de la ν la μ.

Descompunem suma efectuată asupra indicilor $(h_1, h_2, \ldots, h_m)$:

$$\sum a_{\alpha h_1} a_{h_1 h_2} \ldots a_{h_\eta h_\rho} R_{h_\rho} R_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \ldots a_{h_m \beta},$$

$$\sum a_{\alpha h_1} a_{h_1 h_2} \dots a_{h_\eta h_\rho} R_{h_\rho} SP_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m \beta},$$

$$\sum a_{\alpha h_1} a_{h_1 h_2} \dots a_{h_\eta h_\rho} P_{h_\rho} SR_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m \beta},$$

$$\sum a_{\alpha h_1} a_{h_1 h_2} \dots a_{h_\eta h_\rho} P_{h_\rho} SSP_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m \beta} \subset \sum a_{\alpha h_1} a_{h_1 h_2} \dots a_{h_\eta h_\rho} P_{h_\rho} P_{h_\sigma} \dots a_{h_m \beta}.$$

Suma a doua și a treia le vom scrie într-o singură sumă:

$$\sum{}' a_{\alpha h_1} \dots P_{h_\rho} SR_{h_\rho} \dots a_{h_m \beta}.$$

Se observă că

$$\sum{}' a_{\alpha h_1} \dots P_{h_\sigma} S R_{h_\sigma} \dots a_{h_m \beta} \subset \sum{}' a_{\alpha i_1} \dots P_{i_\rho} S R_{i_\sigma} \dots a_{i_m \beta}$$

deoarece indicii $(h_1, h_2, \dots, h_m)$ și $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ parcurg aceleași valori. De asemenea

$$\sum a_{\alpha i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_\eta i_\rho} R_{i_\rho} R_{i_\sigma} a_{i_\sigma i_\varepsilon} \dots a_{i_m \beta} \subset \sum a_{\alpha h_1} a_{h_1 h_2} \dots a_{h_\eta h_\rho} R_{h_\rho} R_{h_\sigma} \dots a_{h_m \beta}$$

$$\sum a_{\alpha h_1} a_{h_1 h_2} \dots a_{h_\eta h_\rho} P_{h_\rho} P_{h_\sigma} \dots a_{h_m \beta} \subset \sum a_{\alpha i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_\eta i_\rho} P_{i_\rho} P_{i_\sigma} a_{i_\sigma i_\varepsilon} \dots a_{i_m \beta}.$$

Descompunem suma efectuată asupra indicilor $(l_1, l_2, \dots, l_m)$:

$$\sum{}' a_{\alpha l_1} a_{l_1 l_2} \dots a_{l_\eta l_\sigma} P_{l_\sigma} a_{\mu\nu} R_{l_\sigma} \dots a_{l_m \beta} = \sum{}' a_{\alpha i_1} \dots a_{i_\eta i_\sigma} P_{i_\rho} a_{\mu\nu} R_{i_\sigma} \dots a_{i_m \beta},$$

unde suma efectuată asupra indicilor $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ conține și termenii în care intervine $a_{\nu\mu}$ (deoarece suma efectuată asupra indicilor $(l_1, l_2, \dots, \dots, l_m)$ îi conține)

$$\sum{}' a_{\alpha l_1} a_{l_1 l_2} \dots P_{l_\rho} a_{\mu\nu} SP_{l_\sigma} \dots a_{l_m \beta} \subset \sum a_{\alpha l_1} a_{l_1 l_2} \dots P_{l_\rho} P_{l_\sigma} \dots a_{l_m \beta} \subset \sum a_{\alpha i_1} \dots \dots P_{i_\rho} P_{i_\sigma} \dots a_{i_m \beta}$$

$$\sum{}' a_{\alpha l_1} a_{l_1 l_2} \dots a_{l_\eta l_\rho} R_{l_\rho} Sa_{\mu\nu} R_{l_\sigma} \dots a_{l_m \beta} \subset \sum a_{\alpha l_1} \dots R_{l_\rho} R_{l_\sigma} \dots a_{i_m \beta} \subset \sum a_{\alpha h_1} \dots \dots R_{h_\rho} R_{h_\sigma} \dots a_{h_m \beta}$$

$$\sum{}' a_{\alpha l_1} \dots a_{l_\eta l_\rho} R_{l_\rho} Sa_{\mu\nu} SP_{l_\sigma} \dots a_{l_m \beta} \subset \sum{}' a_{\alpha l_1} \dots R_{l_\rho} SP_{l_\sigma} \dots a_{l_m \beta} \subset \sum{}' a_{\alpha i_1} \dots \dots P_{i_\rho} SR_{i_\sigma} \dots a_{i_m \beta}.$$

Descompunînd suma efectuată asupra indicilor $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ obținem

$$\sum a_{\alpha k_1} \dots a_{k_\gamma k_\rho} P_{k_\rho} P_{k_\sigma} a_{k_\sigma l_\delta} \dots a_{k_\eta k_\tau} R_{k_\tau} R_{k_\zeta} a_{k_\zeta k_\varepsilon} \dots a_{k_m \beta}$$

și încă cincisprezece sume care sînt absorbite de sumele considerate mai sus.

Deci

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = \sum a_{\alpha i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m \beta} + \sum a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \dots a_{j_\eta j_\rho} P_{j_\rho} P_{j_\sigma} a_{j_\sigma j_\varepsilon} \dots a_{j_m \beta} +$$

$$+ \sum{}' a_{\alpha i_1} a_{i_1 j_2} \dots a_{j_\eta j_\rho} P_{j_\rho} SR_{j_\sigma} a_{j_\sigma j_\varepsilon} \dots a_{j_m \beta} + \sum{}' a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \dots a_{j_\eta j_\rho} P_{j_\rho} a_{\mu\nu} R_{j_\sigma} a_{j_\sigma j_\varepsilon} \dots$$

$$\dots a_{j_m \beta} + \sum a_{\alpha h_1} a_{h_1 h_2} \dots R_{h_\rho} R_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \dots a_{h_m \beta} + \sum a_{\alpha k_1} \dots a_{k_\gamma k_\rho} P_{k_\rho} P_{k_\sigma} a_{k_\sigma k_\delta} \dots$$

$$\dots a_{k_\eta k_\tau} R_{k_\tau} R_{k_\zeta} \dots a_{k_m \beta} = \sum a_{\alpha i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_m \beta} + \sum a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \dots a_{j_\eta j_\rho} P_{j_\rho} P_{j_\sigma} a_{j_\sigma j_\varepsilon} \dots$$

$$\ldots a_{j_m\beta} + \sum a_{\alpha h_1} a_{h_1 h_2} \ldots R_{h_\rho} R_{h_\sigma} a_{h_\sigma h_\varepsilon} \ldots a_{h_m\beta} + \Sigma a_{\alpha k_1} \ldots a_{k_\gamma k_\rho} P_{k_\rho} P_{k_\sigma} a_{k_\sigma k_\delta} \ldots$$

$$\ldots a_{h_\eta k_\tau} R_{k_\tau} R_{k_\zeta} a_{k_\zeta k_\varepsilon} \ldots a_{k_m\beta} + \sum{}' a_{\alpha j_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_\eta j_\rho} a_{j_\rho \mu} (S + a_{\mu\nu}) a_{\nu j_\sigma} \ldots a_{j_m\beta} = \chi_{\alpha\beta}(B).$$

Deoarece conductibilitățile directe între nodurile μ și ν pentru cele două scheme sînt $a_{\mu\nu} + S$ respectiv $a_{\mu\nu}$ se stabilește imediat că

$$\chi_{\mu\nu}(A) \neq \chi_{\mu\nu}(B). \qquad \text{q.e.d.}$$

Să ilustrăm aplicarea teoremei 6 pentru o schemă cu patru noduri. Fie

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & a & \bar{a} + bfg & b + \bar{a}fg \\ & 1 & c + dfg & d + cfg \\ & & 1 & e \\ & & & 1 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T_6} B = \begin{Bmatrix} 1 & a & \bar{a} & b \\ & 1 & c & d \\ & & 1 & e + fg \\ & & & 1 \end{Bmatrix},$$

unde se păstrează toate conductibilitățile totale în afară de $\chi_{34}(A)$.

Această teoremă permite, împreună cu teoremele 3, 4 și 5, considerarea de conductibilități directe între nodurile suplimentare, introduse prin dilatare, și celelalte noduri ale rețelei. Ea se poate utiliza și în cazul general al sintezei multipolilor cînd se dau conductibilitățile totale între perechi oarecari de noduri.

De asemenea, trecerea la scheme echivalente în baza teoremelor 4, 5, 6 se poate considera ca un proces de absorbție al unor termeni din conductibilitățile directe conjugate de către alți termeni existenți în aceste conductibilități.

Exemplul 1. Să reluăm exemplul 1 prezentat în [1] (§ V)

$$\chi_{12}(A) = aed + bec + ac + bd,$$

$$\chi_{12}(A) = c(a + be) + d(b + ae),$$

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & c(a + be) + d(b + ae) \\ & 1 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{Bmatrix} 1 & d(b + ae) & a + be \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_1} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & a + be & b + ae \\ & 1 & c & d \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T_4} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ & 1 & c & d \\ & & 1 & e \\ & & & 1 \end{Bmatrix}.$$

Schemele corespunzătoare ultimelor 2 matrici sînt cele din figura 5.

Am aplicat teorema 4 în cazul cînd toate elementele de pe linia și coloana $\alpha = 1$ sînt nule în afară de conductibilitățile directe conjugate și $a_{11} = 1$; în acest caz toate conductibilitățile totale corespunzătoare acestor elemente avînd nodul 1 marginal se conservă. În speță, se conservă și conductibilitatea totală dată $\chi_{12}(A)$. Operațiile precedente de dilatare efectuate asupra matricii A lasă invariantă numai această conductibilitate totală.

Să verificăm că într-adevăr conductibilitățile totale considerate între nodul 1 și celelalte noduri ale schemei se conservă în trecerea de la penultima la ultima matrice.

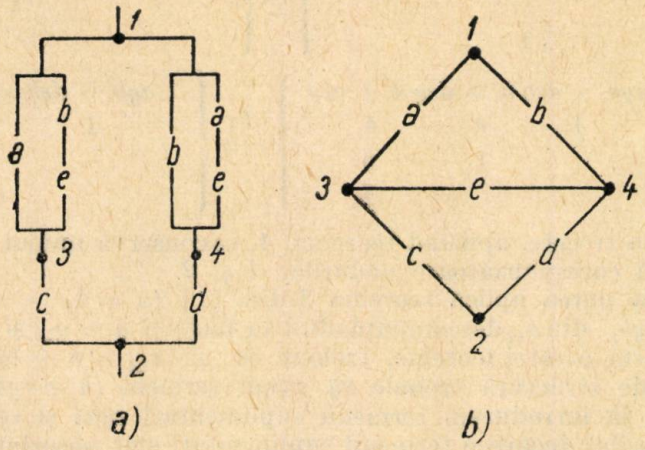

Fig. 5

Calculăm conductibilitățile totale între nodurile *1*, *3* și *1*, *4* (fig. 5)

$$A' = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & a+be & b+ae \\ 0 & 1 & c & d \\ a+be & c & 1 & 0 \\ b+ae & d & 0 & 1 \end{matrix} \right\};$$

$$\chi_{13}(A') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & d \\ a+be & c & 0 \\ b+ae & c & 0 \end{vmatrix} = a + be + bdc = \chi_{31}(A')$$

$$\chi_{14}(A') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & c \\ a+be & c & 1 \\ b+ae & d & 0 \end{vmatrix} = b + ae + acd = \chi_{41}(A'); \quad \chi_{12}(A') = \chi_{21}(A') =$$

$$= aed + bec + ac + bd.$$

Calculînd aceste conductibilități totale în matricea

$$B' = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ a & c & 1 & e \\ b & d & e & 1 \end{matrix} \right\}$$

Obținem: $\chi_{13}(A') = \chi_{13}(B')$; $\chi_{14}(A' = \chi_{14}(B')$, $\chi_{12}(A') = \chi_{12}(B')$.

Pe cînd, de pildă:

$$\chi_{23}(A') = c + bda + bde + ade \neq \chi_{23}(B') = c + de + dba$$

Exemplul 2. Să se reducă numărul de contacte ale unui dipol a cărui formulă de structură este:

$$\chi_{12}(A) = ac + dh + agh + deb + ageh + degc$$
$$\chi_{12}(A) = c(a + deg) + h(d + aeg) + ag\,b + deb.$$

Prin două dilatări succesive vom pune în evidență conductibilitățile directe conjugate care apar în parantezele expresiei date:

$$A=\begin{Bmatrix} 1 & c(a+deg)+h(d+aeg)+agb+deb \\ & 1 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{Bmatrix} 1 & h(d+aeg)+agb+deb & a+deg \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_1} \begin{Bmatrix} 1 & agb+deb & a+deg & d+aeg \\ & 1 & c & h \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T_4} \begin{Bmatrix} 1 & agb+deb & a & d \\ & 1 & c & h \\ & & 1 & eg \\ & & eg & 1 \end{Bmatrix}.$$

În ultima trecere, aplicînd teorema, 4, se conservă numai conductibilitatea totală corespunzătoare nodurilor *1* și *2*.

Pentru a putea aplica teorema 3 din [1] ($\mu = 2$, $\nu = 3$) asupra termenului agb, din a_{12} descompunîndu-l în factorii $a = a_{13}$ și $gb = a_{32} = a_{23}$, conform acestei teoreme, trebuie ca și $a_{24} = h + eg \,.\, gb$. Deci, în formula de structură trebuie să avem termeni $(h + egb)(d + aeg)$, prin urmare să introducem termenii suplimentari $egbd$ și $egbaeg$. Acest lucru este posibil deoarece termenii suplimentari sînt absorbiți de:

$$egbd \subset deb, \quad egbaeg \subset agb,$$

termeni existenți în formula de structură.
Deci

$$\begin{Bmatrix} 1 & agb+deb & a & d \\ & 1 & c & h+eggb \\ & & 1 & eg \\ & & eg & 1 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T_3} \begin{Bmatrix} 1 & deb & a & d \\ & 1 & c+gb & h \\ & & 1 & eg \\ & & & 1 \end{Bmatrix}.$$

În mod analog pentru a putea aplica din nou teorema 3 ($\mu = 2$, $\nu = 4$) asupra termenului $deb = a_{12}$ și anume factorul d să fie absorbit de $a_{14} = d$ trebuie ca $a_{23} = c + gb + egeb$, considerarea termenului suplimentar $egeb$ fiind posibilă deoarece $eyeb \subset gb$, termen care există în a_{23}.
Deci

$$\begin{Bmatrix} 1 & deb & a & d \\ & 1 & c+gb+egeb & h \\ & & 1 & eg \\ & & & 1 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T_3} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & a & d \\ & 1 & c+gb & h+eb \\ & & 1 & eg \\ & & & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_1} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & a & d & 0 \\ & 1 & c+gb & h+eb & 0 \\ & & 1 & 0 & g \\ & & & 1 & e \\ & & & & 1 \end{Bmatrix}.$$

Putem aplica din nou teorema 3 pentru linia a doua din ultima matrice ($\mu = 2$, $\nu = 4$). Deoarece am scris numai jumătatea de deasupra

diagonalei principale, vom considera, ca și pînă acum, simetricul lui a_{21}, și anume a_{12}. El trebuie să fie de forma $0 + 0b$ deoarece $b = S$.
Prin urmare

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 0+0b & a & d & 0 \\ & 1 & c+gb & h+eb & 0 \\ & & 1 & 0 & g \\ & & & 1 & e \\ & & & & 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{T_3} \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & a & d & 0 \\ & 1 & c & h & b \\ & & 1 & 0 & g \\ & & & 1 & e \\ & & & & 1 \end{array}\right\}.$$

Schema corespunzătoare (ca și în exemplul 4 § V [1]) este cea din figura 6

Exemplul 3. Să se construiască un dipol reducînd numărul de contacte prin introducerea circuitelor în punte.

Să presupunem că din programul dat am obținut următoarea formulă de structură corespunzînd unei scheme serie-paralel :

$$\chi_{12}(A) = ace + fdb + bgec + achf + fdga + ehdb + bgchf + ehdga,$$

$$\chi_{12}(A) = c\,[a\,(e + fh) + bg\,(e + fh)] + d\,[b\,(f + eh) + ga\,(f + eh)],$$

$$\chi_{12}(A) = c\,(a + bg)\,(e + fh) + d\,(b + ga)\,(f + eh).$$

Efectuînd două dilatări succesive obținem

$$\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & a+bg & b+ga \\ & 1 & c\,(e+fh) & d\,(f+eh) \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{T_4} \left\{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & a & b \\ & 1 & c\,(e+fh) & d\,(f+eh) \\ & & 1 & g \\ & & & 1 \end{array}\right\}.$$

Efectuînd încă două dilatări obținem

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & e+fh & f+eh \\ & & 1 & g & c & 0 \\ & & & 1 & 0 & d \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{T_4} \left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & e & f \\ & & 1 & g & c & 0 \\ & & & 1 & 0 & d \\ & & & & 1 & h \\ & & & & & 1 \end{array}\right\}.$$

Schema corespunzătoare este cea din figura 7.

Teoremele stabilite în [1] și în această lucrare ne dau un număr de condiții suficiente, care dacă sînt îndeplinite permit să introducem în schemele de clasă II circuite în punte și prin urmare să reducem numărul de contacte necesar pentru îndeplinirea programului cerut.

Teoremele 2, 3, 4, 5 și 6 permit procesul de absorbție al unor conductibilități din elementele matricii asociate, de către altele, proces care nu poate fi continuat asupra formulei de structură corespunzătoare schemei de clasă II cu ajutorul regulilor de calcul ale algebrei booleene.

Am văzut în exemplele prezentate, că uneori este necesară, pentru realizarea condițiilor de aplicare ale teoremelor, considerarea unor termeni suplimentari în conductibilitățile directe ale unei matrici intermediare

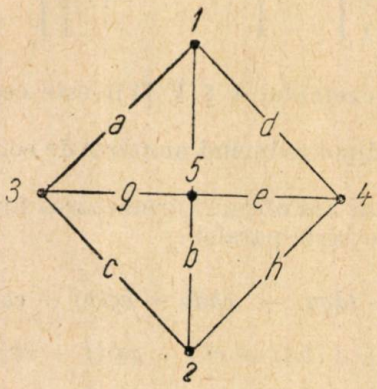

Fig. 6

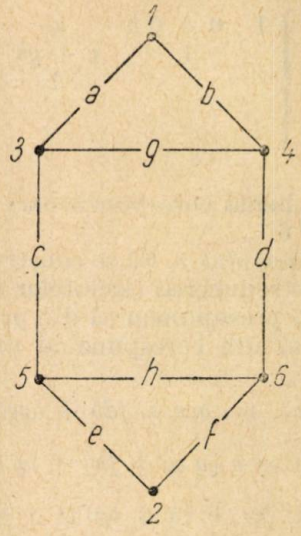

Fig. 7

obținută în succesiunea de operații; acești termeni pot fi considerați dacă sînt absorbiți de termenii existenți în formula de structură dată sau dacă sînt absorbiți de termenii existenți în conductibilitățile directe respective.

О СОКРАЩЕНИИ ЧИСЛА КОНТАКТОВ ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ МОСТИКОВЫХ ЦЕПЕЙ. НЕПОСРЕДСТВЕННАЯ СОПРЯЖЕННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Вводится определение непосредственной сопряженной проводимости и при помощи этого понятия доказываются три теоремы, которые вместе с теоремами [1] допускают переход к схемам, эквивалентным по действию, с сокращением числа контактов для данной программы.

Теоремы из настоящей статьи вместе с теоремами [1] являются достаточными условиями для задачи упрощения схем.

В § IV приводятся три примера.

SUR LA RÉDUCTION DU NOMBRE DE CONTACTS EN INTRODUISANT LES CIRCUITS EN PONT. CONDUCTIBILITÉS DIRECTES CONJUGUÉES

(RÉSUMÉ)

On introduit la définition des conductibilités directes conjuguées et à l'aide de cette notion, on démontre 3 théorèmes qui permettent, avec les trois théorèmes du [1], le passage des schémas Π aux schémas H, en réduisant le nombre des contacts pour le même programme.

Tous ces théorèmes constituent des conditions suffisantes pour le problème de la simplification des schémas.

Pour illustration, on donne (§ IV) des exemples.

BIBLIOGRAFIE

1. Paul Constantinescu, *Asupra reducerii numărului de contacte prin introducerea circuitelor în punte.* Revista Universității „C. I. Parhon", București, 1956, nr. 10.
2. A. G Lunț, *Algebraiceskie metodî analiza i sinteza Kontaktnih shem.* Izvestia Acad. Nauk SSSR, seria matematika, 1952, vol. 16, p. 405—426.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul VII/1956

INDICE ALFABETIC

	nr.	Pag.
BĂDESCU RADU, Asupra unor ecuaţii funcţionale din spaţiul Hilbert complex L^2	3—4	273
BARBĂLAT I. şi HALANAY A., Un criteriu de existenţă a unui ciclu limită stabil pentru ecuaţia oscilaţiilor neliniare	1—2	81
CONSTANTINESCU PAUL, Asupra reducerii numărului de contacte prin introducerea circuitelor în punte. Conductibilităţi directe conjugate	3—4	399
CRISTESCU ROMULUS, Clase de spaţii liniare semiordonate pseudonormate	3—4	291
FRODA ALEXANDRU, Despre reuniunile ordonate de mulţimi	1—2	7
KAHANE ARNO, Asupra unor ecuaţii diferenţiale ale căror soluţii se pot afla cu ajutorul soluţiilor ecuaţiei $\theta'' = h(t).\theta$	3—4	307
MARCUS S., Contribuţii la o analiză a funcţiilor reale bazată pe noţiunea de categorie (în sensul lui Baire)	3—4	251
NEGULCE M., Studiul sintetic al transformării afine	1—2	179
NEDELCU MARIANA, Polinomul areolar de ordinul n în spaţiul cu 3 dimensiuni	1—2	197
POPOVICI CONSTANTIN P., Teoria locală a numerelor ideale după Zolotarev în cazul întregilor lui Dirichlet	1—2	37
ROŞCULEŢ MARCEL N., Algebre cu radical, asociative şi comutative, şi funcţii monogene	1—2	147
ROŞCULEŢ MARCEL N., Algebre infinite, comutative, asociate la sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale	3—4	321
SINGER IVAN, Proprietăţi ale suprafeţei sferei unitate şi aplicaţii la rezolvarea problemei unicităţii polinomului de cea mai bună aproximaţie în spaţii Banach oarecare	1—2	95
STOILOW S., Asupra convergenţei continue	3—4	247
VÂLCOVICI VICTOR, Fundamentele mecanicii	3—4	373

EDITURA ACADEMIEI POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том VII 1956

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

	№	Стр
БАРБЭЛАТ И. и ХАЛАНАЙ А., Критерий существования устойчивого предельного цикла для уравнений нелинейных колебаний	1—2	81
БЭДЕСКУ Р., О некоторых функциональных уравнениях в комплексном гильбертовом пространстве	3—4	273
ВЫЛКОВИЧ В., Основание механики	3—4	373
ЗИНГЕР И., Некоторые свойства поверхности единичной сферы и применения к решению задачи единственности многочлена наибольшего приближения в любых пространствах Банаха	1—2	95
КАХАНЕ А., О некоторых дифференциальных уравнениях, решения которых можно найти при помощи решений уравнения $\theta'' = h(t).\theta$	3—4	307
КОНСТАНТИНЕСКУ П., О сокращении числа контактов путем введения мостиковых цепей. Непосредственная сопряженная проводимость	3—4	399
КРИСТЕСКУ Р., Классы псевдонормированных линейных полуупорядоченных пространств	3—4	291
МАРКУС С., К вопросу об анализе функций действительного переменного, основанном на понятии о категории (в смысле Бэра)	3—4	251
НЕДЕЛКУ М., Ареолярный многочлен n-го порядка в трехмерном пространстве	1—2	197
НЕКУЛЬЧЕ М., Об аффинном преобразовании	1—2	179
ПОПОВИЧ К. П., Локальная теория идеальных чисел по Золотареву для кольца Дирихле	1—2	37
РОШКУЛЕЦ М. Н., Ассоциативные и коммутативные алгебры с радикалом и моногенные функции	1—2	147
РОШКУЛЕЦ М. Н., Бесконечные алгебры, ассоциированные с системами уравнений с частными производными	3—4	321
СТОЙЛОВ С., О непрерывной конвергенции	3—4	247
ФРОДА А., Об упорядоченных объединениях множеств	1—2	7

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHEMATIQUES

ETUDES ET RECHERCHES MATHEMATIQUES

Tome VII/1956

INDEX ALPHABÉTIQUE

	No	Pag.
BĂDESCU RADU, Sur quelques équations fonctionnelles dans l'espace de Hilbert complet L^2	3—4	273
BARBĂLAT I. et HALANAY A., Un critère d'existence d'un cycle limite stable pour l'équation des oscillations non linéaires	1—2	81
CONSTANTINESCU PAUL, Sur la réduction du nombre de contacts en introduisant les circuits en pont. Conductibilités directes conjuguées	3—4	399
CRISTESCU ROMULUS, Classes d'espaces linéaires semi-ordonnés pseudo-normés	3—4	291
FRODA ALEXANDRU, Sur les réunions ordonnées d'ensembles	1—2	7
KAHANE ARNO, Sur certaines équations différentielles dont la solution peut être trouvée à l'aide des solutions de l'équation $\theta'' = h(t).\theta$	3—4	307
MARCUS S., Contribution à une analyse des fonctions réelles, basée sur la notion de catégorie (au sens de Baire)	3—4	251
NECULCE M., Etude synthétique de la transformation affine	1—2	179
NEDELCU MARIANA, Le polynôme aréolaire d'ordre n dans l'espace à trois dimensions	1—2	197
POPOVICI CONSTANTIN P., La théorie locale des nombres idéaux, d'après Zolotarev dans le cas des entiers de Dirichlet	1—2	37
ROŞCULEŢ MARCEL N., Algèbres à radical, associatives et commutatives, et fonctions monogènes	1—2	147
ROŞCULEŢ MARCEL N., Algèbres infinies, commutatives, associées à des systèmes d'équations aux dérivées partielles	3—4	321
SINGER IVAN, Propriétés de la surface de la sphère unitaire et applications à la résolution du problème de l'unicité du polynôme de meilleure approximation dans des espaces de Banach quelconques	1—2	95
STOILOW S., Sur la convergence continue	3—4	247
VÂLCOVICI VICTOR, Les fondements de la Mécanique	3—4	373

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE,
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII